

KRITIKUS TÖKÉLETLENSÉGI TARTOMÁNY

GÁSPÁR ZSOLT*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. október 21-én]

1. Bevezetés

Rugalmas szerkezetek statikai vizsgálatakor a következő kérdések merülhetnek fel:

- a) Adott tehet hatására mekkorák az elmozdulások és feszültségek?
- b) Mekkora a kritikus teher?
- c) Az elkerülhetetlen tökéletlenségek hatására mennyire csökkenhet a kritikus teher?
- d) A posztkritikus állapotban esetleg mennyire fokozható még a terhelés?

A fenti kérdések általában megválaszolhatók a diszkretizált konzervatív rendszerek potenciálfüggvényének vizsgálata alapján [1, 2].

Az elmozdulásokat általában egy nemlineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Az egyparaméteresnek feltételezett teher kritikus paraméterét szintén egy nemlineáris egyenletrendszer határozza meg, de megoldására egy saját értékeladat megoldását is magába foglaló iterációs eljárás javasolható.

A tökéletlenség-érzékenység vizsgálatakor — mely e cikk témája — a katasztrófaelmélet [3, 4, 5] eredményeit használjuk fel. A posztkritikus állapot vizsgálatakor az elágazott egyensúlyi utak elemzésére is szükség van. A mérnöki létesítményeken a következő katasztrófafajták jöhetnek létre:

Egy megépült szerkezeten csak egy paraméter (az idő) van, így Thomtétéle szerint csak a ránc katasztrófa létrejötte valószínű. A mérnökök azonban gyakran terveznek szimmetrikus szerkezeteket, vizsgálnak szimmetrikus hatásokat. Ilyenkor a „tökéletes szerkezeten” csúcs katasztrófa is létrejöhet. Az optimalizációs eljárás során a tervező gyakran arra törekszik, hogy a szerkezet a stabilitását ugyanannál a tehernél veszítse el a különböző stabilitásvesztési módokban [6]. Két kihajlási mód összeesése általában hiperbolikus vagy elliptikus köldök létrejöttét eredményezi. Ha azonban mindkét elágazási irányban szimmetrikus a szerkezet, akkor kettős csúcs katasztrófa keletkezhetik. Ezzel, bonyolultsága miatt, nem foglalkozunk ebben a cikkben.

A diszkretizált szerkezet teljes potenciális energiája

$$V(q, \lambda, \alpha), \quad (1)$$

* Dr. Gáspár Zsolt, 1111 Budapest, BME Műegyetem rkp. 3.

ahol $q = [q_1, \dots, q_n]$ az elmozdulásokat leíró általánosított koordináták vektora, λ az egyparaméteresnek feltételezett teher paramétere, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha]$ az általánosított tökéletlenség-koordináták vektora. Tökéletes szerkezetnek az $\alpha = 0$ esetet nevezzük. A potenciálfüggvény a λ teherparaméter lineáris függvénye.

Jelölje λ^c azt a teherparamétert, melynél a tökéletes szerkezet a λ fokozatos növelésével először jut kritikus állapotba. A hozzá tartozó elmozdulás q^c . Az (1) potenciálfüggvényt a $(q^c, \lambda^c, 0)$ pont környezetében fogjuk vizsgálni. A vizsgálathoz először a

$$q = q^c + \hat{q}, \quad \lambda = \lambda^c + \lambda$$

transzformációkkal az origót a vizsgálandó pontba toljuk, majd a q változók szerint sorbafejtjük a függvényt. POSTON és STEWART [5] 154. oldala alapján ránc katasztrófa, elliptikus és hiperbolikus köldök esetében a sorfejtést elegendő a harmadfokú tagokig végezni, a csúcskatasztrófánál a negyedfokú tagok is kellenek.

Az aktív és passzív koordináták szétválasztása történhetik THOMPSON és HUNT [6] vagy POSTON és STEWART [5, 150. o.] algoritmusa alapján. A vizsgálatainkat csak a leválasztott, az aktív koordinátákat tartalmazó résszel végezzük.

2. A kritikus tökéletlenségi tartomány

A szerkezetnek és a terheknek a tervezettől való eltérését (tökéletlenséget) az α általánosított koordinátákkal jellemezzük. Hatásukat igyekszünk figyelembe venni az olyan alacsonyabb fokú tagokban, melyek együtthatója $\alpha = 0$ esetében zérus. Ha túl sok paraméter adódik, akkor a számítás kezelhetősége érdekében a magasabb fokú tagok zavarását nem vesszük figyelembe, ugyanis ezeknek általában kisebb a hatásuk ([7] 93. o.). Az energiafüggvényen olyan transzformációkat végzünk, hogy a független paraméterek számát minimalizáljuk. A valószínű szerkezet eltérése a tervezett (tökéletes) szerkezettől korlátozott. E korlátok a paramétertér egy résztartományával megadhatók.

Valamely teherparaméterhez tartozó *kritikus tökéletlenségi tartomány* pontjait azon tökéletlenségek alkotják, melyek esetében a kritikus teher paramétere kisebb e teherparaméternél. Kritikus tehernek azt a legkisebb terhet tekintjük, amelynél a kezdeti stabil egyensúlyi helyzet labilissá válik.

A kritikus tökéletlenségi tartomány a következő lépésekben határozható meg:

a) Megállapítandó a katasztrófa típusa, és meg kell határozni azokat a transzformációkat, amelyek e katasztrófa egy kanonikus alakját az aktuális potenciálfüggvény alakjára transzformálják.

b) A kanonikus alak elágazási halmazából el kell hagyni azokat a részeket, melyeken keresztülhaladva a minimumpontok száma nem változik. Fel kell írni a megmaradt rész egyenletét (általában paraméteres alakban).

c) Meg kell állapítani, hogy a megmaradt elágazási halmaz által a paraméterterben kialakított tartományok közül melyekben van minimumpont, és ellenőrizendő, hogy a tökéletes szerkezet kritikus terhénél kisebb teher esetében valóban stabil volt-e az egyensúlyi állapot.

d) A teherparaméter változtatása a paraméterterben egy görbét határoz meg. Megállapítandó, hogy az elágazási halmazon való keresztülhaladás milyen típusa szünteti meg az eredeti minimumpontot.

e) Az elágazási halmaz paraméteres alakjának és a korábban meghatározott transzformációk ismeretében megállapítandó, hogy rögzített teherparaméter esetében hogy néz ki a kritikus tökéletlenségi tartomány, valamint az, hogy a teherparaméter függvényében hogyan változik a tartomány.

A 3—6. pontokban a ránc, a csúcs, a hiperbolikus és az elliptikus köldök esetében e lépésekkel kritikus tökéletlenségi tartományokat határozzunk meg. Némelyik esetben egy-egy lépés triviális is lehet, de mindegyik lépést jelezzük az $a—e$ betűkkel.

