

ADALÉKOK AZ EKVIVALENS LINEÁRIS REZGŐ RENDSZEREK FELÉPÍTÉSÉNEK MÓDSZEREIHEZ

PATKÓ GYULA*

[Beérkezett: 1982. február 6-án]

A dolgozat első része bemutatja a Panovko-féle direkt linearizálási módszer egy általánosítását és bevezeti a fázisgörbe feletti linearizálás módszerét. Az utóbbi módszer alapján javaslatot tesz a nemlinearitás mértékének egy definíciójára. A dolgozat második része elemzi a független változó transzformációjának szerepét a fázisgörbe feletti linearizálás esetében. Megmutatja, hogy több, a nemlineáris rezgések vizsgálatára használt módszernek szemléletes geometriai jelentése van.

Jelölések

m	tömeg
α	saját körfrekvencia
Ω	a gerjesztés körfrekvenciája
F	a gerjesztő erő amplitúdója
$g(x)$	nemlineáris rugókarakterisztika
$h(\dot{x})$	nemlineáris csillapítási karakterisztika
$f(x, \dot{x})$	nemlineáris jellegfelület
A	integrálási tartomány
s	fázisgörbe
$\varrho(x), \kappa(x, \dot{x})$	súlyfüggvények

Egyéb jelöléseket a szövegben értelmezzük.

1. Bevezetés

1.1 A mérnöki gyakorlat a korábbi évtizedekben általában arra törekedett, hogy az előforduló lengésjelenségeket olyan lineáris dinamikai modell segítségével írja le, amelynek mozgásegyenlet-rendszere állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer. Az ilyen jellegű munkák során szerzett sok évtizedes tapasztalat megtanította a mérnököket arra, hogy az ilyen modellezés közben elkerülhetetlen kisebb-nagyobb elhanyagolások, közelítések a gyakorlati élet számos területén — legalább első közelítésben — megengedhetők.

A gépek és szerkezetek iránti igények fokozódásával azonban egyre több esetben vált nyilvánvalóvá, hogy az ilyen típusú dinamikai modellek a jelenségeknek egy részét még azon a tartományon belül sem képesek elfogadható pontossággal leírni, amely a műszaki gyakorlat számára értékes. Ezért az idő múlásával egyre inkább előtérbe került a nemlineáris dinamikai modellek

* Patkó Gyula, 3529 Miskolc Középszer u. 60, IV. 3.

alkalmazásának és az ezek vizsgálatára alkalmas matematikai módszerek kidolgozásának szükségessége. Nagymértékben elősegítette a nemlineáris modellek használatát az utóbbi 2—3 évtizedben a modern számítástechnikai eszközök elterjedése.

Nagy nehézséget jelent a nemlineáris modell vizsgálatokor az a körülmény, hogy a tulajdonságait leíró nemlineáris differenciálegyenletek elmélete még az egyváltozós másodrendű esetben sincs általánosan kidolgozva, bár számos értékes részeredmény már napvilágot látott. Sajnos, olyan zárt alakú egzakt megoldások, mint amilyenek az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek esetén rendelkezésre állnak és a rezgő rendszer tulajdonságairól gyors és pontos áttekintést adnak, a nemlineáris differenciálegyenleteknél csak kivételes esetekben ismeretesek. Lehetségesek végtelen sor vagy végtelen iterációs sorozattal előállítható megoldások, ezek azonban többnyire nélkülözik a mérnök számára szükséges gyors áttekinthetőséget.

1.2 A műszaki gyakorlatnak mindig az a kényszerű igénye, hogy felvetődő problémáira a fenti nehézségek ellenére is találjon valamilyen műszakilag elfogadható megoldást. Ezért alakultak ki — zömmel az utóbbi évtizedekben, de bizonyos gyökereket tekintve LAGRANGE-ig visszavezethetően — olyan úgynevezett mérnöki módszerek is, amelyek szigorú matematikai megalapozása sok esetben hiányos (vö. [12], 115. o.). Éppen ezért a szokásosnál élesebben vetődik fel az eredmények ellenőrzésének kérdése.

1.3 Áttekintve a műszaki gyakorlatban ma használatos módszereket megállapítható, hogy azoknak alapját — közvetlenül vagy közvetve — az esetek nagy részében valamilyen sorozatos közelítés képezi. A teljesség igénye nélkül két ilyen eljárást érdemes egymással szembeállítani:

a) Ma már hatékony számítógépi programok állnak rendelkezésre a mozgásegyenletek *numerikus* megoldására, amelyek rögzített kezdeti feltételekhez korábban el sem képzelhető pontossággal előállítják a nemlineáris differenciálegyenlet megoldását. Az eljárásnak kétségtelen előnyei (pl. nagyfokú pontossága) mellett hátránya, hogy csak diszkrét megoldás előállítására képes és sok esetben — különösen gyengén csillapított rendszerek esetén — költséges [6].

b) A mérnöki gyakorlatban sokszor szükség van a megoldások olyan halmazának vizsgálatára, amelynek alapján áttekinthető, hogy a megoldások milyen függvényei a műszaki paramétereknek. Ez a feladat elvileg az említett végtelen sorozat analitikus előállítását kívánná meg. E követelmény tökéletes teljesítése a közismert nehézségekbe ütközik. Ilyen módszerek mégis elterjedten használatosak, és ez annak a gyakorlati tapasztalatnak a következménye, amely szerint a nemlineáris dinamikai jelenségek tulajdonságaira sokszor a közelítések első lépései rávilágítanak, esetenként már az első lépés is jelentős információkat szolgáltat.

1.4 Van az analitikusnak minősíthető eljárásoknak egy csoportja, amelyek nem sorolható a fokozatos közelítések kategóriájába. Ezek a *linearizálási*

módszerek. Nem törekszenek pontos megoldásra, csupán a megoldásoknak a gyakorlatban jól használható első közelítését kívánják előállítani úgy, hogy az eredeti nemlineáris mozgásegyenlethez valamilyen megfontolással egy — általában ekvivalensnek nevezett — lineáris differenciálegyenletet rendelnek hozzá. A hozzárendelésnek mindig az a célja, hogy az ilyen módon linearizált mozgásegyenlet egyik megoldásával az eredeti nemlineáris mozgásegyenlet keresett megoldását lehetőleg jól közelítsük. A linearizálás végrehajtása arra vezet, hogy a nemlineáris mozgásegyenletben szereplő nemlineáris függvények x és \dot{x} -től függő tagjait ezen változók lineáris függvényeivel helyettesítjük. A linearizálásnak számos változata alakult ki ([1], [4], [5], [16], [18], [23]).

Meg kell említeni, hogy a sorozatos közelítést alkalmazó módszerek között is vannak olyanak, amelyek első lépésüket tekintve egy-egy linearizálási módszerrel egyenértékűek, de tárgyalásmódjuk a nem matematikus szemléletű mérnökök számára olykor nehezen áttekinthető.

1.5 A fentiekben vázolt mérnöki módszereknek matematikai szemmel nézve bizonyára több hiányossága van. Ezek közül a teljesség igénye nélkül kettőt megemlítünk:

a) A mérnöki gyakorlat igényei az esetek túlnyomó többségében periodikus megoldások vizsgálatára szorítkoznak, többnyire a nélkül, hogy a periodikus megoldások létezésének feltételeit elméleti úton megvizsgálják. A mérnök az ilyen természetű matematikai vizsgálatokat sok esetben a gyakorlatból vett tapasztalattal helyettesíti.

b) Annak eldöntésére, hogy az előállított „közelítő” megoldás mennyiben közelíti az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet keresett megoldását, általában további vizsgálatokra van szükség. Vannak esetek, rendelkezésre állnak a hiba becslésére alkalmas matematikai módszerek (vö. [8], [13], [14], [21], [25]), más esetekben ezek ma még hiányoznak. A mérnök nagyon sok esetben nem tekinti feladatának ilyen matematikai módszerek kidolgozását, hanem megelégszik azzal, hogy közelítő eredményeit vagy közvetlenül a tapasztalattal, vagy más, a szakirodalomban már elfogadott eredményekkel veti egybe.

1.6 Jelen dolgozat a PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszerre épül. A módszert 1952-ben [15] publikálta orosz, majd [1] angol nyelven. Számos további munka (pl.: [2], [3], [16], [17], [22], [23]) — amelyek egyrészt a módszerrel elérhető eredményekről, másrészt a módszer finomítását célzó gondolatokról számolnak be — bizonyítja, hogy ez az eljárás ismertté és népszerűvé vált. A hivatkozott munkák ismeretében azonban az is kiderül, hogy a Panovko-féle eljárásnak — a mérnök számára egyébként szimpatikus tulajdonságai mellett — fogyatékoságai is vannak.

A jelen dolgozatnak az a törekvése, hogy az eljárást javítsa.

Az irodalomban a módszert egymástól matematikailag különválasztott nemlineáris rugó, illetve csillapítási karakterisztikák esetén használják. Jelen

dolgozat általánosítja a módszert olyan rugó-csillapítás jellegfelület esetére, amely nem bontható fel önálló (csak helytől függő) rugókarakterisztika és (csak sebességtől függő) csillapítási karakterisztika együttesére.

Ez az általánosítás mindenekelőtt azt a kérdést veti fel, hogy hogyan kell a Panovko-féle eljárásban lényeges szerepet játszó hibakiegyenlítést az általános esetben értelmezni. Ennek számos módja lehetséges. Ezek közül az egyik a jelen dolgozatban ismertetett fázisgörbe feletti kiegyenlítés. Ezt az eljárást a továbbiakban *a fázisgörbe feletti linearizálás* módszerének nevezzük. A dolgozat ezzel kapcsolatban igyekszik megmutatni az alábbiakat:

— Az eljárás kézenfekvő és szemléletes utasítást ad a linearizálás végrehajtására, és a kapott eredmények az irodalomban általánosan elfogadott eredményekkel összhangban vannak.

— Segítségével kimutatható, hogy több, széles körben használt más módszernek is szemléletes geometriai jelentése van.

— Bevezethető a nemlinearitás mértékének egy olyan definíciója, amely az irodalomban ismert definícióknál általánosabb és a tapasztalattal inkább összhangban van.

