

# CSŐ HAJLÍTÁSA, FŐLEG NAGY ALAKVÁLTOZÁSSAL

TREER MÓR FERENC  
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1982. április 27-én]

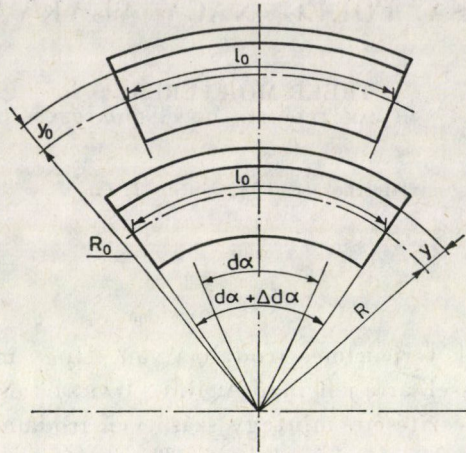
Cső hajlításának terjedelmes irodalma van. Hogy milyen sokan foglalkoztak ezzel a kérdéssel, arra jellemző A. R. C. MARKL tanulmánya [3], aki az USA szabvány előkészítésére mintegy százötven irodalmi hivatkozást sorol fel. Messze vezetne a vonatkozó irodalom dokumentálása, mi Markl tanulmányán kívül két munkára hivatkozunk: KÁRMÁNra [1], akinek elmélete immár hetven éve alapjaiban változatlanul vonul végig az egész világirodalmon, és HOVGAARDra [2], aki KÁRMÁNNál később, de hasonló eredményekkel az amerikai irodalomban építette fel elméletét. Figyelemmel vagyunk továbbá CSIRMAZra [4], akinek könyve magyar nyelven foglalja össze ennek a kérdésnek sokoldalú elméleti és gyakorlati vonatkozásait.

Három okból vesszük fel a kérdés tanulmányozását. Először, mert az eddigi elméletben elhanyagolások történtek, melyek elkerülhetők vagy csökkenthetők. Másodszor, mert az elmélet — éppen az egyik elhanyagolás következtében — csak ívcsővekre alkalmazható, egyenes csőre nem. Harmadszor, mert matematikai modellre törekszünk, mely nagy alakváltozásnál is lehetővé teszi a kérdés tanulmányozását.

Tanulmányunk menete az lesz, hogy először az eddigi elméleten haladunk végig, rámutatva azonban az elhanyagolásokra és egyszerűsítésekre, azután a pontos számításokat lehetővé tevő matematikai modellt állítjuk össze, végül ennek segítségével kimutatjuk az elhanyagolások és egyszerűsítések által okozott hibákat, és kiértékelünk néhány erős alakváltozást.

## 1. Az irodalomban szokásos szilárdsági számítások

Ívcső deformálásának legegyszerűbb mechanikai modelljét úgy alakíthatjuk, hogy egy  $R_0$  sugarú hengerről sok menetből álló csövet vékonyabb  $R$  sugarú hengerre csévélünk át. A csőnek közepes hossza nem változik, hanem a vékonyabb  $R$  sugarú hengeren több menetből áll a cső. Ahhoz, hogy erről a vékonyabb hengerről a cső vissza ne lazuljon az eredeti  $R_0$  sugarára, a csövet ráfogni kell az  $R$  sugarú hengerre, vagyis rá végig egyforma hajlítónyomatékot kell kifejtenünk. Számításainkat a cső  $l_0$  hosszúságú gyűrűalakú részére fogjuk végezni.



1. ábra

Az 1. ábra mutatja egy ilyen gyűrűrészletnek deformálás előtti és utáni alakját. Az  $R_0$  középsugarú gyűrűrészletnek  $l_0$  ívhossza a deformálás által nem változik, amíg ellenben terheletlen állapotban az  $l_0$  hosszúságú ívhez  $d\alpha$  középponti szög tartozott, addig az ívet  $R$  sugárra deformálva  $d\alpha + \Delta d\alpha$  középponti szög tartozik hozzá. Ezek szerint:

$$R(dx + \Delta dx) = R_0 dx = l_0 \quad (1)$$

A gyűrűrészletnek egy olyan eleme azonban, amely a terheletlen gyűrű tengelyétől  $R_0 + y_0$  távolságban van, nyúlik, még pedig hosszúsága  $(R_0 + y_0)d\alpha$ -ról  $(R + y)(d\alpha + \Delta d\alpha)$  hosszúságra változik. A kettőnek különbsége az (1) egyenlet figyelembevételével:

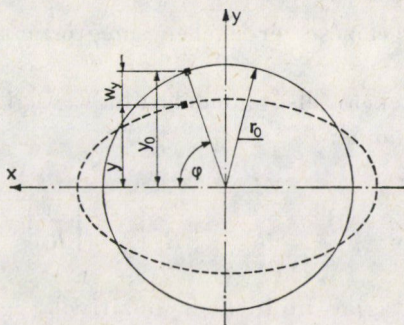
$$y(dx + \Delta dx) - y_0 dx. \quad (2)$$

A fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{y(dx + \Delta dx) - y_0 dx}{(R_0 + y_0) dx} = \frac{1}{R_0 + y_0} \left[ y - y_0 + y \frac{\Delta dx}{dx} \right]. \quad (3)$$

Hajlítás által azonban nemcsak a gyűrűrészlet egyes elemeinek hossza változik és a görbületi sugara a hajlítás síkjában, hanem deformálódik a cső keresztmetszete is a terheletlenül köralakról ovális alakra a 2. ábrán látható módon. A keresztmetszet síkja a csőnek, és ennek részeként a gyűrűrészletnek tengelyén fekszik úgy a hajlítás előtt, mint azután. A keresztmetszet az  $x$  tengely a gyűrűrészlet tengelyével párhuzamos, az  $y$  tengely rá merőleges. Az 1. ábrán körívként rajzolt gyűrűelem a 2. ábrán keresztmetszetben jelent-





2. ábra

kezik, távolsága az  $x$  tengelytől terheletlenül  $y_0$ , a hajlítás után  $w_y$  változással  $y$  lett, vagyis  $y = y_0 + w_y$ . Miután az alakváltozás a 2. ábrán láthatóan laposodás,  $w_y$  a mi vizsgálatainkban mindenkor negatív. Így a fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + y_0} \left[ w_y + (y_0 + \bar{w}_y) \frac{\Delta dx}{dx} \right]. \quad (4)$$

A (4) képletben van azonban két tag, melyeket eddig az irodalomban úgy KÁRMÁN [1], mint HOVGAARD [2], valamint az őket követő szerzők elhanyagoltak, mi azonban figyelembe vesszük őket.

Általában azokat az értékeket, melyeket mi megtartunk a levezetéseinkben, az irodalomban azonban elhagyják, vagy másként helyettesítik, fentvonással jelöljük. Nevezetesen az irodalomban  $\bar{y}_0 = 0$ ,  $\bar{w}_y = 0$  és  $\bar{R} = R_0$ .

Az egyik  $\bar{w}_y$ , az  $(y_0 + \bar{w}_y) \Delta dx/dx$  tag a (4) egyetletben.

KÁRMÁN-nál [1] az elhanyagolás azért keletkezik, hogy tanulmányának 1891. oldalán az elemi szál nyúlását a (3a.) képletében a deformálás előtti helyzetből számítja. HOVGAARD [2] a  $w_y \Delta dx/dx$  tagot másodrendűen kicsinek állítja tanulmányának 74. oldalán azon az alapon, hogy  $\Delta dx/dx$  elsőrendűen kicsi, és  $w_y$  is az. Ha azonban az 1. ábránkat szemléljük, észrevehetjük, hogy amint a cső terheletlen állapotú  $R_0$  sugara nő, vagyis ha egy ívcső görbülete kisebb, tehát az  $R_0$  nagyobb, az  $l_0$  ívhosszhoz tartozó  $da$  a nullához közeledik,  $\Delta dx$  ellenben változatlan marad, így  $\Delta dx/dx$  nem hogy elsőrendűen kicsi lenne, minden határon túl növekedhet. A  $w_y \Delta dx/dx$  tagot tehát nem fogjuk elhanyagolni.

