

# A TEHERBÍRÁSCSÖKKENÉS PARADOXONÁRÓL VASBETON, ILLETVE ACÉL ANYAGÚ KERESZTMETSZETEK AXIÁLIS TEHERBÍRÁSÁNAK CSÖKKENÉSE A BETONACÉL, ILLETVE A FELÜLET NÖVELÉSE ESETÉN

KOLLÁR LÁSZLÓ\* P.

[Beérkezett: 1982. március 14-én]

A szerző azzal az eddig még nem ismert paradoxonnal foglalkozik, hogy bizonyos vasbeton- és acél anyagú keresztmetszetek valódi (nem „rugalmas”) teherbírása csökken, ha a területét megnöveljük. Ez nemcsak a szabványnak megfelelő egyszerűsített anyagmodell esetén mutatható ki, hanem a valóságos anyagtörvények esetében is. A szerző megadja a paradoxon létrejöttének szükséges és elégséges felételeit, valamint a teherbírás-csökkenés lehetséges maximumát.

## 1. A teherbírás fogalma

Az *elemi rugalmasságtan* elvein alapuló — hagyományos — keresztmetszetretezés (2a. ábrának megfelelő  $\sigma(\varepsilon)$  diagram) esetében gyakran egy, már régóta jól ismert paradox jelenség mutatható ki: ha bizonyos keresztmetszeteknek a semleges tengelytől legtávolabb eső részeit eltávolítjuk, akkor a nyomatéki teherbírásuk növekszik [1]. Például az 1b. ábrán vázolt keresztmetszet esetén a szélső háromszögek eltávolításával a teherbírás

$$\xi = \frac{K_1}{K_2} - 1 = 11,$$

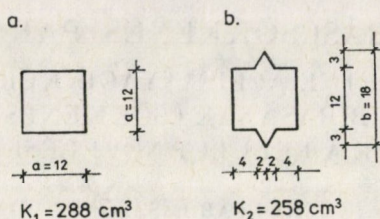
8%-kal megnő. (További példák [1]-ben találhatók.)

Ha a méretezést a *képlékenységtan* elvei alapján végezzük, akkor ez a — szemlélettel ellenkező — paradoxon létre sem jöhet. A képlékenységtan egyik alaptétele, az úgynevezett statikai tétel ([2], 111. o.) értelmében a keresztmetszet növelése nem csökkentheti a teherbírását.

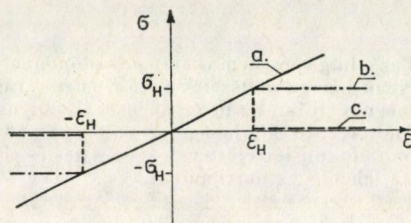
A *rugalmasságtan* elvein alapuló méretezés tulajdonképpen akkor tekinti a keresztmetszetet *tönkrementnek*, ha valamely szélső szálában a nyúlás vagy az összenyomódás eléri a  $\sigma_H$ -hoz tartozó  $\varepsilon_H$ -értéket (2. ábra), és nincs tekintettel a keresztmetszet további viselkedésére.

Ha megengedjük a szélső szál tönkremenetelét, de  $\varepsilon > \varepsilon_H$  esetén  $\sigma(\varepsilon) = 0$ , vagyis a *rugalmas—rideg* anyagtörvény szerint méretezünk (2c. ábra), akkor a keresztmetszet még vehet fel további terhet, ezt a többletet nevezzük *rugalmas teherbírási tartaléknak*.

\* Kollár László P. 1122 Budapest, Karap u. 9.



1. ábra. A rugalmas elvek alapján történő méretezés paradoxona



2. ábra. Anyagtörvények. a) rugalmas, b) rugalmas—képlékeny, c) rugalmas—rideg anyag-törvény

A *képlékenységtan* — amely feltételezi, hogy  $\varepsilon > \varepsilon_H$  esetén  $\sigma(\varepsilon) = \sigma_H$  (2b. ábra) —, akkor tekinti a szerkezetet tönkrementnek, ha a külső teher változatlan értéke mellett az alakváltozás korlátlanul növekedhetik. A keresztmetszetek képlékeny teherbírása mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a rugalmasságtan alapján számított teherbírás, ezt a többletet nevezzük *képlékeny teherbírás tartaléknak*.