Az egyes katasztrófák esetében egy adott teherparamétert felvéve, a tökéletlenségi paraméterek terét három tartományra osztjuk, és ezeket a következők szerint sorszámozzuk is:

1. Az adott teherparaméterhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartomány.
2. Azon tökéletlenségek, melyeknél a kritikus teher kisebb a tökéletes szerkezet kritikus terhénél, de nagyobb az adott tehernél.
3. Azon tökéletlenségek, melyeknél a tökéletes szerkezet kritikus terhénél kisebb teher esetén nincs stabilitásvesztés.

A 2. és 3. tartomány megkülönböztetése elvileg nem lényeges, de általában jól szemlélteti a kritikus tökéletlenségi tartomány változásának szabályait.

A legveszélyesebb lehetséges tökéletlenség és a hozzá tartozó (minimális) kritikus teher meghatározása annak a paraméternek a kikeresését jelenti, amelyhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartomány érinti a paraméterter azon résztartományát, amely a megengedett eltéréseket mutatja.

3. Ránc katasztrófa

A ránc katasztrófa egy kanonikus alakja:

$$f(u, a) = \frac{1}{3} u^3 - au. \quad (2)$$

a) A vizsgálandó potenciálfüggvénynek a kritikus pontban ránc katasztrófa alakja van, ha az általános alakja:

$$V' = c_1 x^3 + \varepsilon'_1 x^2 + \varepsilon'_2 x - \lambda (c_2 x^2 + c_3 x), \quad (3)$$

ahol x az egyetlen aktív általánosított koordináta, $c_1 \neq 0$, ε'_1 és ε'_2 az α tökéletlenségek függvénye, és $\varepsilon'_1(0) = \varepsilon'_2(0) = 0$. A tökéletes szerkezeten általában $c_3 \neq 0$, de kivételes esetekben nulla is lehet. Ha $c_3 = 0$, akkor az a tipikus, hogy $c_2 \neq 0$. A $c_2 = c_3 = 0$ esettel nem foglalkozunk. A $c_3 \neq 0$ és a $c_3 = 0$ esetet külön tárgyaljuk. Először a $c_3 \neq 0$ esetet tárgyaljuk.

a1. Először a függvényt egyszerűbb alakra transzformáljuk. A (3) egyenletet elosztjuk a $3c_1(1 + c_2x/c_3)$ kifejezéssel, és a korábbiaknak megfelelően az x -ben harmadnál magasabb fokú tagokat elhagyhatjuk, továbbá az egység mellett a tökéletlenségeket az együttthatókban elhanyagoljuk. Az x -től nem függő tagok a vizsgálat szempontjából érdektelenek, ezért itt is és a továbbiakban is elhagyjuk azokat. Így

$$V'' = \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_1''x^2 + \varepsilon_2''x - \lambda cx \quad (4)$$

adódik, ahol

$$\varepsilon_1'' = \frac{c_3 \varepsilon'_1 - c_2 \varepsilon'_2}{3c_1 c_3}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{\varepsilon'_2}{3c_1}, \quad c = \frac{c_3}{c_1}.$$

Az $x = y - \varepsilon_1''$ lineáris transzformációval (4)

$$V(y, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{3}y^3 + \varepsilon y - \lambda cy \quad (5)$$

alakú lesz, ahol $\varepsilon = \varepsilon_2'' - (\varepsilon_1'')^2$. ε magába foglalja a (3) függvényben szereplő összes tökéletlenséget. (2) és (5) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned} u &= y, \\ a &= \varepsilon - c\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

Aanszformációkkal

$$f(u, a) = V(y, \lambda, \varepsilon).$$

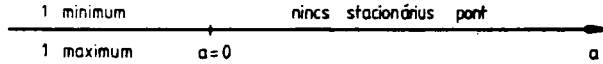
b1. Az (1) ránc katasztrófa esetében a kinyitási (unfolding) tér egydimenziós, az elágazási halmaz egy pont:

$$a = 0. \quad (7)$$

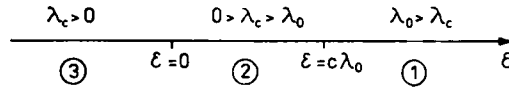
Az 1. ábra mutatja, hogy a kinyitási tér mely tartományban milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaz két oldalán a minimumpontok száma különbözik.

c1. Csak az $a < 0$ esetben van minimumpont, így $\varepsilon = 0$, $\lambda < 0$ esetben negatív a értéket kell kapni, tehát $c < 0$ kell hogy legyen.

d1) Egy negatív a értékből indulva, az elágazási halmazt elérve, a minimumpont találkozik a másik stacionárius ponttal, keresztülhaladva a halmazon, mindkettő megszűnik.



1. ábra



2. ábra

e1) A (6)–(7) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a változót, és kifejezzük az ε változót:

$$\varepsilon = c\lambda. \quad (8)$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében az $\varepsilon_0 = c\lambda_0$ pont adja meg azt a tökéletlenséget, amely esetében a kritikus teher paramétere éppen $\Lambda^c + \lambda_0$. Az ε_0 pontnak az origótól mért távolsága λ_0 lineáris függvénye. A tökéletlenségi tér három tartományát a 2. ábra szemlélteti.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a tökéletes szerkezeten a (3) egyenletben $c_3 = 0$, de $c_2 \neq 0$.

a2) Ekkor $c_3 = \varepsilon'_3$ a tökéletlenségek függvénye. A (3) függvényt elosztva $3c_1$ -gyel, majd az $x = y - \varepsilon'_1/(3c_1)$ lineáris transzformációt alkalmazva

$$V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{3} y^3 + \varepsilon_1 y - \lambda (cy^2 + \varepsilon_2 y) \quad (9)$$

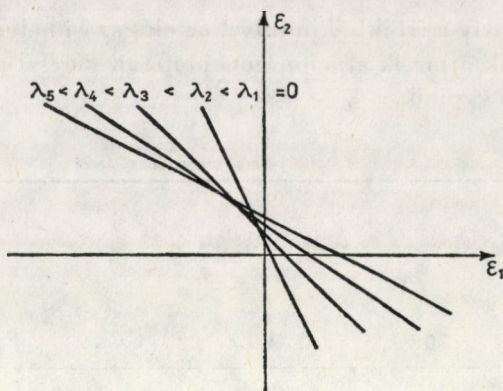
adódik, ahol

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon'_2}{3c_1} - \frac{(\varepsilon'_1)^2}{9c_1^2}, \quad c = \frac{c_2}{3c_1},$$

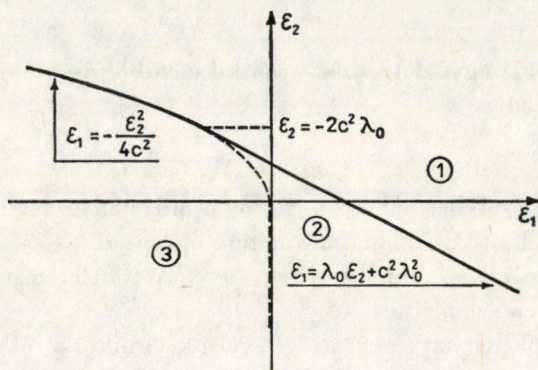
$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_3}{3c_1} - \frac{2c_2 \varepsilon'_1}{9c_1^2}.$$