A másik tag a (4) képletben az  $1/(R_0 + y_0)$  tényezőben az  $\bar{y}_0$  tag. Ennek az a jelentősége, hogy ívcsöveknél a külső oldalon, ahol  $y > 0$ , az elemi szál hosszabb, mint a belső oldalon, ahol  $y < 0$ , evvel a fajlagos nyúlás a külső oldalon kevesebb, mint a belső oldalon, és ennek megfelelően a hajlításkor a külső oldalon a húzófeszültség kevesebb, mint a belső oldalon a nyomófeszültség. Avval az elhanyagolással, hogy  $y_0/R_0 \approx 0$ , a különbség eltűnik. Ez egyenes csőnél tényleg fennáll, ívcsöveknél azonban a nem túlzott matema-

tikai bonyolultság megelőzése érdekében megtörtént. Lehetőleg azonban figyelembe vesszük.

Megközelítő értékeként első gondolatunk egy  $1/(1 + y_0/R_0)$  kifejezés sorbafejtése lehet, amikor is:

$$\frac{R_0}{R_0 + y_0} = 1 - \frac{y_0}{R_0} + \left(\frac{y_0}{R_0}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{R_0}\right)^3 \dots$$

A sor páratlanszámú tagjai mindenkor pozitívok, így párosszámú tagtól elhanyagolva a tört értékére kisebbet kapunk, mintha pontosan számítanánk, miután az első elhanyagolt tag pozitív. Szilárdsági számításoknál ez félrevezető lenne, ezért a sorbafejtéssel való megközelítést nem alkalmazzuk.

Az ívcső terheletlen keresztmetszete kör, tehát:  $y_0 = r_0 \sin \varphi$ , evvel:

$$\frac{R_0}{R_0 + y_0} = 1 - \frac{y_0}{R_0 + r_0 \sin \varphi} \approx 1 - \frac{r_0}{R_0 + r_0} \sin \varphi. \quad (5)$$

Annai történt, hogy a nevezőbe  $\sin \varphi = +1$  értéket írtunk. Ez megközelítés ugyan, de az eredmény soha sem kevesebb a pontos számítás szerinti értéknél.

Az  $R_0/(R_0 + y_0)$  tagnak nem minden esetben van jelentősége. Egyenes csőre az értéke identikusan egy, miután ekkor  $R_0 = \infty$ . Ívcsőre az alakváltoztatási munka számításánál az (5) szerinti megközelítést alkalmazva az integrálásakor szintén eltűnik az  $r_0 \sin \varphi / (R_0 + y_0)$  tagnak a hatása, amint azt a (22a) egyenletet követően majd megállapíthatjuk. Az  $R_0/(R_0 + y_0)$  pontos értékével az alakváltoztatási munka számításánál marad azonban néhány százalékos különbség, ezt figyelembe is vesszük a (29), (31), (33) egyenletekben. Lényeges a jelentősége ennek a tagnak a feszültségek számításánál, és miatta a húzó és nyomó feszültség egymástól eltérő értékűvé válik.

Hogy a további képletek műszakilag jobban érthetők legyenek, a  $d\alpha$  és  $\Delta d\alpha$  értékeket a cső hajlítása előtti  $R_0$ , és hajlítás utáni  $R$  görbületi sugarával fejezzük ki. Az (1) egyenlethől, illetőleg az 1. ábrából:

$$1 + \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} = \frac{R_0}{R}. \quad (5a)$$

Evvel a (4) egyenletben:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ y_0 \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) + w_y \frac{R_0}{R} \right]. \quad (6)$$

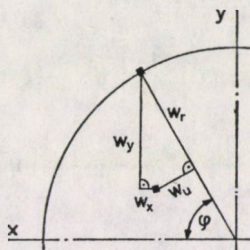
A gyűrűelemnek a gyűrűrészlet tengelyével párhuzamos  $w_y$  elmozdulását radiális és tangenciális elmozdulások komponenseire bontjuk. Ecélből a 2. ábra megfelelő részét kinagyítva a 3. ábrában megrajzoltuk a  $w_y$ , az  $x$  tengellyel



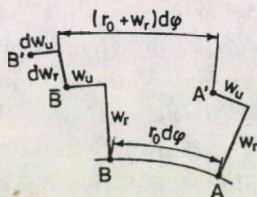
párhuzamos  $w_x$ , a radiális  $w_r$  és a  $w_u$  elmozdulásokat. Az ábrából:

$$w_y = w_u \cos \varphi + w_r \sin \varphi \quad (7)$$

A hajlítás által megváltozik a cső keresztmetszetének alakja, de változatlan marad a keresztmetszetben az ívhossz. Figyeljük meg a 4. ábrában az



3. ábra



4. ábra

$A$  és  $\bar{B}$  pont elmozdulását a deformálás folyamán. Az  $A$  pont  $w_r$  és  $w_u$  elmozdulásokkal az  $A'$  pontba jut. Tőle  $r_0 d \varphi$  távolságban levő  $B$  pont a  $\bar{B}$  pontba jutna, ha az elmozdulása ugyanaz volna, mint az  $A$  ponté, távolságuk ekkor  $(r_0 + w_r) d \varphi$  lenne. A  $B$  pontban azonban az elmozdulás már több  $dw_r$  és  $dw_u$  értékekkel, így a  $B$  pont a  $B'$  pontba jut. Az ívhossz csak akkor nem változik, ha a két pont távolsága egyforma marad, vagyis ha  $AB = A'B'$ , tehát ha:  $r_0 d \varphi = (r_0 + w_r) d \varphi + dw_u$ . Innen

$$w_r = - \frac{dw_u}{d\varphi} \quad (8)$$

Ennek figyelembevételével a fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) r_0 \sin \varphi + \left( w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{R_0}{R} \right] \quad (9)$$

Az ezáltal keletkező húzófeszültség:

$$\sigma_t = E \varepsilon \quad (10)$$

Ezen húzófeszültség létesítéséhez szükséges munka:  $dU_t = \sigma^2 V / (2E)$ , hol a gyűrűelem térfogata  $V = lv \Delta s$ ,  $v$  a cső falvastagsága,  $l = l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0$  a gyűrűelem hossza,  $\Delta s$  a gyűrűelem ívhossza, ami a neki megfelelő terheletlen körív hosszával egyenlő:  $\Delta s = r_0 d\varphi$ . Ezeknek figyelembevételével:

$$\begin{aligned}
 U_t &= \frac{l_0 v r_0}{2E} \cdot \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \int_0^{2\pi} E^2 \left( \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{R}_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \left( w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{1}{R} \right]^2 d\varphi = \\
 &= \frac{E}{2} l_0 v \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \left( w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{1}{R_0} \right]^2 r_0 d\varphi.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Egyenes csőre ( $R_0 = \infty$ ), az irodalomban szokásosan  $\bar{R} = R_0$  helyettesítéssel a (11) egyenlet [ ] zárójel értéke  $[r_0 \sin \varphi / R]$  alakra redukálódik, vagyis a szükséges munkát úgy számítja, mintha deformáció nem lenne. A (11) egyenletben a deformáció figyelembevétele különösen egyenes csőnél tehát csakis elhanyagolás nélkül,  $\bar{R} = R$  helyettesítéssel lehetséges. Az elméletnek ezen hiányossága miatt az US számítási szabvány egyenes csőnél eltekint a keresztmetszeti alak deformálódásának figyelembevételétől.