Jelen dolgozatban a fázisgörbe feletti linearizálás módszerét egy szabadságfokú mechanikai rendszerekkel kapcsolatban tárgyaljuk, bár maga a módszer több szabadságfokú rendszerek esetében is alkalmazható.

2. Előzmények

2.1 A PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszer az

$$m\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (2.1)$$

nemlineáris mozgásegyenlethez egy lineáris

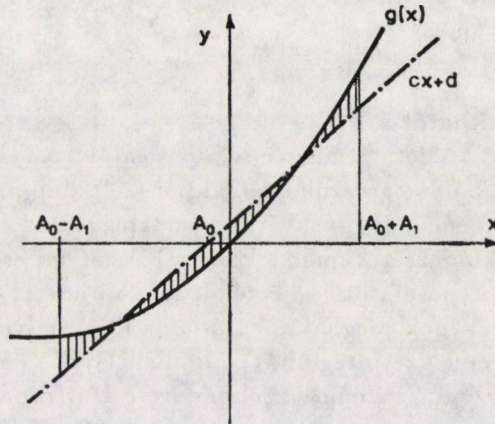
$$m\ddot{x} + cx + d = 0 \quad (2.2)$$

alakú differenciálegyenletet rendel hozzá. A módszernek az itt leírt gondolatmenete egy kicsit eltér a szokásos (vö. [1], [2], [15], [16]) tárgyalásmódtól. Jelen gondolatmenet azonban a továbbiak szempontjából célszerűbbnek látszik. Bevezetve az $\alpha^2 = c/m$ jelölést, a (2.2) általános megoldása

$$x = A_0 + A_1 \cos(\alpha t - \vartheta_1)$$

alakban írható. Az A_0 a

$$cA_0 + d = 0 \quad (2.3)$$



1. ábra

összefüggésből adódik, A_1 és θ_1 pedig a kezdeti feltételektől függő állandók. A c és d mennyiségek abból a feltételből határozhatók meg, hogy az

$$r(x) = g(x) - (cx + d) \quad (2.4)$$

eltérések (1. ábra) négyzetintegrálja az $[A_0 - A_1; A_0 + A_1]$ intervallumon minimális legyen. Így az

$$I_1 = \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} [g(x) - (cx + d)]^2 dx \stackrel{!}{=} \text{minimum} \quad (2.5)$$

feltételből a $\partial I_1 / (\partial c) = 0$ és $\partial I_1 / (\partial d) = 0$ összefüggések alapján a

$$c = \frac{3}{2A_1^3} \left[\int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx - A_0 \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx \right] \quad (2.6)$$

és

$$d = \frac{1}{2A_1} \left[\left(1 + 3 \frac{A_0^2}{A_1^2} \right) \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx - 3 \frac{A_0}{A_1^2} \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx \right] \quad (2.7)$$

kifejezéseket kapjuk. Ha (2.6)-ot és (2.7)-et a (2.3)-ba helyettesítjük, azt kapjuk, hogy az A_0 és A_1 állandók között fenn kell állnia az

$$\int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx = 0 \quad (2.8)$$

összefüggésnek. Ez azt jelenti, hogy az $A_0 + A_1$ és az $A_0 - A_1$ helyeken a (2.1) rendszer potenciális energiái megegyeznek. Így a c és d állandók a

$$c = \frac{3}{2A_1^3} \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx \quad (2.9)$$

és

$$d = c A_0 \quad (2.10)$$

kifejezésekből számíthatók.

2.2 Ha az $A_0 = A_0(A_1)$ függvénykapcsolatot (2.8)-ból, c és d értékeit pedig (2.9) és (2.10)-ből határozzuk meg, akkor (2.2) alapján a (2.1) rezgő rendszer amplitúdó-frekvencia függvényére — a tapasztalat szerint — általában nagyon pontatlan kifejezést kapunk. Ezért [15] azt javasolja, hogy az $A_0 = A_0(A_1)$ függvénykapcsolatot és d értékét továbbra is (2.8), illetve (2.10)-ből számítsuk, de c értékének meghatározásához a (2.4) helyett az $r(x)\rho(x - A_0)$ súlyozott eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk, ahol $\rho(x)$ alkalmasan választott súlyfüggvény. Például az előfeszített Duffing-rendszer rezgésének periódusideje [3] szerint $\rho(x) = x$ választásával 5%-nál kisebb hibával határozható meg.

2.3 A $g(x)$ nemlineáris karakterisztika ismeretében a $\rho(x)$ súlyfüggvény megválasztható olyan módon, hogy a (2.2)-ben szereplő c paraméter optimális legyen [23]. A súlyfüggvények úgy is megválaszthatók, hogy a kapott c értékek más linearizálási módszerek eredményeivel egyezzenek meg [23], [17]. Ezért [17] a Panovko-féle direkt linearizálási módszert a többi linearizálási módszer általánosításaként kezeli.

2.4 A direkt linearizálás módszerének a 2.1 pontban vázolt alapfogólata gerjesztett rendszerek, többszabadságfokú csillapításmentes rendszerek [15] és $h(x)$ alakú nemlineáris csillapítást tartalmazó rendszerek [22] esetében is használható.

2.5 A direkt linearizálási módszer számos gyakorlati rezgéstani feladat megoldásában eredményesen alkalmazható [1], [17]. Nagy előnye, hogy egyszerű, és szemléletes geometriai jelentése van.

3. A direkt linearizálási módszer egy általánosítása

3.1 A gyakorlatban olyan nemlineáris rezgések is előfordulnak, amelyek mozgásegyenletében szereplő $f(x, \dot{x})$ nemlinearitásra fennáll, hogy

$$f(x, \dot{x}) \neq f(x) + h(\dot{x}),$$

tehát nem bontható fel egy csak helytől és egy csak sebességtől függő tag összegére. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszer ebben az esetben is alkalmazható, de általánosabb alakban kell megfogalmazni.

Az általánosítást a harmonikusan gerjesztett rezgések esetére mutatjuk be, de a módszer szabad rezgések esetében is használható.

Tekintsük azt a nemlineáris rezgő rendszert, amelynek mozgását az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \Omega t \quad (3.1)$$

mozgásegyenlet írja le. Rendeljük hozzá (3.1)-hez az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = F \cos \Omega t \quad (3.2)$$

lineáris differenciálegyenlettel leírható rezgő rendszert. A (3.2) állandósult rezgéseit leíró partikuláris megoldás az

$$x = a_0 + a_1 \cos(\Omega t - \vartheta_1) \quad (3.3)$$

alakba írható, ahol — mint ismeretes — az a_0 , a_1 és ϑ_1 állandók b , c és d ismeretében az

$$a_0 = -\frac{d}{c}, \quad (3.4)$$

$$a_1 = \frac{F}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{b\Omega}{c - m\Omega^2} \quad (3.6)$$

összefüggésekből számíthatók. A (3.3) alapján

$$\dot{x} = -a_1 \Omega \sin(\Omega t - \vartheta_1) \quad (3.7)$$

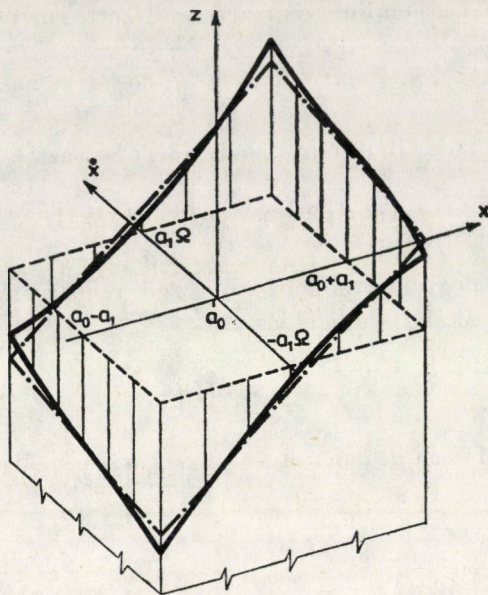
írható, ahol $a_1 \Omega$ a sebességamplitúdót jelenti.

A b , c és d mennyiségeket most úgy határozzuk meg, hogy az x , \dot{x} , z koordinátarendszerben a $z = f(x, \dot{x})$ jellegfelületet a $z = b\dot{x} + cx + d$ sík a $a_0 - a_1 \leq x \leq a_0 + a_1$; $-a_1 \Omega \leq \dot{x} \leq a_1 \Omega$ tartományon (2. ábra) elég jól közelítse. Ezért előírjuk, hogy a

$$q(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x}) - (b\dot{x} + cx + d)$$

különbség négyzetintegrálja a fenti A tartományon minimális legyen. Így az

$$I_2 = \iint_{(A)} [f(x, \dot{x}) - (b\dot{x} + cx + d)]^2 dx d\dot{x} \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$



2. ábra

feltételből a $\partial I_2 / (\partial b) = 0$, $\partial I_2 / (\partial c) = 0$, $\partial I_2 / (\partial d) = 0$ összefüggések alapján a

$$b = \frac{3}{4a_1^4 \Omega^3} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) \dot{x} dx d\dot{x}, \quad (3.8)$$

$$c = \frac{3}{4a_1^4 \Omega} \left[\iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x} - a_0 \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \right] \quad (3.9)$$

$$d = \frac{1}{4a_1^2 \Omega} \left[\left(1 + 3 \frac{a_0^2}{a_1^2} \right) \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} - 3 \frac{a_0}{a_1^2} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x} \right] \quad (3.10)$$

kifejezéseket kapjuk. A (3.9) és (3.10)-et a (3.4)-be helyettesítve az adódik, hogy az a_1 és a_0 között fenn kell állnia az

$$\iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = 0 \quad (3.11)$$

összefüggésnek. Így a c és d állandókra a (3.9) és (3.10)-ből a

$$c = \frac{3}{4a_1^4 \Omega} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x}, \quad (3.12)$$

$$d = -ca_0 \quad (3.13)$$

kifejezéseket kapjuk.