A (9) kifejezésben ε_1 és ε_2 magába foglalja a (3) függvényben szereplő mindhárom tökéletlenséget (ε'_1 , ε'_2 , $c_2 = \varepsilon'_3$). A (2) és (9) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned} u &= y - c\lambda, \\ a &= \varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_2 - c^2\lambda^2 \end{aligned} \quad (10)$$



3. ábra



4. ábra

transzformációkkal

$$f(u, a) = V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b2. lásd b1.

c2. Csak az $a < 0$ esetben van minimumpont, így $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda < 0$ esetben negatív értéket kell kapni. Ez a feltétel bármely $c \neq 0$ esetében teljesül.

d2. lásd d1.

e2. A (6), (10) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a változót, és kifejezzük az ε_1 változót:

$$\varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_2 + c^2 \lambda^2. \quad (11)$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében (10) az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ síkban egy egyenest határoz meg. Az egyenes helyzetét néhány λ értéknél a 3. ábra mutatja. Határozzuk meg a (11) egyenessereg burkológörbét! A (11) egyenlet λ szerinti deriváltja:

$$\varepsilon_2 + 2c^2 \lambda = 0. \quad (12)$$

A $\lambda < 0$ miatt $\varepsilon_2 > 0$. A (11), (12) egyenletrendszerből kiküszöbölve λ -át

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_2^2}{4c^2}. \quad (13)$$

A tökéletlenségi tér három tartományát a 4. ábra tünteti fel. A (13) egyenlettel meghatározott burkológörbe független a λ_0 értékétől. Adott tökéletlenségek esetében a megfelelő érintő egyenest kell megkeresni. Az egyenes és az ε_1 tengely metszéspontja alapján λ_c számítható.

4. Csúcs katasztrófa

A csúcs katasztrófa egy kanonikus alakja:

$$f(u, a, b) = \pm \left(\frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} au^2 + bu \right). \quad (14)$$

Pozitív előjel esetében standard csúcsnak, negatív előjel esetében duális csúcsnak hívják. A két esetben a minimum- és maximumpontok szerepe felcserélődik, ezért ezeket külön kell tárgyalni.

a) A vizsgálandó potenciálfüggvénynek a kritikus pontban csúcs katasztrófa alakja van, ha az általános alakja:

$$V' = c_1 x^4 + \varepsilon'_1 x^3 + \varepsilon'_2 x^2 + \varepsilon'_3 x - \lambda (c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x), \quad (15)$$

ahol x az egyetlen aktív általánosított koordináta, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ az α tökéletlenségek függvénye és $\varepsilon'_1(0) = \varepsilon'_2(0) = \varepsilon'_3(0) = 0$. $c_1 > 0$ esetében standard, $c_1 < 0$ esetén duális csúcs katasztrófa van.

Csúcs katasztrófa általában akkor adódik a szerkezeten, ha a szerkezet és a teher együtt egy szimmetrikus rendszert alkot. Ekkor a tökéletes szerkezetnél csak x páros hatványai szerepelnek. Ezért feltesszük, hogy $c_3 \neq 0$ a tökéletes szerkezetnél, $c_2 = \varepsilon'_4(\alpha)$, $c_4 = \varepsilon'_5(\alpha)$ és $\varepsilon'_4(0) = \varepsilon'_5(0) = 0$. A vizsgálat kezelhetősége érdekében az ε'_4 tökéletlenség hatását elhagyjuk (ez általában sokkal kisebb, mint ε'_5 hatása).

A (15) függvényt $4 |c_1|$ -gyel elosztva, majd az $x = y - \varepsilon'_1/(4c_1)$ lineáris transzformációt alkalmazva

$$V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \alpha \left(\frac{1}{4} y^4 + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 y - \lambda (c y^2 + \varepsilon_3 y) \right) \quad (16)$$

adódik, ahol

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon'_2}{4c_1} - \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{32c_1^2}, & \alpha &= \text{sign } c_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon'_3}{4c_1} - \frac{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}{8c_1^2} + \frac{(\varepsilon'_1)^3}{32c_1^3}, & c &= \frac{c_3}{4c_1}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon'_5}{4c_1} - \frac{c_3 \varepsilon'_1}{8c_1^2}.\end{aligned}$$

A (16) függvény a c_2 kivételével magába foglalja a (15) függvényben szereplő tökéletlenségeket. A (14) és (16) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned}u &= y, \\ a &= 2(\varepsilon_1 - \lambda c),\end{aligned}\tag{17}$$

$$b = \varepsilon_2 - \lambda \varepsilon_3\tag{18}$$

transzformációkkal

$$f(u, a, b) = V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Először a standard csúcs esetét tárgyaljuk.

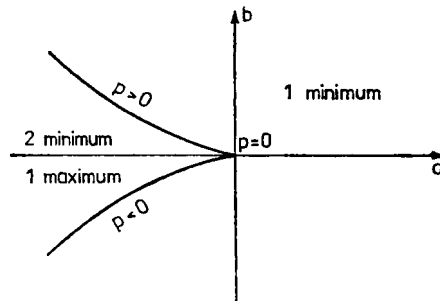
b1) A (14) csúcs katasztrófa esetében a kinyitási tér kétdimenziós, az elágazási halmaz paraméteres alakja:

$$a = -3p^2,\tag{19}$$

$$b = 2p^3.\tag{20}$$

Az 5. ábra mutatja, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaz két oldalán a minimumpontok száma különbözik.

c1) A kinyitási tér mindkét tartományában van minimumpont, tehát bármelyik pontból indulhattunk. A tökéletes szerkezeten ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$)



5. ábra

$b = 0$, tehát a (17) képletben c előjele mutatja, hogy melyik tartományból indultunk. Ha $c > 0$ és $\lambda < 0$, akkor $a > 0$, vagyis az egy minimumpontot tartalmazó tartományból indultunk, ha $c < 0$, akkor a csúcs belsejéből indultunk.