Keresztirányú hajlításhoz szükséges nyomaték:

$$M = E \kappa F r_0^2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\varrho} \right), \tag{12}$$

hol  $E$  a rugalmassági tényező,  $F$  a keresztmetszet területe,  $r_0$  a görbületi sugár terhelés előtt,  $\varrho$  ugyanez terhelés után,

$$\kappa = - \frac{1}{F} \int_F \frac{y dF}{r_0 + y}. \tag{13}$$

A cső hajlításánál a keresztmetszet téglalap,  $F = lv$ , hol  $l$  a cső gyűrűrészletének vizsgált eleméhez tartozó hosszúság,  $v$  a cső falvastagsága. Ezeknek figyelembevételével végezve az integrálást:

$$\kappa = - \frac{1}{vl} \int_{-v/2}^{v/2} \frac{y l dy}{r_0 + y} = - 1 + \frac{r_0}{v} l \left( 1 + \frac{2v}{2r_0 + v} \right). \tag{14}$$

Ha a (12) egyenletben szereplő  $\kappa F r_0^2$  kifejezést képezzük, és  $\lim v/r_0 \rightarrow 0$  felé haladunk, a ln sorbajfejtésénél eltűnnek az összes tagok, melyekben a  $v/r_0$  másodiknál magasabb hatvány,  $\kappa F r_0^2 = l_0 v^3 / 12 = J_q$ . További levezeté-

seinkben ezt a képletet használjuk, megtartva pontosabb számításokhoz a (14) alkalmazásának lehetőségét.

A gyűrűelem keresztirányú hajlításához szükséges munka:

$$dU_q = \frac{r_0}{2EJ_q} \cdot M_q^2 d\varphi. \tag{16}$$

A hajlítást létesítő nyomatékot a (12)-ből helyettesítve:

$$dU_q = \frac{EJ_q}{2} \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 r_0 d\varphi = \frac{El_0 v^3}{24} \cdot \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \cdot \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 r_0 d\varphi, \tag{17}$$

hol a gyűrűelem hossza  $l = l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0$  az (1) egyenlet és az 1. ábra figyelembevételével.

Az  $1/\varrho - 1/r_0$  kifejezést az irodalomban szokásos módon egyszerűsítjük integrálásra alkalmas formába. A görbület poláris koordinátarendszerben:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}$$

Helyettesítve  $r = r_0 + w_r$ ,  $r' = w'_r$ ,  $r'' = w''_r$  kifejezéseket, és elhanyagolva a magasabb rendű tagokat:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r_0 + 2w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)}$$

Így

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} = \frac{r_0 + 2w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)} - \frac{r_0 + 3w_r}{r_0(r_0 + 3w_r)} = \frac{-w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)}$$

Elhanyagolva továbbá a nevezőben a  $3w_r$  értéket, és figyelembe véve a (8) egyenletet:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} = \frac{-w_r - w''_r}{r_0^2} = \frac{w'_u + w'''_u}{r_0^2}$$

Ezt behelyettesítve a (17) egyenletbe a keresztirányú hajlításához szükséges munka:

$$U_q = \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} (w'_u + w'''_u)^2 d\varphi. \tag{18}$$

Az összes alakváltoztatási munka a (11) és (18) egyenletek összege:

$$\begin{aligned} \bar{U} = U_t + U_q = & \frac{El_0 v r_0}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} \left( w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \right]^2 d\varphi + \frac{v^2}{12} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \left( \frac{w'_u + w'''_u}{r_0^2} \right)^2 r_0 d\varphi \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Ezen munka minimuma adja meg a cső deformált keresztmetszetének alakját. Feltételezzük — Kármán nyomán —, hogy ez az alak poláris koordináta-rendszerben kifejezhető harmonikus sor, tehát:

$$r = r_0 + C_1 \cos 2\varphi + C_2 \cos 4\varphi + \dots \quad (20)$$

Számításainkban másodfokú megközelítésig, vagyis a sor első három tagjáig mentünk. Az eredményeket később a számszerű kiértékeléseknél közölni is fogjuk, a túlságos matematikai bonyolultság elkerülésére azonban a következőkben csak az elsőfokú megközelítést tárgyaljuk.

Ennek megfelelően:

$$r = r_0 + C \cos 2\varphi = r_0 + w_r \quad (20a)$$

Az  $r$  változásai pedig a (8) egyenlet figyelembevételével:

$$w_u = -C \sin 2\varphi/2 = c \sin 2\varphi, w'_u = 2c \cos 2\varphi \text{ és } w''_u = -8c \cos 2\varphi \quad (21)$$

Ezen értékeket a (19) egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} U = & \frac{El_0 v r_0}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} (c \cos \varphi \sin 2\varphi - 2c \cos 2\varphi \sin \varphi) \right]^2 d\varphi + \right. \\ & \left. + \frac{v^2}{12} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{R}_0 + \bar{y}_0}{R_0 r_0^4} (2c \cos 2\varphi - 8c \cos 2\varphi)^2 d\varphi \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$c \sin 2\varphi \cos \varphi - 2c \cos 2\varphi \sin \varphi = 2c \sin \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1) = 2c \sin^3 \varphi$ ,  
tehát:

$$\begin{aligned} U = & \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2c}{R} \sin^3 \varphi \right]^2 \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0 r_0^4} \cdot 3v^2 c^2 + \cos^2 2\varphi \right\} d\varphi. \quad (22a) \end{aligned}$$

Az

$$\frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} = 1 - \frac{r_0 \sin \varphi}{R_0 + r_0}$$

megközelítésben megállapodtunk az (5) egyenletben. Behelyettesítve ezt és megszorozva a (22a) egyenlet szögletes zárójelének négyzetével, sorozatot kapunk  $\sin \varphi$  páros, és utána páratlan hatványaival. Hasonló a helyzet az egyenlet második részében is, miután  $y_0 = r_0 \sin \varphi$ . Tudjuk azonban, hogy

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = 0.$$



Így  $\sin \varphi$  páros hatványait megtartva egyenletünk lényegesen egyszerűsödik:

$$U = \frac{El_0 vr_0}{2} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 r_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + 4 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{r_0 c}{R} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{4c^2}{R^2} \int_0^{2\pi} \sin^6 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{3v^2 c^2}{r_0^4} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi d\varphi \right]. \quad (22b)$$

Az integrálást elvégezve és rendezve:

$$U = \frac{El_0 vr_0 \pi}{2} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 r_0^2 + 3 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{r_0 c}{R} + \frac{3v^2 c^2}{r_0^4} + \frac{5c^2}{2R^2} \right]. \quad (22c)$$

Az optimum:

$$\frac{dU}{dc} = \frac{El_0 vr_0^2 \pi}{2\bar{R}^2} \left[ 3\bar{R} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + 5 \frac{c}{r_0} + 6 \frac{v^2 \bar{R}^2}{r_0^4} \cdot \frac{c}{r_0} \right] = 0. \quad (23)$$

Innen

$$\left( \frac{c}{r_0} \right)_{\text{opt}} = \frac{-3\bar{R} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)}{5 + \frac{6v^2 \bar{R}^2}{r_0^4}}. \quad (24)$$

Az irodalomban szokásosan  $\bar{R} = R_0$  így:

$$\frac{c}{r_0} = \frac{-3 \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right)}{5 + 6 \frac{v^2 R_0^2}{r_0^4}}. \quad (24a)$$

Kis görbeségű csöveknél azonban a görbület sugár ( $R_0$ ) terhelés előtt sokkal nagyobb, mint terhelés után az  $R$ , így irreálisakká válnak a  $c/r_0$  értékek, sőt egyenes csőre pedig nem is alkalmazható a (24a) képlet. Ennek az elhanyagolás az okai, melyekre a (4) egyenletet követően rámutattunk. Evvel szemben  $\bar{R} = R$  helyettesítéssel:

$$\frac{c}{r_0} = \frac{-3 \left( 1 - \frac{R}{R_0} \right)}{5 + 6 \frac{v^2 R^2}{r_0^4}}. \quad (24b)$$

Így ívesövekre a görbületi sugár kismértékű változásánál  $c/r_0$  értékére közel ugyanannyit kapunk, mint az irodalomnak megfelelő (24a) helyettesítésével, ellenben ez a (24b) képlet helyesen alkalmazható kis görbületű és egyenes csövekre is.