3.2 Ha $f(x, \dot{x}) = g(x)$, azaz a nemlinearitás olyan, hogy az \dot{x} -től nem függ, akkor (3.8)-ból $b = 0$, a (3.9)—(3.13)-ból pedig a (2.6)—(2.10) összefüggések adódnak. Ha az $f(x, \dot{x})$ nemlinearitás

$$f(x, \dot{x}) = g(x) + h(\dot{x})$$

típusú, azaz felbontható egy rugókarakterisztika és egy csillapítási karakterisztika összegére, akkor

$$\int_{-a_1\Omega}^{a_1\Omega} h(\dot{x}) d\dot{x} = 0 \quad (3.14)$$

feltétel teljesülése esetében a (3.9)—(3.13) összefüggésekből ismét a (2.6)—(2.10) kifejezések adódnak. Könnyen belátható, hogy ha a (3.14) tetszőleges $a_1\Omega$ esetben fennáll, akkor $h(\dot{x})$ páratlan függvény. Ebben az esetben a $h(\dot{x})$ csillapítási függvény a 2.1 pontban leírt elv alapján egy origón átmenő egyenessel közelíthető.

3.3 A 3.1 pontban elmondottak a 2.1 pontban vázolt direkt linearizálási módszer formális általánosításának tekinthetők. Minthogy a direkt linearizálási módszer 2.1 alatti formájában — azaz súlyfüggvények nélkül — alkalmazva igen megbízhatatlannak bizonyult, tulajdonképpen ugyanez várható a módszer fentiekben leírt általánosításától is.

A 2.2 pontban említett súlyfüggvények önkényesen választhatók meg. A 3.1 pontban leírt általánosítás pedig egy további önkényességet is tartalmaz. A 2.1 pontban kézenfekvőnek látszott, hogy a $g(x)$ függvényt az

$$A_0 - A_1 \leq x \leq A_0 + A_1$$

intervallumban közelítjük egyenessel. A 3.1 pontban szereplő kettős integrálok integrálási tartományául azért választottuk az

$$a_0 - a_1 \leq x \leq a_0 + a_1, \quad -a_1\Omega \leq \dot{x} \leq a_1\Omega$$

téglalapot, mert ilyen módon a 2.1 pont eredményei speciális esetként kiadódtak. Ez az első pillanatra talán tetszetős választás azonban semmilyen biztosítékot sem jelent a közelítés pontosságára nézve. Így az általánosítás során kapott eredmények két különböző úton is javíthatók.

A 3.1 pont eredményei — a 2.2 pontban leírtakhoz hasonlóan — súlyfüggvények segítségével módosíthatók. Ebben az esetben az $a_0 = a_0(a_1)$ függvényt és a d értékét továbbra is a (3.11) és (3.13)-ból számoljuk, c és b meghatározásához pedig a $q(x, \dot{x})$ helyett a $q(x, \dot{x})\kappa(x - a_0, \dot{x})$ súlyozott eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk. A $\kappa(x, \dot{x})$ súlyfüggvény alkalmas megválasztásához nyilván megfelelő tapasztalatra van szükség. Hangsúlyozzuk, hogy az ilyen módon elvégzett linearizálásnak — a tapasztalat szerint — az az előnye, hogy nagyon egyszerű számításokhoz vezet.

Másik lehetőségként kínálkoznék, hogy az $f(x, \dot{x})$ felületet a fentiekől eltérő tartományon közelíthetnénk egy $b\dot{x} + cx + d$ síkkal. Más tartományon közelítve, a kapott rezgés amplitúdó-frekvencia függvénye is más lesz. Ennek megfelelően esetleg található olyan tartomány, amelynél a b , c és d értékekhez tartozó (3.2) lineáris mozgásegyenlet megoldása a (3.1) által leírt rezgést a legjobban közelíti.

Úgy tűnik azonban, hogy a fenti megfontolások ugyanúgy, mint a nemlineáris rezgésstanban szokásos megfontolások jelentős része, sok önkényességet takarnak.

3.4 Az alábbiakban a kiegyenlítő sík megválasztására egy kevesebb önkényességet tartalmazó javaslatot teszünk. Az eljárás lényege az alábbiakban vázolt gondolatmenet során alakult ki. A fentiekben az $f(x, \dot{x})$ nemlineáris felületet az (x, \dot{x}) fázissík egy tartománya felett úgy közelítettük síkkal, hogy a 3.1-ben leírt közelítés során a jellegfelületnek egy tartomány feletti minden pontját figyelembe vettük, pedig egy konkrét periodikus megoldás során a felületnek csupán csak a fázisgörbe feletti görbéje „vesz részt” a mozgás kialakításában. Két különböző, egymástól erősen eltérő mechanikai rendszernek, amelyeknek például csak a fenti görbéje közös, megfelelő indítás mellett ez az egy mozgása pontosan azonos módon lehetséges. Ez a körülmény kényszerítően arra a gondolatra vezet, hogy egy konkrét mozgás vizsgálatakor a jellegfelületnek csak a fázisgörbe feletti görbáját szabad figyelembe venni a kiegyenlítő sík megválasztására felhasznált utasítás megszüvegezésekor.

Mivel azonban a valóban kialakuló mozgást nem ismerjük, eleve csak közelítéssel élhetünk. Minden olyan esetben, amelyben feltételezhető, hogy a valódi mozgás és az ekvivalens differenciálegyenlet által meghatározott mozgás elegendően közel állnak egymáshoz, megengedhetőnek látszik az a közelítés, hogy a valódi fázisgörbe helyett az ekvivalens mozgás fázisgörbáját vegyük figyelembe. E szerint a kiegyenlítő sík megválasztására a nemlineáris jellegfelületnek azokat a pontjait fogjuk felhasználni, amelyek a várható ekvivalens mozgás fázisgörbéje felett fekszenek. Kimutatható, hogy az ilyen módon közelített megoldás a szakirodalom által elfogadott és jónak minősített eredményekkel összhangban van. A módszer egyik előnye az, hogy a kiegyenlítő sík megválasztására adott utasítás szemléletes marad.

Az eljárás részleteivel a 4. és 5. pontban foglalkozunk.

4. Linearizálás a fázisgörbe felett

4.1 Tekintsük a (3.1) és (3.2) mozgásegyenleteket. A (3.2)-ben a b , c és d értékeket most úgy akarjuk meghatározni, hogy az $f(x, \dot{x})$ és a $b\dot{x} + cx + d$ felületek közötti eltérés a (3.2) megoldásának fázisgörbéje felett kicsi legyen.

Vezessük be a $\tau = \Omega t$ dimenzió nélküli időkoordinátát! Ekkor (3.1) és (3.2) az

$$m\Omega^2 x'' + f(x, \Omega x') = F \cos \tau, \quad (4.1)$$

$$m\Omega^2 x'' + b\Omega x' + cx + d = F \cos \tau \quad (4.2)$$

alakúvá lesz, ahol vessző a τ szerinti deriválást jelöli. A (4.2) állandósult rezgését

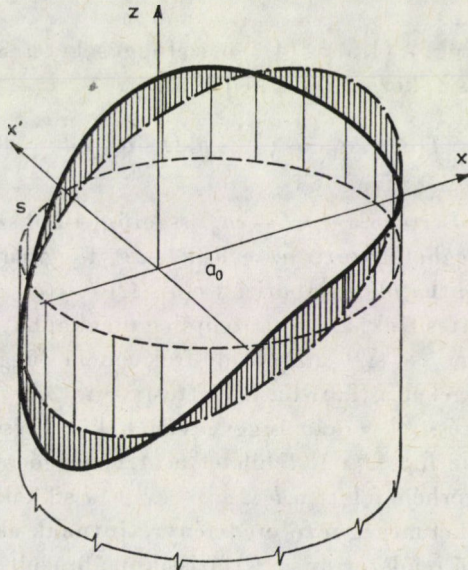
$$x = a_0 + a_1 \cos(\tau - \vartheta_1) \quad (4.3)$$

írja le, ahol b , c és d ismeretében az a_0 , a_1 , ϑ_1 állandók a (3.4)–(3.6) összefüggésekből számíthatók. A (4.3)-ból

$$x' = -a_1 \sin(\tau - \vartheta_1) \quad (4.4)$$

adódik. Mivel x és x' azonos dimenziójú, az $x - x'$ koordinátarendszerben értelmezhető az ívelem.

Ábrázoljuk az $f(x, \Omega x')$ jellegfelületet és az azt közelítő $b\Omega x' + cx + d$ síkot az (x, x') fázissík felett (3. ábra). A (4.3) és (4.4)-nek megfelelő s fázis görbe $(a_0, 0)$ középpontú, a_1 sugarú kör. A fölé emelt körhenger az $f(x, \Omega x')$ felületből a folytonos vonallal rajzolt térgörbét a $b\Omega x' + cx + d$ síkból pedig az eredményvonallal rajzolt ellipszist metszi ki. Rögzített a_0 , a_1 és Ω esetén azon b , c és d értékeket keressük, amelyeknél az ellipszis a térgörbét jól közelíti. A közelítésre többféle feltételt szabhatunk. Egyik lehetőség, hogy a henger-



3. ábra

palástnak a két görbe közé eső — az ábrán sraffozott — felületét minimalizáljuk. Előírhatjuk például, hogy az eltéréseknek a fázisgörbe felett vett négyzet-integrálja legyen minimális, azaz

$$J_1 = \oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum.}$$

A rövidebb írásmód kedvéért vezessük be a $\psi = \tau - \vartheta_1$ jelölést, és vegyük figyelembe, hogy az (x, x') fázissíkon a (4.3) és (4.4)-hez tartozó $ds = a_1 d\psi$. Így a

$$\frac{\partial J_1}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial d} = 0$$

feltételek alapján a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \Omega} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.5)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (4.6)$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi - \frac{a_0}{a_1 \pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (4.7)$$

összefüggéseket kapjuk. A (4.6) és (4.7) összefüggéseket a (3.4)-be helyettesítve, az adódik, hogy a_0 és a_1 között fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi = 0 \quad (4.8)$$

összefüggésnek. Így d értéke a $d = -ca_0$ összefüggésből számítható.