A két esetet külön tárgyaljuk. Először a $c > 0$ esetet vizsgáljuk.

d1.1) A 6. ábra három lehetséges utat tüntet fel. Az A útnál a csúcsponton áthaladva a minimumpont három stacionárius ponttá ágazik, tehát kritikus állapot van. A B útnál egy ránc ponton áthaladva, az eredeti minimumponttól távolabb két újabb stacionárius pont keletkezik, majd az elágazási halmaz ugyanazon ágán kijőve, a két új stacionárius pont szűnik meg, tehát nincs stabilitásvesztés. A C útnál a belépési pontnál megint két új stacionárius pont keletkezik, majd az elágazási halmaz másik ágán kijőve, az eredeti minimumpont és az új maximumpont szűnik meg, tehát a másodszori keresztezésnél stabilitásvesztés van.

e1.1) A (17)–(20) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a és b változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

$$\varepsilon_1 = c\lambda - 3p^3/2, \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon_3 + 2p^3. \quad (22)$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében (21) és (22) az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ térben egy felületet határoz meg, mely p és ε_3 paraméterekkel van megadva. A felületet a 7. ábra mutatja. A felület minden, az ε_3 tengelyre merőleges síkkal való metszete egybevágó, mégpedig az 5. ábrán bemutatott csúcsnak az ε_1 irányban felére zsugorított változata. Az él egyenes, és az ε_1 tengelyre merőleges. λ_0 csökkentésével a felület a $-\varepsilon_1$ irányban eltolódik, az él pedig mindig az

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_3/c \quad (23)$$

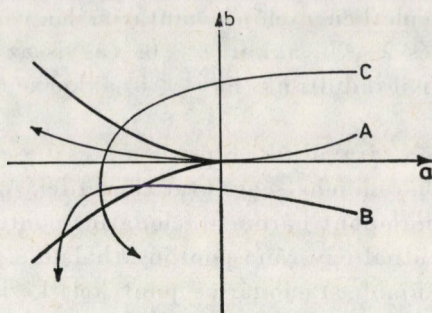
torzfelületen van.

A 8. ábra egy rögzített $\varepsilon_3 > 0$ esetében szemlélteti a metszet változását. Csak a vastagon jelölt görbeszakasz pontjain halad keresztül egy kisebb λ esetében a másik ág, anélkül, hogy a saját ág újbóli keresztülhaladása megelőzné ezt. Így a $(p_t, 0)$ paraméterekkel határolt görbeszakasz adja meg azokat a tökéletlenségeket, melyekhez azonos kritikus teher tartozik. A p_t pontban a görbe érintője párhuzamos a (23) egyenessel, tehát

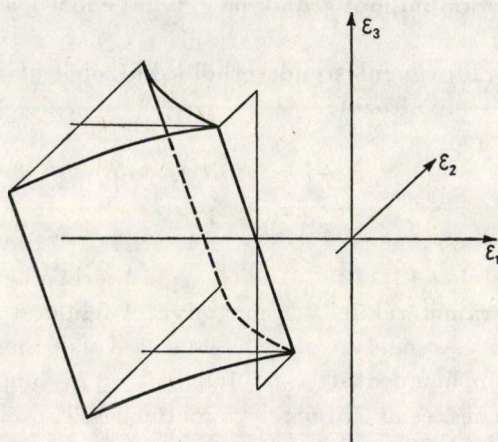
$$\frac{\varepsilon_3}{c} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{dp} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dp} \right)^{-1}.$$

Felhasználva a (21) és (22) egyenletet

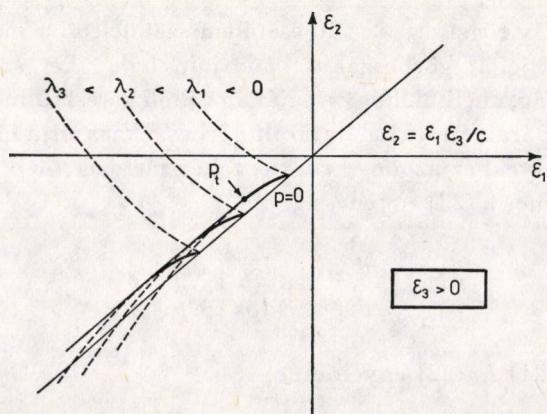
$$p_t = -\frac{\varepsilon_3}{2c}. \quad (24)$$



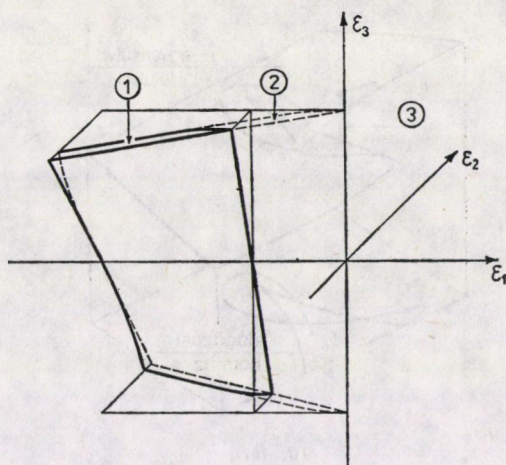
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra

A tökéletlenségi tér három tartományát a 9. ábra mutatja. A kritikus tökéletlenségi tartományt határoló három felület egyenlete:

$$1. \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 / c + \varepsilon_3^3 / (8c^3) \quad \varepsilon_1 \leq c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2 / (8c^2), \quad (25)$$

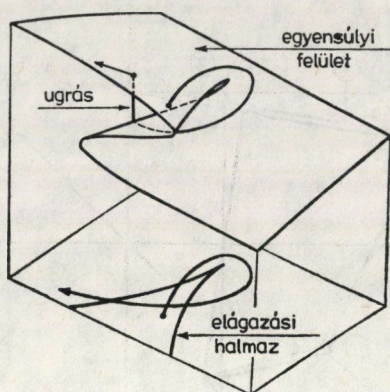
$$2. \left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= c\lambda_0 - 3p^2/2 \\ \varepsilon_2 &= \lambda_0 \varepsilon_3 + 2p^3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\varepsilon_3/(2c) &\leq p \leq 0, & \text{ha } \varepsilon_3 \geq 0 \\ 0 &\leq p \leq -\varepsilon_3/(2c), & \text{ha } \varepsilon_3 < 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$3. \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 / c \quad \varepsilon_1 \leq \lambda_0 c. \quad (27)$$

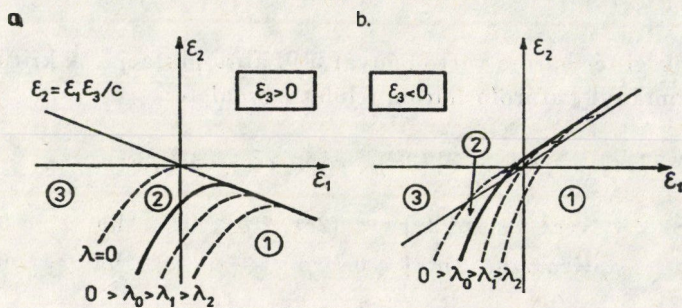
Megállapítható, hogy $\varepsilon_1 \geq 0$ esetében nincs a tökéletes szerkezet kritikus terhéknél kisebb kritikus teher, továbbá, ha $\varepsilon_2 = 0$ (illetve $\varepsilon_3 = 0$), akkor a kritikus tökéletlenségi tartománynak csak az $\varepsilon_3 = 0$ (illetve $\varepsilon_2 = 0$) esetben van pontja, és ekkor az ε_1 -től való függés a 2. ábra szerint alakul.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a (15) képletben $c_1 > 0$, vagyis standard csúcs van, de a (17) egyenletben $c < 0$, vagyis $\lambda < 0$ esetében a tökéletes szerkezet függvénye az 5. ábrán látható csúcs belsejében levő ponttal jellemezhető.