Vizsgáljuk az 1a. és 1b. ábrán vázolt keresztmetszetek nyomatéki teherbírásait a különböző számítási feltételezésekkel.

Az 1a. ábrán vázolt keresztmetszet által a maximálisan felvehető nyomaték a hagyományos módszerrel (2a. ábrán látható  $\sigma(\varepsilon)$  diagram alapján) számolva

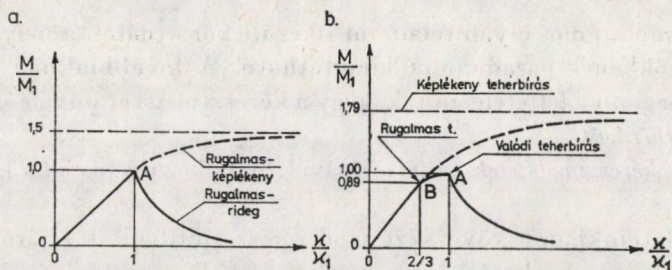
$$M_1 = K_1 \cdot \sigma_H = E \cdot I_1 \varkappa_1,$$

ahol

$$\varkappa_1 = \frac{\varepsilon_H}{\frac{a}{2}}.$$

A nyomaték és a szögelfordulás kapcsolatát a 3a. ábrán ábrázoljuk. Az *A* pont jelenti a *rugalmas tönkremenetel* helyét. A kapcsolat *O* és *A* között lineáris.

Ha *rugalmas—képlékeny* anyag (2b. ábra) feltételezésével számolunk, akkor az *A* pont után tovább emelkedik a nyomaték (szaggatott vonal). A keresztmetszetnek — amint a 3a. ábra mutatja — 50%-os *képlékeny teherbírás tartaléka* van.



3. ábra. A különféle teherbírás értelmezések összehasonlítása

Ha a „rugalmas—rideg” anyag törvény (2c. ábra) szerint vizsgáljuk a teherbírást, akkor a szélső szál tönkremenetele után a keresztmetszet által felvehető nyomaték rohamosan ( $1/\kappa^2$  szerint) csökken.

Vizsgáljuk most az  $M(\kappa)$  összefüggést az 1b. ábrán látható keresztmetszetre vonatkozóan az imént részletezett anyag törvények feltételezésével (3b. ábra).

A rugalmasságtani alapon számított tönkremenetel most  $0,89 M_1$ -nél következik be (B pont).

Rugalmas—képlékeny anyag törvény feltételezésével (2b. ábra) a B pont után a diagram a szaggatott vonal szerint tovább emelkedik. (A keresztmetszet képlékeny teherbírás-tartaléka 100%.)

Ha a 2c. ábra szerinti  $\sigma(\varepsilon)$  diagramot vesszük figyelembe, akkor a keresztmetszet által felvett nyomaték nagysága a B pont után is növekszik, éppen  $M_1$ -ig (A pont) és csak onnantól kezd gyorsan csökkenni. Vagyis a 2b. ábrán vázolt keresztmetszetnek rugalmas teherbírás-tartaléka van!!!

Az előbbi példák többféle tönkremenetelét figyelembe véve tisztázzuk a jelen dolgozatra vonatkozóan a teherbírás fogalmát.

A keresztmetszet teherbírásán azt az igénybevételt értjük, amelynél nagyobb a keresztmetszet nem tud felvenni, függetlenül attól, hogy a keresztmetszet szélén az anyag tönkrement-e vagy sem. Ezt a továbbiakban valódi teherbírásnak nevezzük.

Ez a „valódi teherbírás” definíció a teherbírás olyan értelmezését is magába foglalja, amelynél — pl. a későbbiekben vizsgált általánosabb  $\sigma(\varepsilon)$  anyag törvények szerint számolva — a keresztmetszet egyik része sem megy tönkre, de további alakváltozás csak csökkenő keresztmetszeti igénybevétel mellett lehetséges. Ilyenkor tulajdonképpen „szilárdsági stabilitásvesztés” következik be.