A (4.8)-ból meghatározott $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$ függvényt (4.5) és (4.6)-ba helyettesítve, kiszámíthatók a linearizált $b(a_1, \Omega)$ és $c(a_1, \Omega)$ mennyiségek. Ha ezeket (3.5)-be helyettesítjük, akkor közelítőleg megkaphatjuk a (3.1) nemlineáris rezgő rendszer $a_1 = a_1(\Omega)$ amplitúdó-frekvencia függvényét. A $b(a_1, \Omega)$ és $c(a_1, \Omega)$ mennyiségeket a (3.6)-ba helyettesítve a (3.1) nemlineáris rendszer $\vartheta_1 = \vartheta_1(\Omega)$ fáziseltérés-frekvencia függvényének közelítése számítható.

A fentiekben az $f(x, \Omega x')$ felületet a (4.2) rezgő rendszer (x, x') fázissíkon ábrázolt fázisgörbéje felett a $b\Omega x' + cx + d$ síkkal közelítettük. Belátható, hogy a fentiekkel megegyező eredményre jutnánk akkor is, ha az $f(x, \dot{x})$ felületet a (3.2) rezgő rendszer $(x, \dot{x}/\Omega)$ fázissíkon ábrázolt fázisgörbéje felett a $b\dot{x} + cx + d$ síkkal közelítenénk.

4.2 A 4.1 pontban leírtakat autonóm rendszerek periodikus megoldásainak közelítő előállítására is használhatjuk. Ebben az esetben az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.9)$$

nemlineáris mozgásegyenlethez az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0 \quad (4.10)$$

állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletet rendeljük hozzá. Az utóbbinak periodikus-megoldása csak $b = 0$ esetben van, de a továbbiak szempontjából hasznos, ha benne a b -t — mint paramétert — megtartjuk. A $b = 0$ esetben (4.10) általános megoldása

$$x = a_0 + a_1 \cos(\alpha t - \theta_1), \quad (4.11)$$

ahol a_1 és θ_1 a kezdeti feltételektől függő állandók, a_0 -ra pedig fennáll a

$$ca_0 + d = 0 \quad (4.12)$$

összefüggés. A (4.9) által leírt nemlineáris rezgés periodikus megoldásainak α körfrekvenciáját a (4.10) és (4.11) alapján közelítőleg az

$$\alpha^2 = \frac{c}{m} \quad (4.13)$$

kifejezésből számíthatjuk.

Vezessük be a $\tau = \alpha t$ dimenzió nélküli időkoordinátát. Így (4.9) és (4.10) az

$$\alpha^2 m x'' + f(x, \alpha x') = 0 \quad (4.14)$$

egyenlet

$$\alpha^2 m x'' + b \alpha x' + cx + d = 0 \quad (4.15)$$

alakúvá lesz, ahol a vessző a τ szerinti differenciálást jelöli. A (4.11) alapján

$$x = a_0 + a_1 \cos(\tau - \theta_1) \quad (4.16)$$

és

$$x' = -a_1 \sin(\tau - \theta_1) \quad (4.17)$$

írható. A 4.1 pontban leírtakhoz hasonlóan ábrázoljuk az $f(x, \alpha x')$ jellegfelületet az (x, x') fázissík felett (vö. 3. ábra). A (4.10), illetve (4.15)-ben szereplő b, c, d állandókat úgy határozzuk meg, hogy a (4.16) és (4.17)-hez tartozó s

fázisgörbe felett vett

$$\oint_{(s)} [f(x, \alpha x') - (bx' + cx + d)]^2 ds \quad (4.18)$$

vonaleintegrál minimális legyen. Így a 4.1 ponthoz hasonlóan a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \alpha} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.19)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (4.20)$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) d\psi - \frac{a_0}{a_1 \pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (4.21)$$

kifejezéseket kapjuk. A (4.20) és (4.21)-et a (4.12)-be helyettesítve pedig az adódik, hogy az a_0 és a_1 között az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) d\psi = 0 \quad (4.22)$$

összefüggésnek kell fennállnia.

A (4.22)-ből előállítható $a_0 = a_0(a_1, \alpha)$ függvényt a (4.20)-ba helyettesítve meghatározhatjuk a linearizált merevségek $c = c(a_1, \alpha)$ függvényét. Ezt a (4.13)-ba helyettesítve, az

$$m\alpha^2 = c(a_1, \alpha) \quad (4.23)$$

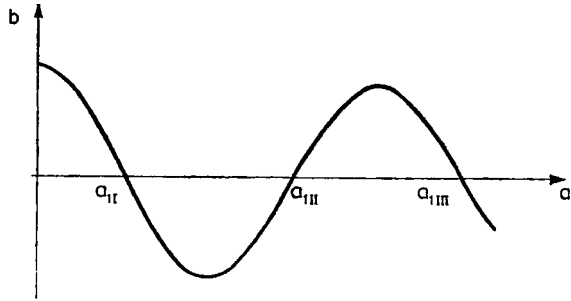
kifejezés adódik. Mivel a (4.10)-ből (4.11) alakú periodikus rezgéseket csak $b = 0$ esetben kapunk, a (4.19) alapján fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (4.24)$$

összefüggésnek. A (4.22)–(4.24) egyenletekből meghatározhatók azok az a_1 és α értékek, amelyeknél a fenti közelítés szerint a (4.9)-nek periodikus megoldása, vagy az (x, x') fázisíkon határciklusa lehetséges.

Ha a (4.23)-ból előállítható $\alpha = \alpha(a_1)$ függvényt a (4.19)-be helyettesítjük, akkor egy $b = b(a_1)$ egyváltozós függvényt kapunk (4. ábra). Ezen függvény zérushelyei adják a periodikus megoldások amplitúdóit. Közelítsük a

kiegyenlítő sík megválasztásakor a fázisgörbét b kis értékei esetében is a fenti a_1 sugarú körrel. Így a zérushelyek környezetében a $b(a_1)$ függvény viselkedéséből ([20] 92. o.) gondolatmenetét követve, a határciklus stabilitására következtethetünk. Könnyen belátható, hogy a 4. ábra szerint az a_{III} amplitúdó stabil. Ha az a_{III} kis környezetében $a_1 > a_{III}$, akkor a linearizált b csillapítási tényező



4. ábra

pozitív, és ez a (4.10)-ben az amplitúdók csökkenéséhez vezet. Ha pedig $a_1 < a_{III}$, akkor $b < 0$ és ez az amplitúdók növekedését vonja maga után. Hasonlóan látható be, hogy az a_{II} és a_{III} amplitúdójú periodikus megoldások instabilak.

Ha a (4.24) identikusan teljesül, akkor (4.23) a nemlineáris rezgő rendszer amplitúdó-frekvencia függvényét adja.

4.3 A rezgésstanban gyakran találkozunk olyan nemlineáritásokkal, amelyek a koordinátarendszer kezdőpontjára szimmetrikusak, azaz eleget tesznek az

$$f(x, \dot{x}) = -f(-x, -\dot{x}) \quad (4.25)$$

feltételnek. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben az

$$a_0 = 0$$

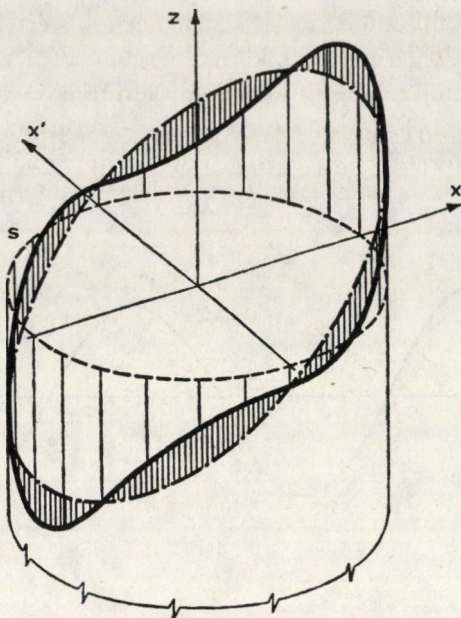
megoldása a (4.8)-nak. Így a (4.5)–(4.7) összefüggések a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \Omega} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (4.26)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi, \quad (4.27)$$

$$d = 0 \quad (4.28)$$

alakot öltik.



5. ábra

Autonóm rezgések vizsgálatakor — a 4.2 pontnak megfelelően — a (4.26), (4.27)-ben Ω helyébe α kerül.

A (4.25) típusú $f(x, \dot{x})$ nemlineáris jellegfelületből az (x, x') fázisgörbére emelt körhenger palástja olyan térgörbét metsz ki, amely a fentiek alapján az origón átmenő síkban fekvő ellipszissel közelíthető (5. ábra).

4.4 A 4.1 pontban leírt közelítés mértékének egyik jellemzője a hengerpaláston mért eltérések

$$M = \sqrt{\frac{1}{2\pi a_1} \oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds} \quad (4.29)$$

négyzetes integrálközepértéke. Ezen négyzetes integrálközepértékhez tartozó relatív hibát pedig az

$$e_r = \sqrt{\frac{\oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds}{\oint_{(s)} f^2(x, \Omega x') ds}} \quad (4.30)$$

összefüggés adja.

Autonóm esetben a (4.29), (4.30) összefüggésekben Ω helyébe α kerül.

A (4.30) összefüggést a nemlinearitás mértékének jellemzésére is használhatjuk. Lineáris $f(x, \dot{x})$ esetében e_r zérus. Gyengén nemlineáris $f(x, \dot{x})$ függvény

esetében az e_r nyilván a zérus közelében levő kis érték. Ebben az értelemben az e_r nagyságától függően beszélhetünk erősen nemlineáris és gyengén nemlineáris rezgő rendszerekről.

Az irodalomban (vö. [11] 147. o.) a nemlinearitás mértékének jellemzésére az

$$f(x, \dot{x}) = kx + \mu g(x, \dot{x}) \quad (4.31)$$

alakban felírt nemlineáris függvény esetében a μ dimenziótlan paramétert használják. Fontosnak tartjuk, hogy a nemlinearitás mértékének (4.30) definíciója olyan esetben is használható, amikor az $f(x, \dot{x})$ nemlineáris függvény nem bontható fel egyértelműen a (4.31) alakra.