## 2. Szilárdsági számítások integrálás helyett összegezéssel

Elvégeztük az előzőkben cső hajlításánál a szilárdsági számításokat Kármán [1] által lefektetett, az irodalomban azóta általánosan elfogadott módon. Rámutattunk közben egyes elhanyagolásokra, melyek kiküszöbölésére, illetőleg legalább részben való figyelembevételére törekedtünk. A keresztirányú alakváltoztatási munka számításánál végigvezettük az irodalomban szokásos módon az integrálás lehetővé tételére szükségelt egyszerűsítést.

A következőkben ezen elhanyagolások és egyszerűsítés megtétele nélkül vezetünk le összefüggéseket. Eljárásunk az lesz, hogy az elhanyagolásokat és egyszerűsítést megelőzően használt képletekből kiindulva egy bizonyos előre felvett deformált alakhoz kiszámítjuk a deformáláshoz szükséges munkát, és keressük ennek legkisebb értékét az előre felvett deformált alak paramétereinek változtatásával. Természetesen a deformált alak előre való felvétele nem történik önkényesen, hanem abból a deformált alakból indulunk ki, amelyet elhanyagolások és egyszerűsítés segélyével nyertünk. Azután ehhez az alakhoz pontosan számítjuk a deformálási munka értékét, és a paraméterek változtatásával ezen munka minimumát.

A deformált alak egyenletének két szilárdsági követelményt kell kielégítenie. Az egyik az, amit a (8) egyenlet levezetésénél alapul vettünk, hogy a hajlított cső keresztmetszetének ívhossza a deformálásnál változatlan maradjon. A másik, hogy a deformáláshoz szükséges munka minimum legyen.

Először vizsgáljuk meg az első követelményt. Legyen a deformált alak poláris egyenlete egy harmonikus sor első tagjával közelítve:

$$r = \psi r_0 + C \cos 2\varphi = \psi r_0 \left( 1 + \frac{C}{\psi r_0} \cos 2\varphi \right). \quad (25)$$

A keresztmetszet elemi darabjának ívhossza:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \sqrt{r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2} = \\ &= \psi r_0 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{\psi r_0} \cos 2\varphi + \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \cos^2 2\varphi + 4 \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \sin^2 2\varphi}. \end{aligned}$$

Sorbafejtve,  $C/(\psi r_0)$  kis értékénél a magasabb rendű tagokat elhanyagolva és integrálva:

$$s = \psi r_0 \left[ 2\pi + \pi \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \pi \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \right].$$

Miután terheletlenül a cső keresztmetszetének közepes ívhossza  $2\bar{p} \kappa_0$ , a (8) egyenlet levezetésekor történt feltételünknek, hogy a keresztmetszet ívhossza terhelés alatt változatlan maradjon, a fenti kifejezés csak akkor tehet eleget, ha:

$$2\pi r_0 = 2\pi r_0 \psi \left[ 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \right].$$

A  $\psi$  tényező csak a harmonikus sor állandóinak a cső középsugarához való viszonyától ( $C_i/r_0$ ) függ. Értékét  $C/r_0$  kis értékeinél a

$$\psi \left[ 1 + \frac{5}{4} \left( \frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \right] = 1$$

kifejezésből számíthatjuk.

A harmonikus sornak ez a sajátossága az irodalomban eddig figyelmen kívül maradt, a (25) egyenletben mindenkor  $\psi = 1$  értékkel számolva. Számításainkban azonban figyelembe vesszük, megközelítőleg a fenti kifejezés szerint, pontosabban a (25) poláris egyenletből a keresztmetszet közepes ívhosszának meghatározásával. Az ilyen számításokban az

$$r = \psi r_0 \left[ 1 + \sum \frac{C_i}{\psi r_0} \cos 2 i \varphi \right]$$

poláris egyenletben  $C_i/(\psi r_0)$  paraméterre veszünk kerek számértékeket.

A  $\psi$  tényezőnek a (25) egyenletbe való bevezetése sem az irodalomnak eddigi, sem a mi megelőző levezetéseinkben zavart nem okoz, mert a (22) egyenletrendszerünkben mindenütt az  $r$  differenciálhányadosai kerülnek alkalmazásra.

A deformált alak egyenletének — amint említettük — másik követelménye, hogy a deformáláshoz szükséges alakváltoztatási munka, a hosszirányúnak és keresztirányúnak összege minimum legyen.

Deformálás következtében az elem hosszúsága — amint ezt a (2) egyenlettel kapcsolatban megállapítottuk —  $(R_0 + y_0)d\alpha$  nagyságról  $(R + y)(d\alpha + \Delta d\alpha)$ -ra változik. Ezt a változást két részre bontjuk. Először azt a nyúlást írjuk fel, ami akkor keletkezik, ha az elemi rész megmarad az  $y_0$  távolságban, azután azt a nyúlást, amely azáltal keletkezik, hogy az elemi rész távolsága  $y_0$ -ról  $y$ -ra módosul:

$$\begin{aligned} (R + y_0)(dx + \Delta dx) + (y - y_0)(dx + \overline{\Delta dx}) - R_0 + y_0) dx = \\ = y_0(dx + \Delta dx) - y_0 dx + (y - y_0)(dx + \overline{\Delta dx}), \end{aligned}$$



az (1) egyenlet alkalmazásával. Innen a fajlagos nyúlás:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ (y - y_0) \left( 1 + \frac{\overline{\Delta dx}}{dx} \right) + y_0 \frac{\Delta dx}{dx} \right] = \\ &= \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ y_0 \frac{\Delta dx}{dx} + w_y \left( 1 + \frac{\overline{\Delta dx}}{dx} \right) \right].\end{aligned}$$

Evvel a (4) egyenlethez jutottunk. A felülvonással jelölt tagok azok, amelyek az irodalomban a levezetésekben hiányoznak, ezeket a továbbiakban elhanyagolásként fogjuk feltüntetni.

Helyettesítve a szöveget görbületi sugarakkal az (5a) szerint:

Pontosan:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ y - y_0 + y \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) \right] = \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[ \frac{y - y_0}{R_0} + y \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (26)$$

Elhanyagolással:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{R_0} \left[ y - y_0 + y_0 \left( \frac{R_0}{R} - 1 \right) \right] = \frac{R_0}{R_0} \left[ \frac{y - y_0}{R_0} + y_0 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (26a)$$

Az elhanyagolás tehát abban áll, hogy a képlet második tagjában figyelmen kívül hagyjuk a keresztmetszetben előálló deformálódást, az  $y$  és  $y_0$  közti eltérést. Az íveső kismértékű görbítésénél, vagyis ha  $R$  és  $R_0$  egymástól nem nagyon különböznek, az elhanyagolás kevés lehet. Egyenes csőre azonban  $R_0 = \infty$ , így:

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad \text{és} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{y_0}{R}. \quad (27) \text{ és } (27a)$$

Elhanyagolás által tehát egyenes csőnél a keresztmetszet deformálódása teljesen figyelmen kívül marad.