Az [1]-ben bemutatott paradoxon — a keresztmetszet csökkentése növeli a teherbírását — az imént vizsgált keresztmetszeteknél nem mutatkozik a valódi teherbírás számításakor, hiszen a háromszögek tönkremenetele után a négyzet viseli a terhet (3b. ábra). Felvethető azonban a kérdés, hogy a valódi teherbírással kapcsolatban bekövetkezhetik-e hasonló paradox jelenség? Vizs-

gálataink során számos olyan feladatot sikerült konstruálni, amelynél a valódi teherbírás-csökkenés paradoxona kimutatható. A továbbiakban általánosan vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy a keresztmetszet növelése csökkentse a valódi teherbírását.

Csak a keresztmetszetek teherbírásával foglalkozunk axiális igénybevétel esetén.

Vizsgálatainkban a következő módszer szerint fogunk eljárni: valamely keresztmetszethez meghatározunk egy, a valódi teherbírásának megfelelő igénybevételt (vagy igénybevétel párt). Ezután megnöveljük a keresztmetszetet és az igénybevétel hatásvonalát (vagy az igénybevétel pár egyikét) változatlanul tekintve, meghatározzuk az új keresztmetszet valódi teherbírásának megfelelő igénybevételt, s ezt összehasonlítjuk a korábbival.

A továbbiakban feltételezzük a Bernoulli—Navier-hipotézist, vagyis hogy a keresztmetszetek síkok maradnak. Arról az anyagról, amellyel a keresztmetszetet megnöveljük — ez lehet a keresztmetszet eredeti anyagától különböző is — feltesszük, hogy a  $\sigma(\varepsilon)$  diagramjának az elejére igaz a

$$\sigma(\varepsilon) \neq 0 \quad (1)$$

feltétel. (Ez rugalmas, merev—képlékeny, szinuszos stb. anyagtörvényekre nyilvánvalóan igaz.)

## 2. Vasheton anyagú téglalap keresztmetszet-vizsgálata

Feltételezzük, hogy a keresztmetszet anyaga csak nyomást tud felvenni.

### 2.1. Tetszőleges — leszálló ággal is rendelkező — $\sigma(\varepsilon)$ diagramú anyagból készült téglalap keresztmetszet-vizsgálata

A keresztmetszet anyagának  $\sigma(\varepsilon)$  diagramja a 4. ábrán látható.  $\varepsilon_i$  az az alakváltozás, amely  $F_{ti}$  törőteher hatására a keresztmetszet nyomott szélő szálában keletkezik.

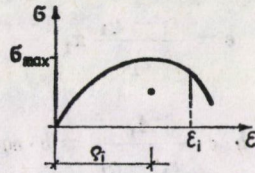
Definiáljuk a következő mennyiségeket, amelyek csak a  $\sigma(\varepsilon)$  diagramtól függenek:

$$A_i = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2)$$

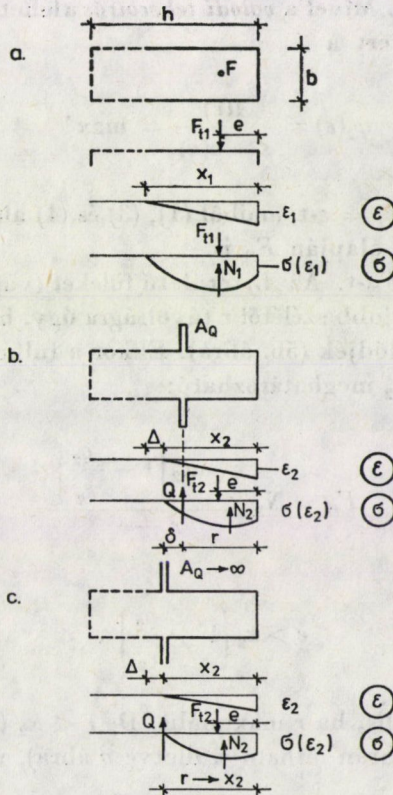
$$Q_i = \frac{\int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{A_i} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i}{Q_i} \quad (4)$$

Működjek  $F$  nyomóerő az 5a. ábrán felrajzolt, csak nyomásnak ellenálló téglalap keresztmetszet középvonalában a keresztmetszet jobb szélétől  $e$  távolságban. Tételezzük fel, hogy a semleges tengely — a keresztmetszet elfordulási tengelye — a keresztmetszeten belül helyezkedik el. A keresztmetszet valódi teherbírását jelöljük  $F_{t1}$ -gyel. Módosítsuk a keresztmetszet alakját az 5b. ábra szerint, és a megnövelt keresztmetszet teherbírását jelöljük  $F_{t2}$ -vel.