4.5 Példaként vizsgáljuk meg, hogyan változik a nemlinearitás mértéke az

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon x^3 = 0 \quad (4.32)$$

autonóm Duffing-rendszer esetében. Most az

$$f(x, \dot{x}) = kx + \varepsilon x^3 \quad (4.33)$$

nemlineáris függvény az \dot{x} -től nem függ. A (4.32)-höz az

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (4.34)$$

lineáris mozgásegyenletet rendeljük hozzá. A $\tau = \alpha t$ bevezetésével (4.32) és (4.34) az

$$\begin{aligned} m \alpha^2 x'' + kx + \varepsilon x^3 &= 0 \\ m \alpha^2 x'' + cx &= 0 \end{aligned}$$

alakba írhatók. A vessző most is τ szerinti differenciálást jelent. A fenti mozgásegyenletek megoldását

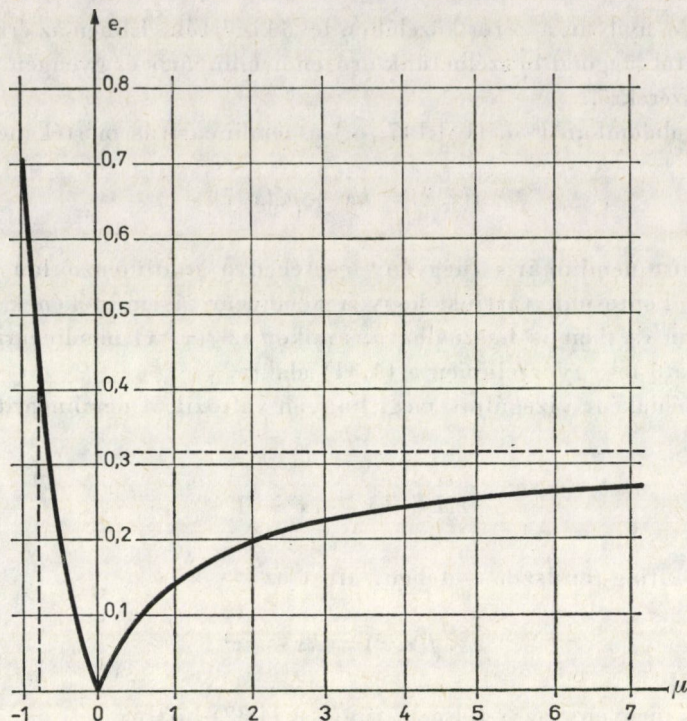
$$x = a \cos \psi \quad (4.35)$$

alakban keressük, ahol $\psi = \tau - \vartheta_1$. A (4.27)-ből

$$c = k + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 \quad (4.36)$$

adódik. A (4.33), (4.35), (4.36) kifejezéseket a (4.30)-ba helyettesítve, a

$$\mu = \frac{\varepsilon}{k} a^2$$



6. ábra

jelölés bevezetésével, az

$$e_r = \frac{|\mu|}{\sqrt{2(8 + 12\mu + 5\mu^2)}} \quad (4.37)$$

összefüggéshez jutunk. Az $e_r = e_r(\mu)$ függvényt a 6. ábrán szemléltetjük. Az ábrából is látható, hogy az olyan Duffing-rendszerek közül, amelyeknek (4.32) differenciálegyenletei csak az ε előjében különböznek, az $\varepsilon < 0$ -hoz tartozó erősebben nemlineáris, mint az $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó. Példaként az alábbiakra hivatkozunk.

WEIGAND (vö. [10] 43–50. o.) a (4.32) rendszert vizsgálva arra az eredményre jutott, hogy a $\mu = 2$ esetében a (4.32) mozgásegyenlet megoldása jobban hasonlít egy cosinus függvényhez, mint a $\mu = -0,8$ esetén kapott megoldás. Ez az eredmény a fentiekkel összhangban van. A 6. ábra szerint a $\mu = -0,8$ esetében a (4.32) rendszer erősebben nemlineáris, mint $\mu = 2$ esetében.

4.6 A 4.1 és 4.2 pontokban a b , c és d értékeket úgy határoztuk meg, hogy a hengerpalást által kimetszett térgörbét az ellipszis elég jól közelítse. Ebből a célból előírtuk, hogy a fázisgörbe felett az

$$f(x, \Omega x') - (b \Omega x' + cx + d) \quad (4.38)$$

különbség négyzetintegrálja — autonóm esetben a (4.18) — minimális legyen.

A fenti térgörbének ellipszisszel való közelítésére nyilván más feltételeket is szabhatunk. Előírhatjuk például, hogy a (4.38) eltérések *abszolút értékének* a fázisgörbe feletti vonalintegrálja legyen minimális. Azt is előírhatnánk, hogy a fázisgörbe felett a (4.38) eltérések közül az abszolút értékben legnagyobb legyen a minimális. Ezekben az esetekben várható, hogy a 4.1 és 4.2 pontokban kapottaktól eltérő eredményekre jutnánk.

Megemlítjük, hogy ha az $f(x, \dot{x})$ jellegfelületet közelítő síkot úgy választjuk meg, hogy a fázisgörbe feletti maximális eltérés legyen minimális, akkor nincs szükség a t független változó transzformációjára, azaz a τ dimenziótlan idő bevezetésére.

Az optimális linearizálás kapcsán a fent említett módszerek összehasonlítására IWAN és PATYLA [7] numerikus vizsgálatokat végzett. Arra a megállapításra jutottak, hogy a különböző kiegyenlítő módszerekkel kapott eredmények nem mutatnak lényeges különbséget. A számítások azonban akkor járnak a legkevesebb fáradtsággal, ha az eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk. Nyilván a 4.1 és 4.2 pontban leírtak esetében is hasonló eredmények várhatók.

A 4.1 és 4.2 pontban választott közelítésnek az egyszerűségeen túl az az előnye, hogy általa több, a nemlineáris rezgések vizsgálatára használt módszer geometriai szemléltetéséhez jutunk. Ennek vizsgálatára a 6. pontban visszatérünk.

5. A független változó transzformációjának szerepe a fázisgörbe feletti linearizálás esetében

5.1 A 4.1 és 4.2 pontokban az $f(x, \dot{x})$ jellegfelület közelítése előtt bevezettük a

$$\tau = \Omega t, \quad \text{illetve} \quad \tau = \alpha t \quad (5.1)$$

dimenzió nélküli időkoordinátát. Ilyen módon az (x, \dot{x}') fázissíkon értelmezhető az ívelem. Az (5.1) transzformációk azt is biztosítják, hogy az (x, \dot{x}') fázissíkon a fázisgörbe kör és ez a számításokat jelentősen leegyszerűsíti. A független változó fenti transzformációjának megválasztása önkényes. Más transzformációt is választhatunk.

5.2 Vezessük be a (3.1) és (3.2) mozgásegyenletekben a

$$\tau = \nu t$$

dimenzió nélküli időkoordinátát, ahol ν egyelőre ismeretlen állandó. Így (3.1) és (3.2) a

$$m \nu^2 x'' + f(x, \nu x') = F \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right), \quad (5.2)$$

$$m \nu^2 x'' + b \nu x' + cx + d = F \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.3)$$

alakba írható. A vessző ismét a τ szerinti differenciálást jelöli. Az (5.3) állandósult rezgéseit

$$x = a_0 + a_1 \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.4)$$

írja le, ahol b, c, d ismeretében az a_0, a_1, ϑ_1 állandók a (3.4)–(3.6) összefüggésekből számíthatók. Az (5.4)-ből

$$x' = -a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sin \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.5)$$

adódik. Az (x, x') fázissíkon az (5.4) és (5.5)-höz tartozó s fázisgörbe az

$$\left(\frac{x - a_0}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\nu x'}{a_1 \Omega} \right)^2 = 1$$

ellipszis. A fázisgörbére emelt elliptikus henger az $f(x, \nu x')$ felületet egy térgörbében, a $b \nu x' + cx + d$ síkot ellipsziszben metszi. A b, c és d értékeket úgy határozzuk meg, hogy a hengeralástnak a két görbe közé eső felszíne kicsi legyen. Ezért előírjuk, hogy a

$$J_2 = \oint_{(s)} [f(x, \nu x') - (b \nu x' + cx + d)]^2 ds \quad (5.6)$$

integrál értéke legyen minimális. Vezessük be a

$$\psi = \frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1$$

jelölést. Így (5.4) és (5.5) szerint az s fázisgörbe íveleme

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 - \nu^2}{\Omega^2} \sin^2 \psi} d\psi \quad (5.7)$$

alakú. Mivel az (5.6) integrál minimalizálása során elliptikus integrálokra jutunk, célszerű különválasztani a $\nu < \Omega$ és $\nu > \Omega$ eseteket. A

$$k^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^2, \quad p^2 = \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^2 - 1 \quad (5.8)$$

jelölésekkel (5.7) a

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad \text{ha } \nu < \Omega$$

és

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \text{ ha } \nu > \Omega$$

alakba írható. A

$$\frac{\partial J_2}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial d} = 0 \tag{5.9}$$

feltételek alapján a $\nu < \Omega$ esetben

$$b = -\frac{3}{4\Omega a_1} \frac{k^2}{(1 - k^2) F(k) - (1 - 2k^2) E(k)} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.10}$$

$$c = \frac{3}{4a_1} \frac{k^2}{(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.11}$$

$$d = -ca_0 \tag{5.12}$$

kifejezések adódnak, továbbá az a_0 és a_1 között fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi = 0 \tag{5.13}$$

összefüggésnek. Az $F(k)$ és $E(k)$ a k moduluszú első- és másodfajú teljes elliptikus integrálokat jelölik.

A $\nu > \Omega$ esetén az (5.9) feltételekből a

$$b = -\frac{3}{4\Omega a_1} \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2} \left[(1 + 2p^2) E\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \right]} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.14}$$

$$c = \frac{3}{4a_1} \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2} \left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) - (1 - p^2) E\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \right]} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.15}$$

$$d = -ca_0 \tag{5.16}$$

kifejezéseket kapjuk. Az a_0 és a_1 között pedig fenn kell állni az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = 0 \quad (5.17)$$

összefüggésnek.