A feszültség:

$$\sigma_l = E\varepsilon = \frac{ER_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \frac{y - y_0}{R_0} + y \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (28)$$

A cső hosszirányú alakváltoztatásához szükséges munka:  $\Delta U_l = \sigma_l^2 V / (2E)$ , hol a gyűrűelem térfogata

$$V = l_0 \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} v \Delta s,$$

vagyis a gyűrűelem hosszának  $[l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0]$ , a cső falvastagságának ( $v$ ) és a deformált keresztmetszetből a gyűrűelemhez tartozó ívhossz ( $\Delta s$ ) szorzata. Ezeket behelyettesítve:

$$U_l = \frac{El_0 v}{2} \sum \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[ \frac{y - y_0}{R_0} + y \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (29)$$

Egyenes csőre:

$$U_l = \frac{El_0 v}{2} \sum \frac{y^2}{R^2} \cdot \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \cdot \frac{12 r_0^4}{R^2 v^2} \sum \left( \frac{y}{r_0} \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (30)$$

A (22a) egyenlet első részéből

$$\bar{U}_l = \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{3\pi} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \frac{2c}{R_0} \sin^3 \varphi \right]^2 d\varphi. \quad (30a)$$

A keresztirányú munka a (17) egyenletből figyelembe véve, hogy a (10) és (29) egyenletekkel kapcsolatosan a megállapításunk:  $r_0 d\varphi = \Delta s = ds \Delta\varphi/d\varphi$ :

$$\begin{aligned} U_q &= \frac{El_0 v^3}{24} \sum \frac{R_0 + y_0}{R_0} \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \\ &= \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \sum \frac{R_0 + y_0}{R_0} \left( \frac{r_0}{\varrho} - 1 \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (31)$$

A (22a) egyenlet második részéből:

$$\bar{U}_q = \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{2\pi} 3 \frac{v^2 c^2}{r_0^4} \cos^2 2\varphi d\varphi. \quad (31a)$$

Ezeket a kifejezéseket össze fogjuk hasonlítani az irodalomban szokásos kifejezésekkel, melyeknek elhanyagolásaira az előzőkben több helyen említést tettünk. A (30) és (31) egyenletek a pontos kifejezések, a (30a) és (31a) egyenletek tartalmazzák az irodalomban szokásos elhanyagolásokat az összehasonlítások céljaira.

Az integrálás helyett a (30a) és (31a) képletekben is összegezést végzünk. Ellenőriztük, hogy a kiértékeléseknél használt  $\Delta\varphi = \pi/12$  értékkel összegezésnél is kellő pontosságot érünk el. Kiértékeléseinkben a méreteket úgy választjuk, hogy  $r_0 = 1$  és  $El_0 v^3/(24 r_0^2) = 1$ . Így számításainkat egyszerűsítjük és áttekinthetővé tesszük. Ugyancsak az áttekinthetőség érdekében  $C = -2c$

és  $\lambda = v\bar{R}/(r_0^2)$  jelöléseket vezetjük be. Az utóbbiban  $\bar{R}$  helyettesítésével kapcsolatos bonyodalmakra a (24.) képlet disszkusziójánál már kitértünk.

Ezen átalakításokkal az alakváltoztatási munka egyenes csőre:

$$U_l + U_q = \frac{12}{\lambda^2} \sum y^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi + \sum \left( \frac{1}{\varrho} - 1 \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{12}{\lambda^2} H + K \quad (32)$$

$$\bar{U}_q = 9C^2 \sum \cos^2 2\varphi \Delta\varphi = \bar{K} \quad (32a)$$

Figyeljük meg, hogy ebben a két egyenletben  $H$ ,  $K$  és  $\bar{K}$  függetlenek a  $12/\lambda^2$  alakváltoztatási tényezőtől, csakis a deformáció  $C$  mértékétől függenek. Meghatározzuk őket külön-külön, akkor látni fogjuk  $U_l$  alakulását az egyenes cső deformációjának fokozódása szerint a terhelési tényező különböző értékeinél,  $K$  és  $\bar{K}$  összehasonlításával pedig megállapíthatjuk, hogy mit okoznak az egyszerűsítések a keresztirányú alakváltoztatási munka számításánál.

A hosszirányú alakváltoztatási munka összehasonlító számításánál azonban nehézségeink támadnak. Tárgyaltuk már a (11) és (24) egyenletekkel kapcsolatban, hogy az irodalomban szokásos elhanyagolásokkal levezetett képleteket egyenes csőre alkalmazni nem lehet. Így a (30) és (30a) egyenleteket egyenes csőnél nem tudjuk összehasonlítani. Ezért a hosszirányú alakváltoztatási munka összehasonlító számításánál ívcsőre kell képleteket levezetni és kiértékelni.

A (22a) egyenlet első részéből:

$$\Delta U_l = \frac{El_0 v}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[ \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \frac{2c}{R} \sin^3 \varphi \right]^2 r_0 d\varphi,$$

hol  $r_0 d\varphi$  értékére a (10) egyenlet után megállapítottuk, hogy ez a gyűrűelem hossza, tehát pontosabb számításhoz:  $\Delta s = ds \cdot \Delta\varphi/d\varphi$ , egyszerűsítéssel pedig:  $\Delta s = r_0 \Delta\varphi$ . Így algebrai átalakításokkal az összehasonlító képletek: Pontosabban:

$$\Delta H_i = \Delta U_{l1} = \frac{El_0 v r_0^2}{2R} \cdot \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[ \left( 1 - \frac{R}{R_0} \right) \sin \varphi - \frac{C}{r_0} \sin^3 \varphi \right]^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (33)$$

Elhanyagolással:

$$\Delta H_i = \Delta \bar{U}_{i1} = \frac{El_0 v r_0^2}{2R} \left[ \left( 1 - \frac{R}{R_0} \right) \sin \varphi - \frac{R}{R_0} \cdot \frac{C}{r_0} \sin^3 \varphi \right]^2 r_0 \Delta\varphi. \quad (33a)$$

Látjuk, hogy az irodalomban szokásos elhanyagolásoknak lényeges következménye az, hogy a (33a) egyenletben a négyzetes kifejezés második tagját  $R/R_0$  tényezővel vesszük számításba. Miután pedig  $R/R_0$  mindenkor kisebb egynél, az elhanyagolás által az alakváltoztatási munka nagyobbodik.



Ezt az  $R/R_0$  értéket azonban egyelőre nem ismerjük. Visszamegyünk tehát a (22a) egyenlethez, elvégezzük ennek  $c$  szerinti differenciálását a (22c) egyenletnek megfelelően, akkor a (24) egyenletben  $\bar{R} = R$  helyettesítéssel összefüggést kapunk  $C$  és  $R/R_0$  között. Az összefüggés az ívcső  $\lambda_0 = \nu R_0/(r_0^2)$  kifejezést is tartalmazza, ez az ívcső méreteitől függ, ezt  $\lambda_0 = 1$  értékkel számoltuk.

A másik elhanyagolás a (33a) egyenletben az  $R_0/(R_0 + y_0)$  tag hiánya. Ha ezt a tagot figyelembe vesszük, ez azt eredményezi, hogy a koordináta-rendszer első és második negyedében kisebb, a harmadik és negyedik negyedében nagyobb az alakváltoztatási munka, mert itt az  $y_0$  negatív. Ha az  $R_0/(R_0 + y_0)$  tagot az (5) szerint közelítjük, akkor kiegyenlítődik a különbség, amint ez a (22a) egyenlet integrálásánál be is következett. Az integrálás helyett azonban a tagnak pontos értékével számolva adódik is egy kevés különbség, amint azt az (5) egyenlet diszkussziójánál is említettük, ezt ezután számításba vettük.

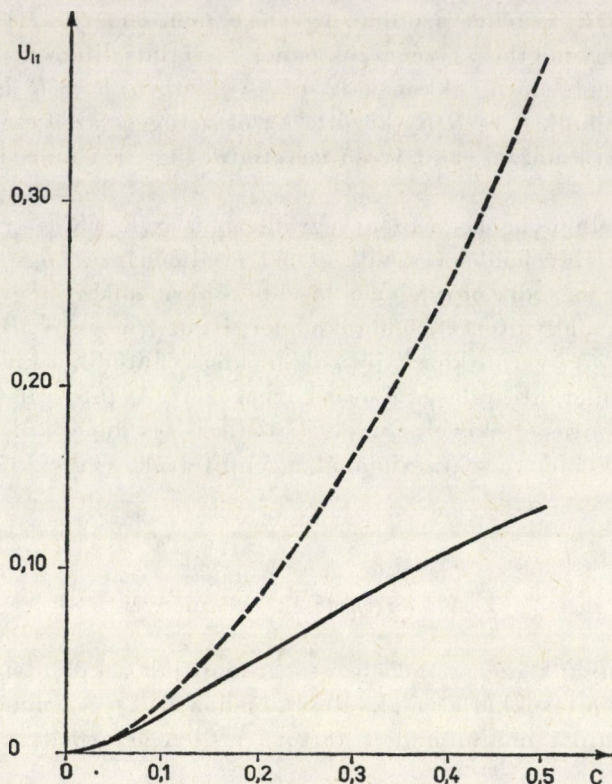
### 3. A kiértékelések eredményei

Tanulmányunk ezen részében összehasonlítjuk a különböző módszerekkel végzett számításokkal az alakváltoztatáshoz szükséges munkát, és felrögzöljük ezen munka minimumához tartozó erősen deformált keresztmetszeti alakot.