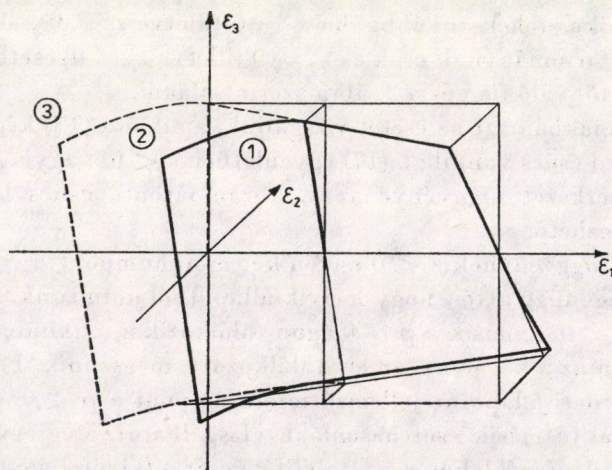
d1.2. A függvénynek $\lambda < 0$ esetén két minimumpontja volt, és a szerkezet érzékenysége függ attól, hogy melyik állapotból indultunk. Az egyik minimumpont a $p < 0$, a másik a $p > 0$ ágon találkozik a maximumponttal, és az ágon áthaladva az a két pont, amely találkozott, megszűnik. Feltesszük, hogy a szerkezet eredeti állapotát jellemző minimumpont a $p < 0$ ágon találkozik a maximummal (a másik eset hasonlóan vizsgálható). Megjegyezzük, hogy a csúcsból való kilépésnél lehet csak stabilitásvesztés (kivétel a csúcsponton való belépés), így például a 10. ábrán feltüntetett útnál a másik ágon lesz a stabili-



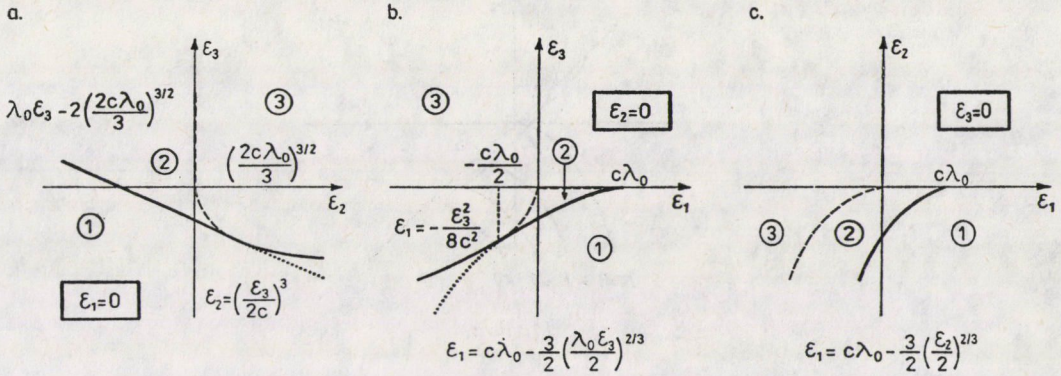
10. ábra



11. ábra



12. ábra



13. ábra

tásvesztés. Ilyen jellegű út esetünkben nem jöhet létre, így az 5. ábrán látható elágazási halmaznak a $p \leq 0$ felét kell csak vizsgálnunk.

e1.2) A (17)–(20) egyenletrendszer most is a (21), (22) felületre vezet, de csak a $p \leq 0$ felét kell vizsgálnunk és $c < 0$. Rögzített $\epsilon_3 > 0$ esetében a 11a. ábra, rögzített $\epsilon_3 < 0$ esetében a 11b. ábra mutatja a metszet változását. A p_i paramétert most is (24) adja meg. A tökéletlenségi tér három tartományát a 12. ábra szemlélteti. A kritikus tökéletlenségi tartományt most is a (25)–(27) felületek határolják, de a paraméterek korlátai a következők:

1. felület: $\epsilon_3 < 0$ és $\epsilon_1 > c\lambda_0 - 3\epsilon_3^2/(8c^2)$,
2. felület: $p < 0$, ha $\epsilon_3 \geq 0$,
 $p < -\epsilon_3/(2c)$, ha $\epsilon_3 < 0$,
3. felület: $\epsilon_3 > 0$ és $\epsilon_1 \geq c\lambda_0$.

A felületnek az $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ és $\epsilon_3 = 0$ síkkal való metszetét a 13. ábra mutatja. A 13a. és 13b. ábrán van egy-egy λ_0 -tól független parabola, melyet egy λ_0 -tól függő egyenes, illetve görbe érint.

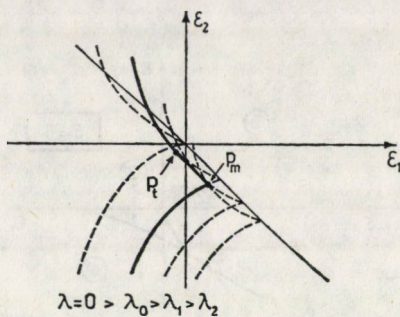
A következőkben a duális csúcs esetét tárgyaljuk ($c_1 < 0$ a (15)-ben).

b2) A duális csúcsonál is (19) és (20) adja meg az elágazási halmazt, de az 5. ábrán a minimum és maximum szó felcserélendő. Az elágazási halmaz oldalán a minimumpontok száma különbözik.

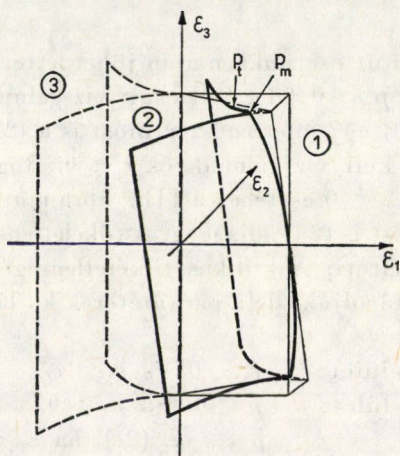
c2) A kinyitási térben csak a csúcson belül van minimumpont. A tökéletes szerkezetnél ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) $b = 0$, így $\lambda < 0$ esetében negatív a értéket kell kapni, tehát $c < 0$ kell, hogy legyen.

d2) Az elágazási halmaz első keresztezésekor megszűnik a minimumpont.