Ismert ν esetén az (5.10)—(5.17) alapján kapott $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$, $b = b(a_1, \Omega)$, $c = c(a_1, \Omega)$ függvények segítségével előállíthatók a (3.1) nemlineáris rendszer $a_1 = a_1(\Omega)$ amplitúdó-frekvencia, illetve $\vartheta_1 = \vartheta_1(\Omega)$ fáziseltérés-frekvencia függvényének közelítő alakjai (vö. 4.1 pont).

Autonóm rendszer esetén a fenti összefüggésekben Ω helyére α kerül. A stabilis határciklusok a 4.2 pontban leírtakhoz hasonlóan kereshetők.

5.3 A ν értékét a fenti számítások során szabad paraméternek tekintettük. Rá nézve további előírásokat tehetünk. A linearizált $b(a_1, \Omega)$ csillapítási tényező és $c(a_1, \Omega)$ rugómerevség, továbbá az $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$ mennyiség — rögzített a_1 és Ω -nál — ν változtatásával változik. Ezért, ha a ν értékét helyesen választjuk meg, akkor a fenti eredmények pontosabbak lehetnek, mint a 4. pont eredményei (vö. 5.4 pont). Ilyen módon a ν szerepe a 2. és 3. pontban ismertett súlyfüggvények szerepéhez hasonlít.

Természetes, hogy a 2. és 3. pontban leírtakhoz hasonlóan a fentieket súlyfüggvény bevezetésével is módosíthatjuk. Ekkor az s fázisgörbe felett vett súlyozott eltéréseket minimalizálva, a b , c , d értékeket a

$$J = \oint_{(s)} \{ [f(x, \nu x') - (b\nu x' + cx + d)] \kappa(x, x') \}^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$

feltételből kapjuk.

Az 5.2 pont eredményei például a 4.1 pontban leírt gondolatmenetet felhasználva is megkaphatók, ha ott a

$$\kappa(x, x') = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\nu} (x - a_0) \right]^2 + x'^2} \quad (5.18)$$

súlyfüggvénnyel súlyozott eltéréseket minimalizáljuk az $(a_0, 0)$ középpontú a_1 sugarú kör felett. Arra a kérdésre, hogy a ν értékét hogyan kell jól megválasztani, a fent elmondottak nem adnak feleletet. A 4. pontban választott $\nu = \Omega$ és $\nu = \alpha$ értékek a számításokat jelentősen leegyszerűsítették. A számításoknak ez az egyszerű elvégezhetősége ν megválasztásának egyik szempontja is lehet.

5.4 Példaként közelítsük az

$$\ddot{x} + \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (5.19)$$

mozgásegyenletet az

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0 \quad (5.50)$$

állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlettel.

Most $f(x, \dot{x}) = \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3$, tehát az \dot{x} -től nem függ. Az $a_0 = 0$ megoldása az (5.13) és (5.17)-nek, amely azt jelenti, hogy a maximális kitérések az origóra szimmetrikusan helyezkednek el. Így $d = 0$ adódik.

A $b = 0$ esetben (5.20) általános megoldása

$$x = a_1 \cos(\alpha t - \vartheta_1), \quad (5.21)$$

ahol $\alpha = \sqrt{c}$, a_1 és ϑ_1 pedig a kezdeti feltételektől függő konstansok. Vezessük be a $\tau = \nu t$ dimenzió nélküli időkoordinátát. A τ szerinti deriváltat ismét vesszővel jelölve, (5.19) és (5.20) a

$$\nu^2 x'' + \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (5.22)$$

$$\nu^2 x'' + b \nu x' + cx = 0 \quad (5.23)$$

alakba írhatók. Az (5.21) az

$$x = a_1 \cos\left(\frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1\right) \quad (5.24)$$

alakot ölti, amelyből

$$x' = -a_1 \frac{\alpha}{\nu} \sin\left(\frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1\right). \quad (5.25)$$

Vezessük be a

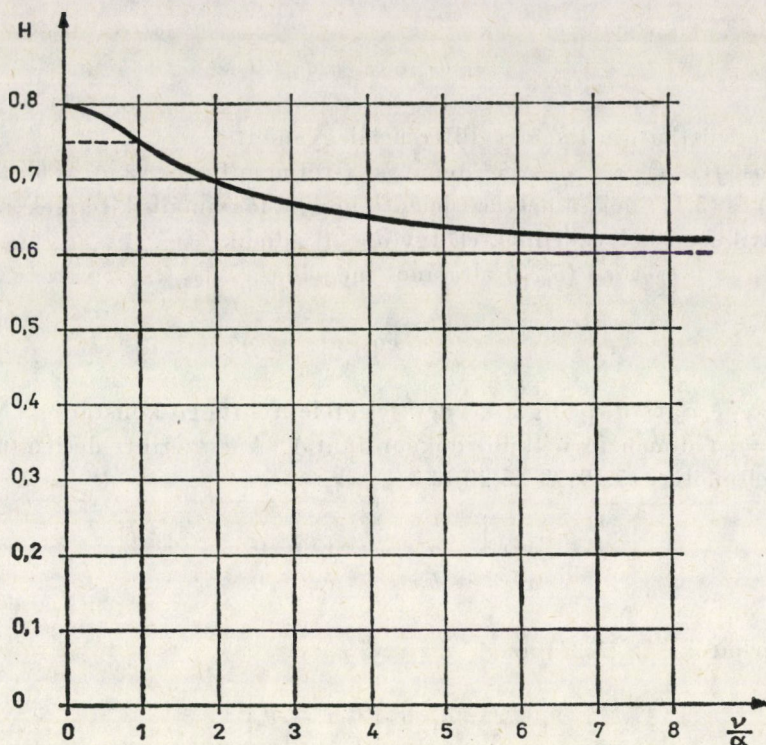
$$\psi = \frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1, \quad k^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2, \quad p^2 = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2 - 1 \quad (5.26)$$

jelöléseket. Mivel autonóm rendszert vizsgálunk, az (5.10)–(5.17) összefüggésekben Ω helyett α kerül. Az s pedig az (5.24) és (5.25)-höz tartozó fázisgörbe lesz. Így (5.10) és (5.14) szerint $b = 0$ adódik. Ez az eredmény nyilvánvaló, hiszen (5.19) konzervatív rendszert ír le. A $\nu < \alpha$ esetén (5.11)-ből

$$c = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{2(1-k^2)(1-3k^2)F(k) + (3k^4 + 7k^2 - 2)E(k)}{5k^2[(1+k^2)E(k) - (1-k^2)F(k)]}, \quad (5.27)$$

$\nu > \alpha$ esetén pedig (5.15)-ből

$$c = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{2(1+3p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) + (3p^4 - 7p^2 - 2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{5p^2\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - (1-p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]} \quad (5.28)$$



7. ábra

értékeket kapjuk [19]. Az (5.27), (5.28) összefüggéseket egyetlen összefüggésbe írva, az α saját körfrekvencia négyzetének közelítő értékére az

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 H \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) \quad (5.29)$$

kifejezést kapjuk. A $H(\nu/\alpha)$ értelmezése az (5.29) és az (5.26)—(5.28) egybevetéséből látható. A $H(\nu/\alpha)$ függvényt a 7. ábrán ábráztuk. Mivel ν értékét nem rögzítettük, rá vonatkozóan további előírást tehetünk. Megválaszthatjuk például úgy, hogy (5.29) az (5.19) saját körfrekvenciájának négyzetét minél jobban közelítse.

Például az $\alpha_0 = 0$ esetben $\nu/\alpha = 1$ -nél (5.29)-ből

$$\alpha^2 = 0,75 \varepsilon a_1^2$$

adódik. Az (5.19) mozgásegyenlet megoldása és a megoldás amplitúdó-frekvencia függvénye pontosan is előállítható. A pontos megoldás alapján $\alpha_0 = 0$ esetében az

$$\alpha^2 = 0,7178 \varepsilon a_1^2 \quad (5.30)$$

összefüggéshez jutunk (vö. [2] 85.). A fenti közelítő számítást alkalmazva, az (5.30) eredményt $\nu/\alpha = 1,5629$ esetén kapjuk.

Látható, hogy a független változó (5.1) transzformációi a számításokat jelentősen leegyszerűsítik. Az 5.2 pont alapján több fáradsággal pontosabb eredményeket kaphatunk, de a ν helyes megválasztásához megfelelő tapasztalatra van szükség.

5.5 Ha az 5.4 pontban tárgyalt feladatot a 4.2 pont gondolatmenetét követve az (5.18)-nál egyszerűbb

$$\kappa(x, x') = \sqrt{\left[\frac{\alpha}{\nu}(x - a_0)\right]^2 + x'^2}$$

súlyfüggvény felhasználásával oldjuk meg, akkor egyszerű számítások után az

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{5 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}{2 \left(3 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)}$$

kifejezést kapjuk. Az $\alpha_0 = 0$ esetben pontosnak tekinthető (5.30) összefüggést $\nu/\alpha = 1,2619$ választásánál kapjuk.

6. A fázisgörbe feletti linearizálás egybevetése néhány más módszerrel

6.1 Az idők folyamán kialakultak olyan kvantitatív módszerek, amelyek — vagy azok egyes változatai — lényegében azonos eredményekre vezetnek. Ezek kétfélék.

Az egyik csoportba tartozók a közvetlen linearizálásból indulnak ki. Ezek célja, hogy a nemlineáris differenciálegyenletet valamilyen módon lineáris differenciálegyenlettel helyettesítsék. Ilyen pl. a PANOVKO által javasolt direkt linearizálás módszere [15], a harmonikus linearizálás módszere [18], az ekvivalens, illetve optimális linearizálás módszere [4–6] stb. Ebbe a csoportba tartozik a fázisgörbe feletti linearizálás módszere is.

A másik csoport analitikus jellegű, többféle matematikai forrásból származik, és többnyire az az igényük, hogy magasabb rendű közelítéseket is előállítsanak. Ilyen pl. a Bubnov—Galerkin-módszer, a harmonikus egyensúly módszere [16], Poincaré perturbációs módszere [11], a Krülov—Bogoljubov-féle aszimptotikus módszer [20] stb. Az utóbbi eljárások első lépései általában — az irodalomban megszokott módon — megkonstruálhatók úgy, hogy az első csoport eredményeivel azonos vagy közel azonos eredményeket adnak. Ezek

a műveletek — mint ahogy arról esetenként egy-egy vizsgálat meg is győz (lásd 6.4 pont) — egy közvetlen linearizálással egyenértékűek.