A pontos és az elhanyagolásokkal a hosszirányú és a keresztirányú alakváltoztatásoknál végzett összehasonlító kiértékelések eredményei az 5. és 6. ábrákon találhatóak. Az ábrák a deformálás mértékétől ( $C$  értékétől) függően mutatják az alakváltoztatási munka nagyságát. Ezen és a következő ábrákon az ordináták számértékeit a (31a) képlet után kifejtettek szerint számítottuk, erre utal az ordinátákon az 1 index. Teljes vonallal kihúzva a pontos számítás, szaggatott vonallal az elhanyagolásokkal, illetőleg az egyszerűsítéssel nyert eredmények.

A hosszirányú munka értékét az 5. ábra mutatja a (33) és (33a) képletekből számítva. Az elhanyagolásokkal számított értékek a deformálás nagybodásával eleinte kevésbé, később azonban igen erősen eltérnek a pontosan számítottaktól. Az eltérés már  $C = 0,05$ -nél is 12%,  $C = 0,30$ -nál eléri a 100%-ot,  $C = 0,50$ -nél 183%. Az elhanyagolásokat tehát kerülnünk kell, ha elfogadható eredményeket akarunk. Egyenes csőnél a (30), illetőleg  $R_0 = \infty$  helyettesítéssel a (33) képletből számíthatjuk a hosszirányú alakváltoztatási munkát.

A keresztirányú munka értékét a 6. ábra mutatja a (31) és (31a) képletekből számítva. Az eltérés eleinte igen kevés,  $C = 0,05$ -nél 1%,  $C = 0,15$ -től emelkedik 5% fölé, de ezután rohamosan növekszik,  $C = 0,50$ -nél 118%.



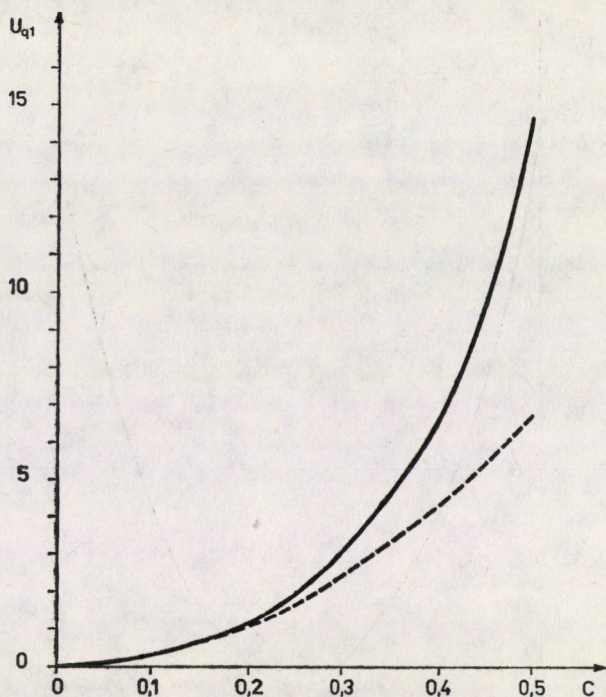
5. ábra

Ezek az értékek egyenes csőre vonatkoznak, ívcsőre a geometriai értéktől függően pár %-kal kisebbek lehetnek. A (19) egyenletben az integrálás lehetővé tétele érdekében történt egyszerűsítések tehát megengedhetők, ha a deformálás mértéke  $C = 0,15$  alatt marad, ezen felül azonban az integrálással nyert  $C_{opt}$  értékek csak tájékoztató jellegűek lehetnek.

Tekintettel a kimutatott eltérésekre a következőkben az elhanyagolások és egyszerűsítés kiküszöbölésével végezzük a kiértékeléseket a (32) egyenlet alkalmazásával az alakváltoztatási munka minimumának megállapítására, és ezt követően a deformált keresztmetszeti alakot számítjuk különböző alakváltoztatási tényezők ( $12/\lambda^2$ ) esetében.

A kiértékelésekhez elsősorban az alakváltoztatási tényezőnek ( $12/\lambda^2$ ) számszerű értékében kell megállapodnunk. Az az érték, amellyel a célok folyáshatárig történő deformálásnál lehet számítani, integrálással kapott  $C = 0,05$ -nek megfelelő  $12/\lambda^2 = 0,626$ . A deformált keresztmetszet leginkább ellaposodik  $C = 0,20$ -nak megfelelő  $12/\lambda^2 = 2,88$  értéknél, és a keresztmetszet piskóta-





6. ábra

alakja áll elő, de még az összegezésnek számításainknál szokott részletességénél megengedhetően  $C = 0,50$ -nek megfelelő  $12/\lambda^2 = 10,2857$  értéknél.

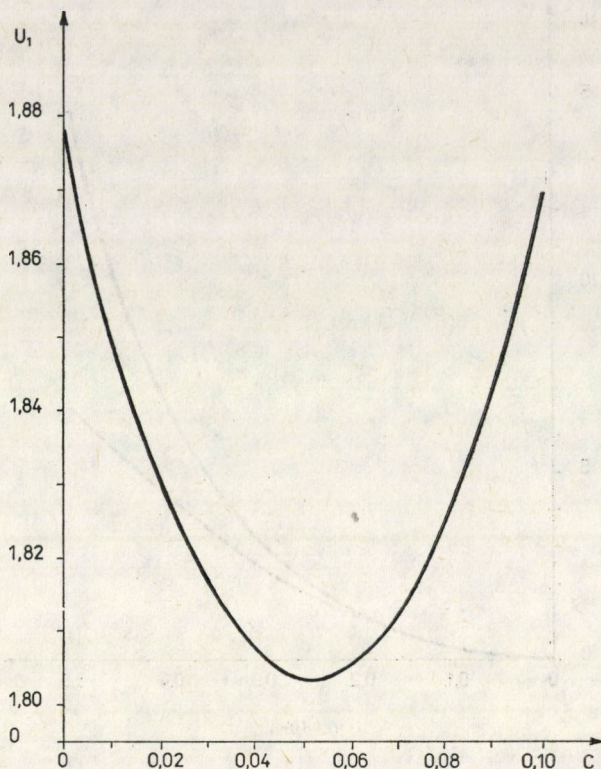
Kis alakváltoztatási tényező ( $12/\lambda^2 = 0,626$ ) számítási eredményeit a 7. ábra mutatja. Az alakváltoztatási munka ( $U_1 = U_{11} + U_{q1}$ ) nagysága a deformálás ( $C$ ) fokozódásával parabolikus jellegű. A lefutás megítélésére úgy ennél, mint a következő két ábránál az ordináta nem a nullvonalnál kezdődik, hogy a különbségek jobban láthatók legyenek. A minimum  $C = 0,05$  környezetében van, ugyanott, ahol azt integrálással kaptuk.

Közepes alakváltoztatási tényezőnél ( $12/\lambda^2 = 2,88$ ) a 8. ábrán találjuk a számítási eredményeket. Az ábra felépítése az előzőhöz hasonló, csak itt az alakváltoztatási munka minimuma  $C = 0,18$ -nál van, tehát érezhetően kevesebb, mint az integrálással kapott  $C = 0,20$  érték.