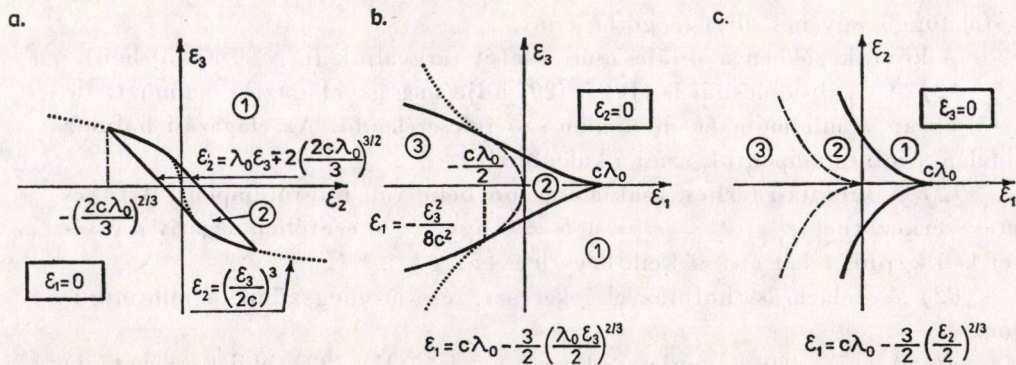
e2) A (17)–(20) egyenletrendszer most is a (21), (22) felületre vezet, de most p minden értékét vizsgálni kell és $c < 0$.



14. ábra



15. ábra



16. ábra

A 14. ábra rögzített $\varepsilon_3 > 0$ esetében tünteti fel a metszet változását. A p_t paramétert most is (24) adja meg, a metszéspont p_m paraméterét az

$$\frac{\varepsilon_3}{c} = \frac{\varepsilon_2(p_m) - \varepsilon_2(p_t)}{\varepsilon_1(p_m) - \varepsilon_1(p_t)}$$

feltételből határozzuk meg. Felhasználva a (21) és (22) egyenletet,

$$p_m = \frac{\varepsilon_3}{3c}.$$

A tökéletlenség-tér három tartományát a 15. ábra szemlélteti. A kritikus tökéletlenségi tartományt határoló felületek egyenleteit a (25) és (26) képletek mutatják, de a paraméterek korlátai a következők:

$$(25) \text{ képletnél } c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2/(8c^2) \leq \varepsilon_1 \leq c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2/(32c^2),$$

$$(26) \text{ képletnél } p_t < p < p_m, \text{ ha } \varepsilon_3 \geq 0,$$

$$p_m < p < p_t, \text{ ha } \varepsilon_3 < 0.$$

A felületnek az $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ és $\varepsilon_3 = 0$ síkkal való metszetét a 16. ábra mutatja. A 16a. és 16b. ábrán van egy-egy λ_0 -tól független parabola, melyet két λ_0 -tól függő egyenes, illetve görbe érint.

5. Hiperbolikus köldök katasztrófa

A hiperbolikus köldök katasztrófa egy kanonikus alakja

$$f(u, v, a, b, c) = u^3 + v^3 + auv + bu + cv. \quad (28)$$

a) THOMPSON és HUNT munkáinak [8, 9, 10] megfelelően csak a következő alakú potenciálfüggvénnyel foglalkozunk:

$$V' = c_1 \hat{y}^3 + c_2 \hat{x}^2 \hat{y} - \tilde{\lambda} (c_3 \hat{x}^2 + c_4 \hat{y}^2) + \hat{\varepsilon}_1 \hat{x} + \hat{\varepsilon}_2 \hat{y}, \quad (29)$$

ahol $\hat{x}$ és $\hat{y}$ a két aktív általánosított koordináta, $c_1 c_2 \neq 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$. Hiperbolikus köldök esetében $c_1 c_2 > 0$. Az

$$\begin{aligned} \hat{x} &= c_1^{-1/3} c_3^{-1/2} c_4^{1/2} x, & \hat{\varepsilon}_1 &= c_1^{1/3} c_3^{1/2} c_4^{-1/2} \varepsilon_1, \\ \hat{y} &= c_1^{-1/3} y, & \hat{\varepsilon}_2 &= c_1^{1/3} \varepsilon_2, \\ \tilde{\lambda} &= c_1^{2/3} c_4^{-1} \lambda, & A &= |c_1^{-1} c_2 c_3^{-1} c_4| \end{aligned} \quad (30)$$

normalizálás után (29)

$$V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y^3 + Ax^2y - \lambda(x^2 + y^2) + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y \quad (31)$$

alakú lesz. (28) és (31) ekvivalens, mert az

$$u = 2^{-1/3} \left(y - \sqrt{\frac{A}{3}} x - \frac{3+A}{6A} \lambda \right),$$

$$v = 2^{-1/3} \left(y - \sqrt{\frac{A}{3}} x - \frac{3+A}{6A} \lambda \right),$$

$$a = 2^{-1/3} (3 - A) \lambda / A, \quad (32)$$

$$b = 2^{-2/3} \left(\varepsilon_2 + \sqrt{\frac{3}{A}} \varepsilon_1 + \frac{(3+A)(1-A)}{4A^2} \lambda^2 \right), \quad (33)$$

$$c = 2^{-2/3} \left(\varepsilon_2 - \sqrt{\frac{3}{A}} \varepsilon_1 + \frac{(3+A)(1-A)}{4A^2} \lambda^2 \right) \quad (34)$$

transzformációkkal ([11]):

$$f(u, v, a, b, c) = V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b) A (28) hiperbolikus köldök esetében a kinyitási tér háromdimenziós, az elágazási halmaz parametrizált alakja ([5] 185. o.):

$$a = 6p, \quad (35)$$

$$b = -3p^2(2q^{-1} + q^2), \quad (36)$$

$$c = -3p^2(2q + q^{-2}). \quad (37)$$

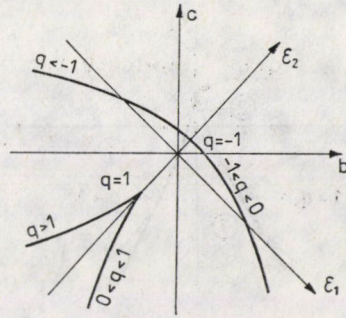
A 17. ábra mutatja a halmaznak egy $a = \text{const} \neq 0$ síkkal való metszetét. A 18. ábra szemlélteti, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stationárius pontok vannak. Az elágazási halmaznak csak a fele olyan, amelynek két oldalán különböző a minimumpontok száma. E félnek paramétertartománya: $pq > 0$.

c) Ha $A = 3$, akkor a mindig nulla. Ez nem univerzális kinyitás [10, 11], ezért ezt az esetet nem vizsgáljuk. A tökéletes szerkezetnél ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) $b = c$. $\lambda < 0$ esetében csak akkor van minimumpont, ha

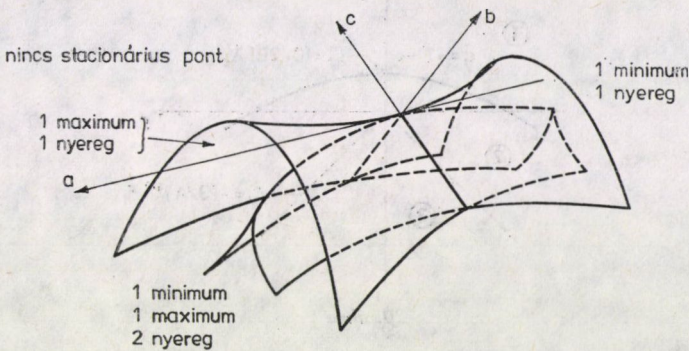
$$\text{vagy } a > 0 \text{ és } b < -a^2/4, \quad (38)$$

$$\text{vagy } a < 0 \text{ és } b < a^2/12. \quad (39)$$

Az $A > 3$ esetében a (38), $A < 3$ esetében a (39) feltétel teljesül.