Az elmondottak alapján a fázisgörbe feletti linearizálás jelentőségét első sorban abban látjuk, hogy

— több, a fenti osztályozás első csoportjába tartozó módszer geometriai jelentését adja,

— segítségével több, a második csoportba tartozó módszer első lépéséhez geometriai szemléltetés rendelhető.

A 6.2 és 6.4 pontokban példaként részletesen is bemutatjuk a fenti osztályozás egy-egy módszerének a fázisgörbe feletti linearizálással való egybevetését.

6.2 Számos feladat megoldásában eredményesen alkalmazzák a harmonikus linearizálás módszerét (vö. pl. [18]), amely a harmonikus egyensúly módszerének speciális esete, és abból például az alábbi módon vezethető le.

A harmonikus egyensúly módszerével az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \Omega t \quad (6.1)$$

mozgásegyenlet periodikus megoldását az

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \Omega t + B_n \sin n \Omega t) \quad (6.2)$$

alakban keressük. A (6.2) kifejezést (6.1)-be helyettesítjük. Az $f(x, \dot{x})$ függvényt Fourier-sorba fejtjük és (6.1)-ben előírjuk az egyes harmonikusok együtthatóinak egyenlőségét. Így az A_0, A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) együtthatókra nemlineáris algebrai egyenletrendszert kapunk. A végtelen sok ismeretlen meghatározása nehézségekbe ütközik, ezért a gyakorlatban a (6.2) sornak csak egy szeletét használják.

Keressük (6.1) megoldását közelítőleg az

$$x = A_0 + A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t \quad (6.3)$$

alakban. A továbbiak szempontjából célszerű (6.3)-at az

$$x = a_0 + a_1 \cos \psi \quad (6.4)$$

alakba írni, ahol a trigonometrikus függvényeket egy rezgéssé alakítottuk és bevezettük a korábban már alkalmazott $\psi = \Omega t - \vartheta_1$ és $a_0 = A_0$ jelöléseket. Helyettesítsük (6.4)-et (6.1)-be, és fejtsük $f(x, \dot{x})$ -ot az

$$f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) = c_0 + c_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi + \dots \quad (6.5)$$

Fourier-sorba, amelynek együtthatói a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi, \quad (6.6)$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (6.7)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (6.8)$$

stb. összefüggésekből számíthatók. A közelítő megoldás (6.3), illetve (6.4) alakjával összhangban a (6.5) Fourier-sorban is csak a nulladik és az első harmonikusokat tartjuk meg. Így (6.1) a

$$-m_1 \Omega^2 a_1 \cos \psi + c_0 + c_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi = F \cos(\psi + \vartheta_1) \quad (6.9)$$

alakba írható. Az a_0, a_1, ϑ_1 mennyiségek (6.9)-ből az egyes harmonikusok együtthatóinak egyenlősége alapján számíthatók. Vezessük be a

$$b = -\frac{b_1}{a_1 \Omega}, \quad c = \frac{c_1}{a_1}, \quad d = c_0 - ca_0 \quad (6.10)$$

jelöléseket! Így (6.9) a

$$-m \Omega^2 a_1 \cos \psi + c(a_0 + a_1 \cos \psi) - ba_1 \Omega \sin \psi + d = F \cos(\psi + \vartheta_1) \quad (6.11)$$

alakba írható, amelyből az a_0, a_1, ϑ_1 mennyiségekre a (3.4)—(3.6) összefüggések adódnak.

Könnyen belátható, hogy a (6.11) egyenletre jutunk akkor is, ha (6.1) helyett az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = F \cos \Omega t \quad (6.12)$$

lineáris differenciálegyenlet (6.4) alakú periodikus megoldását keressük, és (6.12)-ben a b, c, d mennyiségeket a (6.10) és (6.6)—(6.8) összefüggések értelmezik.

Minden (6.1) alakú nemlineáris differenciálegyenlethez hozzárendelhető egy (6.12) alakú lineáris differenciálegyenlet úgy, hogy a két differenciálegyenletnek a (6.4) alakban keresett megoldásai megegyeznek. A (6.12)-t a (6.1)-hez tartozó harmonikusan linearizált differenciálegyenletnek nevezik. Az a módszer pedig, amellyel a (6.1)-ből kiindulva a (6.12) lineáris differenciálegyenlethez jutunk, a harmonikus linearizálás módszere.

A (6.10) és (6.6)—(6.8) összefüggésekkel értelmezett b, c és d mennyiségek megegyeznek a (4.5)—(4.7) eredményekkel. A fentiekben a harmonikus lineari-

zálással kapott eredmények pedig megegyeznek a fázisgörbe feletti linearizálás 4.1 pontban kapott eredményeivel. Tehát a fázisgörbe feletti linearizálás 4.1 pontban leírt változata a 6.1 pontban mondottakkal összhangban valóban fel-fogható úgy is, mint a fentiekben ismertetett harmonikus linearizálás geometriai szemléltetése.

6.3 Hasonló módon belátható, hogy az optimális [4], illetve az ekvivalens linearizálás módszerének [5], [6] is szemléletes geometriai jelentés adható.

6.4 Az alábbiakban a Krülov—Bogoljubov-féle aszimptotikus módszer [20] első közelítését vizsgáljuk meg.

6.4.1 Ez a módszer feltételezi, hogy az $f(x, \dot{x})$ gyengén nemlineáris függvény, azaz

$$f(x, \dot{x}) = kx + \varepsilon g(x, \dot{x}) \quad (6.13)$$

alakú, ahol $k > 0$, és ε kis paraméter. Autonóm esetben tehát (4.9) helyett

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon g(x, \dot{x}) = 0 \quad (6.14)$$

írható. Vezessük be a

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \text{és} \quad \frac{g(x, \dot{x})}{m} = f_1(x, \dot{x}) \quad (6.15)$$

jelöléseket. Így (6.14) az

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f_1(x, \dot{x}) = 0 \quad (6.16)$$

alakot ölti. (6.16)-ból nyilvánvaló, hogy ω az $\varepsilon = 0$ esethez tartozó lineáris rendszer körfrekvenciája.

A módszer első közelítésében a megoldást az

$$x = a \cos \psi$$

alakban keressük, ahol a és ψ a

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi$$

differenciálegyenletekből számíthatók (vö. [20], 51. o.).

A továbbiakban csak az állandósult rezgésekkel foglalkozunk. Állandósult rezgések esetén $da/(dt) = 0$ és $d\psi/(dt) = \alpha$. Ebben az esetben a rezgések

amplitúdója az

$$0 = \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.17)$$

körfrekvenciája pedig az

$$\alpha = \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.18)$$

összefüggésből számítható. Ha ε második hatványát elhanyagoljuk, akkor (6.18)-ból

$$\alpha^2 = \omega^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.19)$$

adódik. Ha (6.17) és (6.19)-ben figyelembe vesszük a (6.13) és (6.15) jelöléseket, akkor a

$$0 = \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.20)$$

$$m\alpha^2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.21)$$

összefüggésekhez jutunk. A (6.20) és (6.21) kifejezések hasonlítanak a (4.2) pontban kapott eredményekhez. Tegyük fel, hogy $f(x, \dot{x})$ -ra fennáll (4.25), azaz $a_0 = 0$. Ha a (6.20) és (6.21) jobb oldalán a helyébe a_1 -et és ω helyébe α -t írunk, akkor a (4.24) és (4.23) összefüggéseket kapjuk.

6.4.2 [20] (109. o.) kimutatja, hogy az első közelítéssel megegyező eredményre jutunk, ha (6.14) helyett az

$$m\ddot{x} + \lambda_e(a) \dot{x} + k_e(a) x = 0 \quad (6.22)$$

ekvivalens lineáris differenciálegyenletet oldjuk meg, ahol $\lambda_e(a)$ és $k_e(a)$ a

$$\lambda_e(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$k_e(a) = k + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

vagy — tekintettel a (6.13) jelölésre — a

$$\lambda_e(a) = -\frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.23)$$

$$k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.24)$$

összefüggésekből számíthatók. A (6.23) és (6.24) alapján számolt linearizált csillapítási tényező és rugómerevség $a_0 = 0$ esetében csak abban különbözik a (4.19) és (4.20)-tól, hogy a jobb oldalukon a nemlineáris rendszer α saját körfrekvenciája helyett az $\varepsilon = 0$ esethez tartozó lineáris rendszer ω saját körfrekvenciája szerepel.

6.4.3 A (6.20), (6.21) összefüggésekhez a 4.2 pont gondolatmenetét követve geometriai megfontolások alapján is eljuthatunk. Vezessük be a (6.14) és (6.22) differenciálegyenletekben a $\tau = \omega t$ dimenzió nélküli időkoordinátát, ahol $\omega = \sqrt{k/m}$. Így (6.14) és (6.22) az

$$m \omega^2 x'' + kx + \varepsilon g(x, \omega x') = 0, \quad (6.25)$$

$$m \omega^2 x'' + \lambda_e \omega x' + k_e x = 0 \quad (6.26)$$

alakba írható. (Vessző a τ szerinti deriválást jelöli.) Az $\varepsilon = 0$ esetben (6.25) megoldása

$$x = a \cos(\tau - \vartheta_1) \quad (6.27)$$

alakú, ahol a és ϑ_1 állandók, az utóbbiból pedig

$$x' = -a \sin(\tau - \vartheta_1) \quad (6.28)$$

következik. A (6.27), (6.28) fázisgörbe az (x, x') fázissíkon kör. Erre az s fázisgörbére emelt körhenger az $f(x, \omega x') = kx + \varepsilon g(x, \omega x')$ felületet térgörbében a $\lambda_e \omega x' + k_e x$ síkot pedig ellipsziszben metszi. Ha a λ_e és k_e mennyiségeket úgy választjuk meg, hogy a hengerpalástnak az ellipszis és a térgörbe közé eső felülete kicsi legyen, akkor a

$$\oint_{(s)} [f(x, \omega x') - (\lambda_e \omega x' + k_e x)]^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$

feltétel alapján a λ_e és k_e mennyiségekre a (6.23) és (6.24) összefüggéseket kapjuk.