Nagy alakváltoztatási tényezőnél ( $12/\lambda^2 = 10,2857$ ) az alakváltoztatási munka értékének alakulása a 9. ábrán ugyanaz, mint az előző ábrákon, csak itt a minimum  $C = 0,33$  körül van, tehát sokkalta alacsonyabban, mint az integrálással kapott  $C = 0,50$  érték.

Meghatározva az alakváltoztatási munka minimumát, fel tudjuk rajzolni a deformált keresztmetszetek alakját a 10. ábrán. Az ábra a keresztmet-





7. ábra

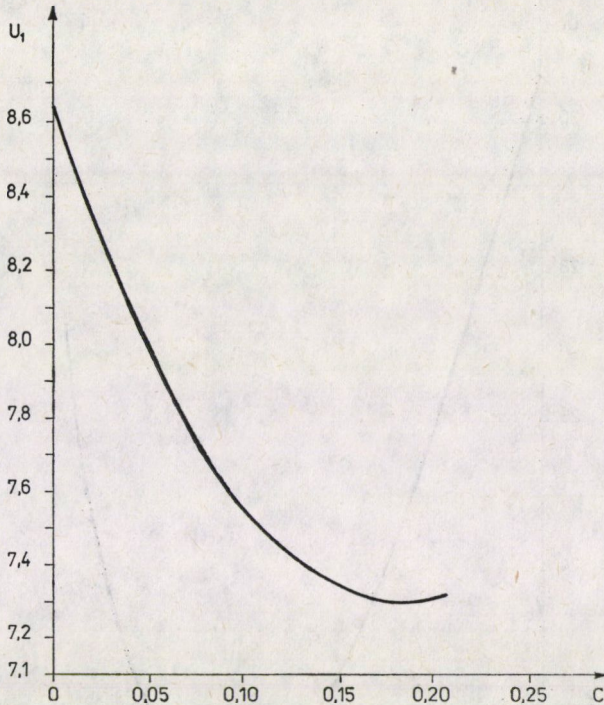
szeteknek csak negyedét mutatja, a többi negyed szimmetrikus a szomszédossal. Láthatjuk, hogy a terheletlenül ( $12/\lambda^2 = 0$ ) körkeresztmetszet hogyan deformálódik előbb oválissá, azután mind laposabbá, végül piskótaalakúvá.

Ez a piskótaalak, vagyis a keresztmetszet behorpadása a  $\varphi = \pm 90^\circ$  helyeken felveti azt a kérdést, hogy mennyiben elvárható egy ilyen alak a deformálásnál és mennyiben az az oka, hogy csak az első tagig mentünk el a harmonikus sor képzésénél. Ezért másodfokú megközelítéssel is számításokat végeztünk, vagyis a  $C_2 \cos 4\varphi$  tagot is hozzáfűztük az előzőhöz.

Ebben az esetben tehát  $r = \psi r_0 + C_1 \cos 2\varphi + C_2 \cos 4\varphi$ . A számítás lényegesen bonyolultabb nemcsak minden egyes érték számításánál, hanem mert most  $C_1$  és  $C_2$  által képzett kétszeresen végtelen sokaságból kell kikeresnünk az alakváltoztatási munka minimumát. Nem is végeztük el teljes részletességgel a számítást, hanem csak annyira, hogy tájékozódást nyerjünk az erősen deformált keresztmetszet alakulásának kérdésében.

A számítás eredményeit a 11. ábra mutatja. Az alakváltoztatáshoz szükséges munkát ( $U_1$ ) a  $C_2/C_1$ -től függően vittük fel, még pedig ettől a viszonyszám-



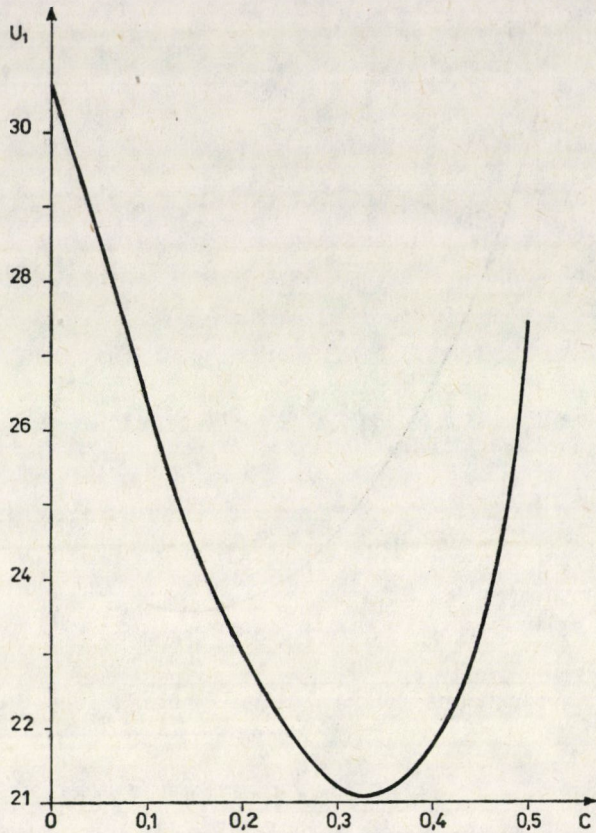


8. ábra

től függően azért, mert a levezetések folyamán kialakult, hogy ez a viszonyszám az, amelytől  $C_{opt}$  a terhelési tényezőtől és a deformálás mértékének változtatásától csak kis mértékben függ. Az ábrán három görbét látunk. Mind a három ugyanavval a  $12/\lambda^2 = 10,2857$  alakváltoztatási tényezővel van számítva, csak a szaggatott vonallal kihúzott görbénél  $C_1 = 0,3$ , a teljes vonallal kihúzottnál  $C_1 = 0,5$ , a pontozott vonallal kihúzottnál  $C_1 = 0,7$  a deformált keresztmetszeti alak első állandójának az értéke. Látjuk tehát, hogy ha egy bizonyos alakváltoztatási tényezővel különböző  $C_1$  állandókkal a  $C_2$  állandót növeljük, hogyan változik az alakváltoztatáshoz szükséges munka. Kimutattuk az előzőekben, hogy  $12/\lambda^2 = 10,2857$  alakváltoztatási tényezőnél  $C_1 = 0,33$ -nál van az alakváltoztatási munka minimuma. Ha növeljük a  $C_1$ -et, az alakváltoztatási munka eleinte csökken, kb.  $C_2/C_1 = 0,2$ -nél minimuma van, azután növekszik, még pedig annál hirtelenebbül, minél nagyobb mértékben tértünk el a  $C_1 = 0,33$ -tól.

Másodfokú megközelítéssel kisebb alakváltoztatási munkaminimumot tudunk elérni, mint az elsőfokú megközelítéssel. Amíg elsőfokú megközelítéssel  $12/\lambda^2 = 10,2857$  alakváltoztatási tényezővel a 9. ábrából leolvashatóan  $U_1 = 21,1$  az alakváltoztatási munka minimuma, addig a 11. ábrából leolvas-