17. ábra



18. ábra

d) Az elágazási halmaz érdekes felének első keresztezésekor megszűnik a minimumpont. A c) pont, a (35) egyenlet és a $pq > 0$ feltétel alapján $A > 3$ esetében a $p > 0, q > 0$; $A < 3$ esetében a $p < 0, q < 0$ paramétertartomány-nyal leírt felületrész veendő figyelembe.

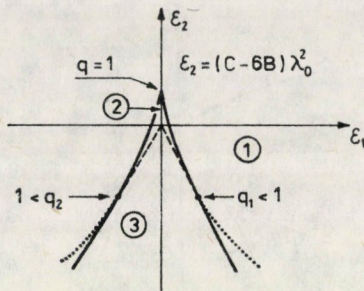
e) A (32)–(37) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a, b, c és p változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= B(A/3)^{1/2}(-q^2 + 2q - 2q^{-1} + q^{-2})\lambda^2, \\ \varepsilon_2 &= (C - B(q^2 + 2q + 2q^{-1} + q^{-2}))\lambda^2,\end{aligned}\quad (40)$$

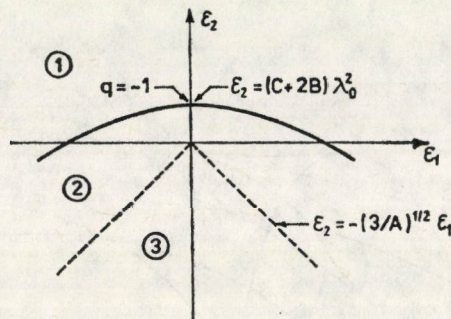
ahol

$$B = \frac{(3 - A)^2}{24A^2}, \quad C = \frac{(3 + A)(A - 1)}{4A^2}.$$

Rögzített $\lambda = \lambda_0$ esetében a (40) és a (41) egyenlet a 17. ábra lineárisan torzított változatát adja, ahol az origó is el van tolva az ε_2 tengelyen. A λ_0 változtatásával a pontoknak az origótól való távolsága a λ_0^2 -tel arányosan változik. A tökéletlenségi tér három tartományát $A > 3$ ($q > 0$) esetében a 19. ábra,



19. ábra



20. ábra

$A < 3$ ($q < 0$) esetében a 20. ábra mutatja. A q_1 és $q_2 (= q_1^{-1})$ paramétert az

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{d\varepsilon_1}{dq} \right) \left(\frac{d\varepsilon_1}{dq} \right)^{-1}$$

feltételből lehet meghatározni. Felhasználva a (40) és a (41) egyenletet, (42) a

$$q^2 + \left(1 - \frac{C}{2B} \right) q + 1 = 0$$

másodfokú egyenletre vezet, melynek gyökei q_1 és q_2 . A 19. és a 20. ábrán a két-két félegyenes független λ_0 értékétől.

6. Elliptikus köldök katasztrófa

Az elliptikus köldök katasztrófa egy kanonikus alakja

$$f(u, v, a, b, c) = v^3 - 3u^2v + a(u^2 + v^2) + bu + cv. \quad (43)$$

a) THOMPSON és HUNT munkáinak megfelelően itt is a (29) alakú függvényrel foglalkozunk. Elliptikus köldök esetében $c_1 c_2 < 0$. A (30) normalizálás

után

$$V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y^3 - Ax^2y - \lambda(x^2 + y^2) + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y \quad (44)$$

alakú lesz. (43) és (44) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned} u &= (A/3)^{1/2}x, \\ v &= y + (3 - A)/(6A)\lambda, \\ a &= -(A + 3)/(2A)\lambda, \end{aligned} \quad (45)$$

$$b = (3/A)^{1/2}\varepsilon_1, \quad (46)$$

$$c = \varepsilon_2 + (A + 1)(3 - A)/(4A^2)\lambda^2 \quad (47)$$

transzformációkkal ([11]):

$$f(u, v, a, b, c) = V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b) A (43) elliptikus köldök esetében a kinyitási tér háromdimenziós, az elágazási halmaz parametrizált alakja ([5] 183. o.):

$$\begin{aligned} a &= a, \\ b &= 3^{-1}a^2(\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta), \end{aligned} \quad (48)$$

$$c = 3^{-1}a^2(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta). \quad (49)$$

A 21. ábra mutatja a halmaznak egy $a = \text{const} \neq 0$ síkkal való metszetét. A 22. ábra szemlélteti, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaznak csak a fele olyan, amelynek két oldalán különböző a minimumpontok száma. E félnek paramétertartománya $a \geq 0$.

c) A tökéletes szerkezetnél ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) $b = 0$. $\lambda < 0$ esetében csak akkor van minimumpont, ha

$$-a^2 < c < a^2/3.$$

Ez a feltétel minden $0 < A < \infty$ esetében teljesül.

d) Az elágazási halmaz első keresztezésekor megszűnik a minimumpont.

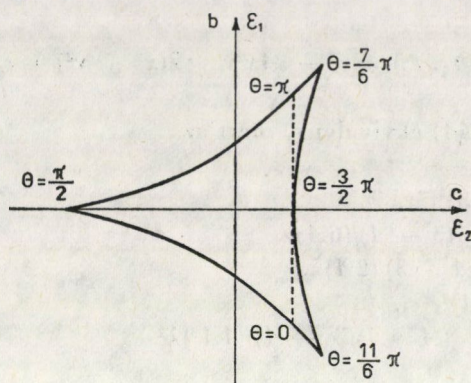
e) A (45)–(49) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a, b, c változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

$$\varepsilon_1 = B(A/3)^{1/2}(\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta)\lambda^2, \quad (50)$$

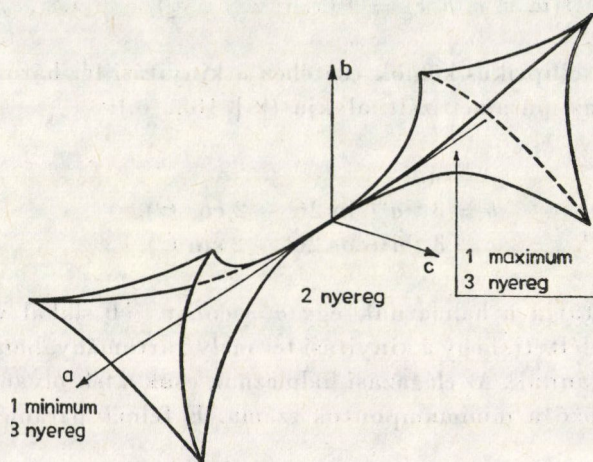
$$\varepsilon_2 = (C + B(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta))\lambda^2, \quad (51)$$

ahol

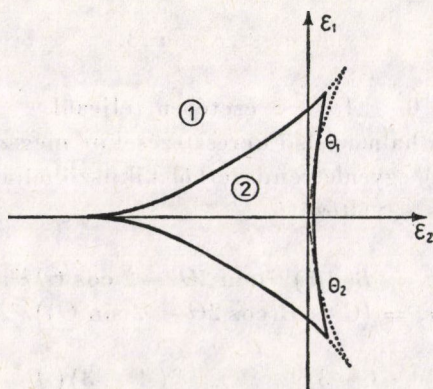
$$B = \frac{(A + 3)^2}{12A^2}, \quad C = \frac{(A - 3)(A + 1)}{4A^2}.$$