Ezek a megfontolások a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítésének szemléletes geometriai jelentést adnak.

A fentieknek a 4.2 ponttal való egybevetése világosan mutatja, hogy a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítése és a fázisgörbe feletti linearizálás (illetve a vele azonos eredményt adó módszerek) között elvi különbségek vannak. Ezek alapját az adja, hogy az egyik esetben $\tau = \omega t$, a másikban $\tau = \alpha t$ transzformációt alkalmazunk, és ennek megfelelően az ekvivalens sík megválasztásához az egyik esetben ω , a másikban α körfrekvenciájú rezgéseket veszünk alapul.

A Krülov—Bogoljubov-módszer magasabb közelítéseinél is fennáll az, hogy a megoldások előállításában az $f(x, \omega x')$ nemlineáris függvénynek és

deriváltjainak csak a (6.27), (6.28) fázisgörbére lokalizált értékei szerepelnek. Ez a fázisgörbe állandósult rezgéseknél a magasabb közelítések esetén is a sugarú kör.

Az alkalmazások során előfordul, hogy az $f(x, \dot{x})$ függvény (6.13) alakban nem bontható fel, mert k értéke nem határozható meg egyértelműen. Ebben az esetben több szerző (vö. pl. [18] 142. o.) azt javasolja, hogy a Krülov—Bogoljubov-módszer gondolatát az $\omega = \alpha$ választásával alkalmazzuk. Belátható, hogy ilyenkor a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítésével az állandósult rezgésekre kapott eredmények az $a_0 = 0$ esetben a 4.2 pont eredményeivel megegyeznek.

Megemlítjük még, hogy a gerjesztett rendszerek 4.1 pontban leírt vizsgálatát a Krülov—Bogoljubov-módszer eredményeivel egybevetve, a fentiekhez hasonló megállapításokra juthatunk.

6.5 Érdemes még megemlíteni, hogy speciális esetekben a Poincaré-módszer és a harmonikus linearizálás módszere (vö. [9] 102. o.), továbbá a Poincaré-módszer és a Krülov—Bogoljubov-módszer (vö. [24]) azonos eredményekre vezet. Így a 6.2 és 6.4 pontokban leírtakhoz hasonló módon a Poincaré-módszer első lépésének is szemléletes geometriai jelentés adható.

6.6 A fentiekben láttuk, hogy vannak olyan közelítő módszerek, amelyek a fázisgörbe feletti linearizálással azonos eredményt adnak. Az ilyen fajta közelítések várhatóan annál jobb eredményt szolgáltatnak, minél jobban megközelíthető ellipszissel a fázisgörbére emelt körhenger által az $f(x, \dot{x})$ jellegfelülethől kimetszett térgörbe (vö. 3. és 5. ábra). Fel szokás tétélezni, hogy ez a feltevés az ε kis értékeinél általában teljesül. A geometriai szemlélet alapján kézenfekvőnek látszik, hogy az $f(x, \dot{x})$ függvény felépítésétől függően nem kell ε kis értékeire szorítkoznunk. Ezért előfordulhat, hogy mindazok a módszerek, amelyek feltételezik, hogy a nemlineáris függvény egy kis paramétert tartalmaz, első közelítésben a kis paraméter nagy értékeinél is jó eredményt adnak.

7. Következtetések

7.1 A Panovko-féle direkt linearizálási módszer alapgondolatát a helytől és sebességtől is függő általános alakú $f(x, \dot{x})$ nemlinearitás esetén is alkalmazhatjuk. Ebben az esetben az $f(x, \dot{x})$ jellegfelületet egy $b\dot{x} + cx + d$ síkkal közelítjük az (x, \dot{x}) fázissík valamilyen tartománya felett. Az a tartomány, amely felett a közelítést elvégezzük, többféleképpen is megválasztható. Ezen tartomány és a súlyfüggvény alkalmas megválasztásakor speciális esetekben a PANOVKO által kapott eredmények adódnak.

7.2 Ekvivalens lineáris rendszerek más — az eddigiektől eltérő — úton is felépíthetők. A nemlineáris mozgásegyenlethez ebben az esetben is hozzárendelünk egy lineáris mozgásegyenletet. Utóbbinak együtthatóit úgy határoz-

zuk meg, hogy a megoldás fázisgörbéje felett a nemlineáris függvény és az őt közelítő lineáris függvény közötti eltérések legyenek minimálisak. A fázisgörbe feletti eltérések minimalizálását több úton is elvégezhetjük. Egy egyszerű változatot részletesen a 4. és 5. pontokban mutatunk be. Ebben az esetben az eltérések négyzetének a fázisgörbe feletti vonalintegráljait minimalizáljuk. Ahhoz, hogy a fázisikon a vonalelem értelmezhető legyen, egy transzformáció bevezetésére van szükség. Ez a transzformáció többféleképpen is megválasztható.

7.3 A fázisgörbe feletti linearizálás elvégzése után előállítható az eltérések négyzetes integrálközepének relatív hibája. A relatív hiba nagysága a nemlinearitás mértékéről ad tájékoztatást. A nemlinearitás mértékének ez a (4.30) definíciója egy korábbi, az irodalomból ismert, definíciónál általánosabb esetekben is használható.

7.4 A fázisgörbe feletti linearizálásra támaszkodva több — a nemlineáris rezgések vizsgálatában használt — módszer szemléletes geometriai jelentéséhez jutunk.

IRODALOM

1. PANOVKO, YA. G.: A Review of Applications of the Method of Direct Linearization, *Appl. Mech. Proc., XI. Int. Congr. Appl. Mech.*, Munich (1964), 167—171
2. PANOVKO, YA. G.: Elements of the Applied Theory of Elastic Vibration, *Mir*, Moscow (1971)
3. BAPAT, V. A.—SRINIVASAN, P.: Effect of Static Deflection on Natural Frequency of Non-linear Spring Mass System by Direct Linearization Method, *Journal of Sound and Vibration* 10 (1969) (3), 443—454
4. BLAQUIÈRE, A.: Une nouvelle méthode de linéarization locale des opérateurs non-linéaires; approximation optimale. *2nd Conf. Nonlinear Vibrations* (Warsaw 1962), Warsaw 1964
5. IWAN, W.: On Defining Equivalent Systems for Certain Ordinary Nonlinear Differential Equations, *Int. J. Non-Linear Mechanics* 4 (1969), 325—334
6. SPANOS, P.-T. D., IWAN, W.: Harmonic Analysis of Dynamic Systems with Non-symmetric Nonlinearities, *J. Dynamic Systems, Measurement Control* 101 (1979) 31—36
7. IWAN, W.—PATULA, E. J.: The Merit of Different Error Minimization Criteria in Approximate Analysis, *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), 257—262
8. IWAN, W.—PATULA, E. J.: On the Validity of Equation Difference Minimization Techniques, *Int. J. Non-Linear Mechanics* 7 (1972), 1—17
9. LURJE, A. I.: Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung, Akademie Verlag, Berlin 1957
10. WEIGAND, A.: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, Band I. VEB Verlag Technik, Berlin 1959
11. ANDRONOW, A. A.—WITT, S. E.—CHAIKIN, S. E.: Theorie der Schwingungen, Teil II. Akademie Verlag, Berlin 1962
12. FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
13. SAGIROW, P.: Zur Frage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 40 (1960), 451—453
14. URABE, M.: Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20 (1965), 120—152
15. Пановко, Я. Т.: Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний, *Инженерный сборник*, том XIII. (1952), 113—122
16. *Вибрации в технике, Справочник в 6. томах*, том 2.: Блехман, И. И.: Колебания нелинейных механических систем, Машиностроение, Москва 1979
17. *Вибрации в технике, Справочник в 6. томах*, том 3.: Диментберг, Ф. М., Колесников, К. С.: Колебания машин конструкций и их элементов, Машиностроение, Москва 1980

18. Попов, Е. Н.—Пальтов, И. П.: Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, Москва 1960
19. Градштейн, И. С.—Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва 1963
20. Боголюбов, Н. Н.—Митропольский, Ю. А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Наука, Москва 1974
21. Розенwasser, Е. Н.: Колебания нелинейных систем, Наука, Москва 1969
22. Лойцянский, Л. Г.: Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законов сопротивления, *Инженерный сборник, ХУлла* (1954), 139–148
23. Карaban, В. Н.—Дубовицкий, А.Ю.: О способах линеаризации при расчетах свободных колебаний нелинейных систем, В кн.: *Теория механизмов и машин* 23 Харьков, Вища школа, (1977), 35–39
24. Проскураков, А. П.: Сравнение периодических решений квазилинейных систем, построенных методом Пуанкаре и методам Крылова-Боголюбова, *Прикладная математика и механика* 28, вып. 4. (1964), 765–770
25. Гарбер, Е. Д.: Оценка погрешности метода гармонического баланса, *Автоматика и телемеханика*, XXIV. (1963), 482–492

Contribution to the Methods of Construction of Equivalent Linear Oscillating Systems. —

In the first part of the paper a generalization of the Panovko method for direct linearization is presented and one method of the linearization above the phase curve is introduced. On the basis of this latter a suggestion is made to define the degree of the non-linearity. The second part deals with the role of the transformation of the independent variable in case of the linearization above the phase curve. It is pointed out that several methods used for the examination of the non-linear oscillations have a demonstrative geometrical meaning.

Beitrag zu den Methoden der äquivalenten Linearisierung für Schwingungssysteme. —

In der Arbeit wird eine Verallgemeinerung der direkten Linearisierungsmethode von Panovko vorgestellt, und es wird die Methode der Linearisierung über der Phasenkurve eingeführt. Auf Grund der letzten Methode wird eine Definition des Maßes der Nichtlinearität vorgeschlagen. Bei der Linearisierung über der Phasenkurve wird die Bedeutung der Transformation der unabhängigen Variablen untersucht. Es wird gezeigt, daß mehrere zur Untersuchung der nichtlinearen Schwingungssysteme angewandten Methoden eine anschauliche geometrische Deutung haben.