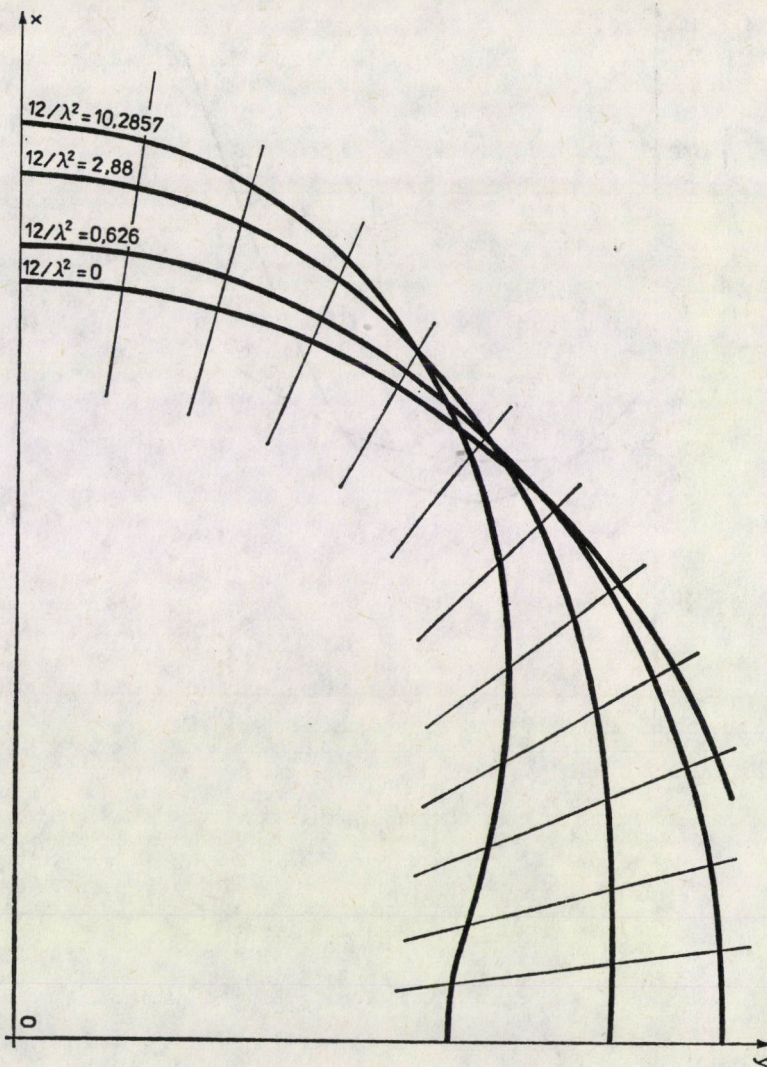




9. ábra

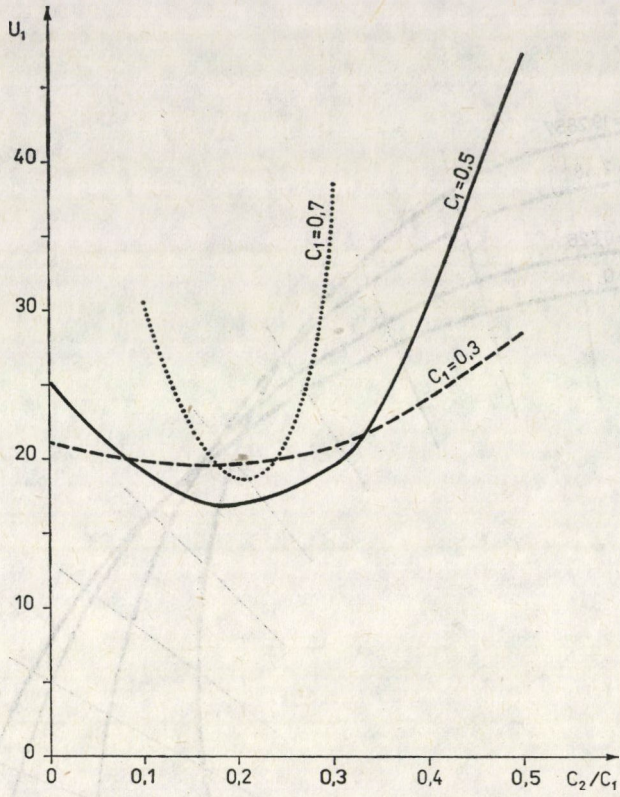
hatóan  $U_1 = 17,5$  is elérhető. A két minimumnak megfelelő keresztmetszeti alakot a 12. ábrán láthatjuk. Pontozottan a terheletlen körkeresztmetszet, szaggatott vonallal az elsőfokú, és teljes vonallal a másodfokú megközelítés. Horpadás mind a kettőnél megvan, de a lapos rész a másodfokú megközelítésnél lényegesen szélesebb. A cső keresztmetszeti alakja tehát igen nagymértékű hajlításnál: széles lapos rész a középben ( $\varphi = \pi/2$  környezetében), és egy kis, de véges görbületi sugár a széleken ( $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$  helyeken).



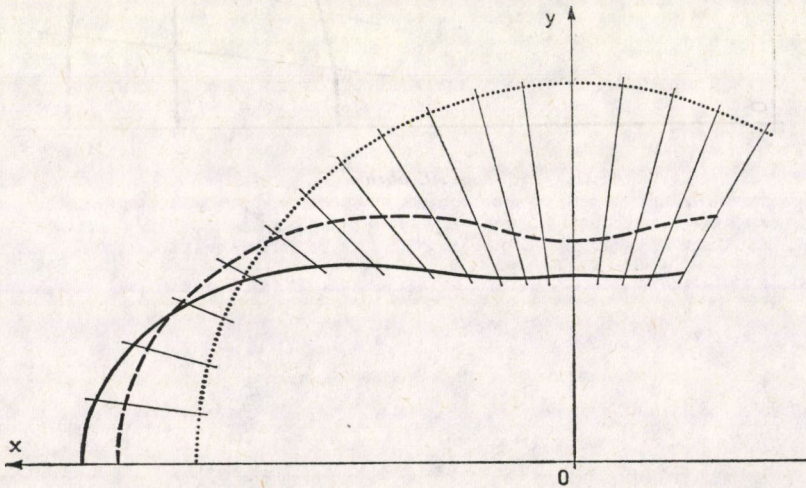


10. ábra





11. ábra



12. ábra



## IRODALOM

1. v. KÁRMÁN, TH.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre. *VDI Zeitschrift* **55** (1911), 1889—1895
2. HOVGAARD, W.: The Elastic Deformation of Pipes. *Journal of Math. Physics.* **6** (1926/1927), 69
3. MARKL, A. R. C.: Piping-Flexibility Analysis. *Transactions of American Society Mechanical Engineers*, 1955 Febr.
4. CSIRMAZ J.: Kompenzátorok méretezése és ezzel kapcsolatban a vékonyfalú ívcsövek feszültségi viszonyainak vizsgálata

**Pipe Bending Chiefly with Large Deformation.** — The paper examines once again the problem of pipe bending dealt with so much, so far. It deduces the solution in the way currently used by the literature on the subject, refers to the neglects and simplifications which have been used by the authors at that time, in order to assure an explicit solution to be used in practice. Suggestions are made to eliminate or to reduce them. A mathematical model has been constructed which permits to determine those values of a harmonic series which best fulfil the requirements of the solution. The effects of the neglects and simplifications used by the professional literature in case of different degrees of bending of the pipe are discussed and the deformation of the pipe at different rates of bending are shown. In case of a very strong deformation, the parameters of the deformed shape are calculated by an approximation of second degree. The deformed shape associated with the most favourable parameters is represented in case of approximations of the first and second degrees.

**Rohrbiegung hauptsächlich mit großer Verformung.** — Der Aufsatz untersucht das Problem der bisher oftmals behandelten Rohrbiegung. Die Lösung wird auf die in der Fachliteratur gebrauchte Art abgeleitet; es wird auf die Vernachlässigungen und Vereinfachungen hingewiesen, die seinerzeit die Autoren gemacht haben um eine explizite und praktisch brauchbare Lösung zu erreichen. Der Autor des vorhandenen Aufsatzes bringt deren Beseitigung oder Ermässigung in Vorschlag. Ein mathematisches Modell wird konstruiert, mit Hilfe desselben die Werte der Parameter einer harmonischen Reihe bestimmt werden können, die die Erfordernisse der Lösung am besten befriedigen. Behandelt werden auch die Auswirkungen der durch die Fachliteratur allgemein gebrauchten Vernachlässigungen und Vereinfachungen für die zu verschiedenen Maßen gebogenen Rohre. Die bei verschiedener Stärke der Biegung eintreffenden Verformungen des Rohres sind vorgeführt und bei sehr starken Verformungen die Parameter der Verformung werden auch durch eine Näherung zweiten Grades berechnet. Die den günstigsten Parametern entsprechende Verformung wird für den Fall einer Näherung ersten und zweiten Grades präsentiert.