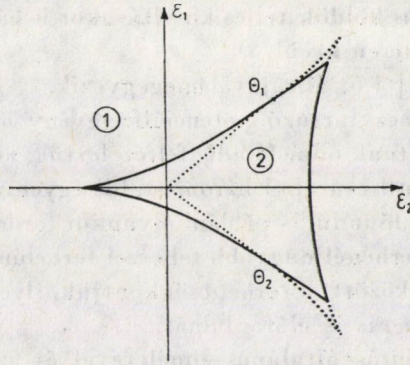
21. ábra



22. ábra



23. ábra



24. ábra

Rögzített $\lambda = \lambda_0$ esetében az (50) és az (51) egyenlet a 21. ábra lineárisan torzított változatát adja, ahol az origó is el van tolva az ε_2 tengelyen. A λ_0 változtatásával a pontoknak az origótól való távolsága a λ_0^2 -tel arányosan változik. A tökéletlenségi tér két tartományát $A > 3$ ($C > 0$) esetében a 23. ábra, $A \leq 3$ ($C \leq 0$) esetén a 24. ábra mutatja. Egyik esetben sincs olyan tökéletlenség, amelynek hatására ne csökkenne a tökéletes szerkezet kritikus terhe. A Θ_1 és $\Theta_2 (= \Pi - \Theta_1)$ paramétert a (42) feltételből lehet meghatározni. Felhasználva az (50) és (51) egyenletet [11] (33) képlete szerint

$$\Theta_1 = \arcsin(2A^2(A + 3)^{-2} - 1).$$

A 21. ábra szerint a $\Pi/2 < \Theta_1 < 3\Pi/2$ megoldást kell választanunk. A 23. és a 24. ábrán a két-két szakaszt tartó egyenesek függetlenek λ_0 értékétől.

7. Megjegyzések

A cikk célja kettős: egyrészt megadni a kritikus tökéletlenségi tartomány szerkesztésének szabályait, másrészt bemutatni a használatát a legfontosabb esetekben. A kritikus tökéletlenségi tartomány előnye a tökéletlenség-érzékenység felületekkel szemben az, hogy bár egy dimenzióval kevesebbet használ, mégis a másikkal hasonló információt szolgáltat.

A 2. ábrának megfelelő vizsgálat csak a teljesség kedvéért szerepel. Legjobban a kétdimenziós tartományok használhatók, ezért adjuk meg a háromdimenziós tartományok jellegzetes metszeteit. A háromdimenziós tartományok a szokásosnál több hatás figyelembevételét teszik lehetővé. Háromdimenziós tartományokkal jellemezhető az elliptikus és hiperbolikus köldök, ha egy új szétválasztó paramétert is számításba veszünk ([12]), vagy a gömbhéj feltétel teljesülése esetében univerzális kinyitásra törekszünk [10, 11]; valamint a fecs-

kefarok és a parabolikus köldök teljes kinyitásakor is három paraméterre van szükség a teherparaméteren kívül.

A 16a. ábra a [7] 4.6. ábrájával megegyezik.

A kritikus teherhez tartozó potenciálfüggvény önmagában nem jelzi, hogy milyen úton jutottunk oda. Mindig feltételeztük, hogy stabilis állapotból érkeztünk, de a standard csúcsból három stabil egyensúlyi út indul. A standard csúcs belsejéből való indulás például olyankor fordulhat elő, ha valamely szerkezetet a kritikus terhénél nagyobb teherrel terhelünk, majd (esetleg megváltozott körülmények között) a terhet csökkentjük. Ilyenkor lehet folyamatos állapotváltozás is, de ugrás is előfordulhat.

A rugalmas stabilitás általános elméletével és a katasztrófaelmélettel a University College London (J. M. T. THOMPSON és G. W. HUNT) és a University of Warwick-i (E. C. ZEEMAN, I. N. STEWART) tanulmányutaim alatt ismerkedtem meg. A kapott segítséget mind a négyüknek köszönöm.

IRODALOM

1. KOITER, W. T.: On the Stability of Elastic Equilibrium, Dissertation, Delft, Holland, 1945 (Angol fordítás, NASA, Tech. Trans. F10, 833, 1967)
2. THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W.: A General Theory of Elastic Stability, Wiley, London 1973
3. THOM, R.: Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, Reading 1972
4. ZEEMAN, E. C.: Catastrophe Theory: selected papers (1972—1977), Addison-Wesley, Reading Mass. 1977
5. POSTON, T.—STEWART, I. N.: Catastrophe Theory and its Applications, Pitman Publishing, London 1978
6. THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.: A Bifurcation Theory for the Instabilities of Optimization and Design, *Synthese* 36 (1977), 315—351
7. STEWART, I. N.: Applications of Catastrophe Theory to the Physical Sciences, Preliminary version of a survey paper prepared for *Physica (D: nonlinear phenomena)* (1980)
8. THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.: Towards a Unified Bifurcation Theory, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 26 (1975), 581—604
9. HUNT, G. W.: Imperfection-sensitivity of Semi-symmetric Branching, *Proc. R. Soc. London A* 357 (1977), 193—211
10. THOMPSON, J. M. T.—TAM, J. K. L.—LIM, K. C.: On the Topological Classification of Postbuckling Phenomena, *J. Struct. Mech.* 6 (4) (1978), 383—414
11. GÁSPÁR, Zs.: Computation of Imperfection-sensitivity at Two-fold Branching Points *ZAMM* 63 (1983), 359—370
12. HUNT, G. W.: Imperfections and Near-coincidence for Semi-symmetric Bifurcations, *Annals of the New York Academy of Sciences* 316 (1977), 572—589

Critical Imperfection Territory. — Under the effect of the unavoidable imperfection, the critical loading of the elastic structures may decrease. The critical imperfection territory is constituted by those imperfections in case of which the parameter of the critical load is less than the value prescribed. These territories should be determined on the basis of examining the potential function by making use of the results of the catastrophe theory. The general rules of the construction are described, therefore, in the most significant cases (fold, cusp, elliptic and hyperbolic umbilic catastrophe), also presents the actual critical imperfection territories. These give in a space less by one dimension information similar to the imperfection sensitivity surfaces.