4. ábra. Csak nyomást felvevő anyag  $\sigma(\epsilon)$  diagramja



5. ábra. A teherbírás-csökkenés vizsgálata

Határozzuk meg  $F_{i1}$ -et,  $F_{i2}$ -t, majd a kettő hányadosát:

• Az 5a. ábra alapján a vetületi egyensúly:

$$F_{i1} = N_1 = b \cdot A_1 \cdot \frac{x_1}{\varepsilon_1}. \quad (5)$$

A nyomatéki egyensúly alapján:

$$e = \frac{\varepsilon_i - \varrho_1}{\varepsilon_1} x_1. \quad (6)$$

(5)-ből és (6)-ból:

$$F_{i1} = b \cdot e \cdot \frac{A_1}{\varepsilon_1 - \varrho_1} = b \cdot \varphi_1(\varepsilon_1), \quad (7)$$

ahol

$$\varphi_1(\varepsilon_1) = \frac{A_1}{\varepsilon_1 - \varrho_1},$$

$e$  és  $b$  pedig konstansok. Mivel a *valódi teherbírá*s a lehetséges teherintenzitások közül a legnagyobb, ezért a

$$\varphi_1(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{\varepsilon - \varrho(\varepsilon)} = \max! \quad (8)$$

feltételből kapjuk meg  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ -t, amiből (1), (3) és (4) alapján  $A_1$ ,  $\varrho_1$  és  $\alpha_1$  meghatározhatók, majd (7) alapján  $F_{i1}$  is.

Határozzuk meg  $F_{i2}$ -t. Az  $A_Q$  területű füleket (vagy acélbetétet) helyezük el a keresztmetszet jobb szélétől  $r$  távolságra úgy, hogy a semleges tengely  $\Delta = \mu x_1$ -gyel jobbra tolódjék (5b. ábra). Ekkor a fülben  $Q$  erő ébred. A nyomatéki egyensúlyból  $F_{i2}$  meghatározható:

$$F_{i2} = N_2 \frac{r - x_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varepsilon_2}\right)}{r - e}.$$

Mivel

$$e > x_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varepsilon_2}\right),$$

ezért  $F_{i2}$  akkor minimális, ha  $r$  maximális. De  $r < x_2$  (ellenkező esetben nem alakulhatna ki az 5b. ábrán látható  $\varepsilon$ , illetve  $\sigma$  ábra), vagyis

$$\delta = (x_2 - r) \rightarrow 0$$

esetén lesz  $F_{12}$  minimális, ekkor a vetületi egyensúly csak úgy tud létrejönni, ha  $A_Q \rightarrow \infty$ , amiben (1) értelmében erő fog ébredni, és  $\delta$  akkora lesz, hogy  $A_Q$ -ban éppen a vetületi egyensúly miatt megkívánt  $Q$  erő ébredjen (5c. ábra).

A nyomatéki egyensúly:

$$F_{12} \cdot (x_2 - e) = N_2 \cdot \varrho_2 \cdot \frac{x_2}{\varepsilon_2}.$$

$F_{12}$ -t kifejezve:

$$F_{12} = b \cdot \frac{x_2^2}{x_2 - e} \cdot \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2^2} = b \cdot \frac{x_2^2}{x_2 - e} \cdot \varphi_2(\varepsilon_2), \quad (9)$$

ahol

$$\varphi_2(\varepsilon_2) = \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2^2}.$$

Mivel a *valódi teherbírás* esetén lehetséges a legnagyobb teherintenzitás adja a törőterhet, ezért a

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{A_Q}{\varepsilon^2} = \max! \quad (10)$$

feltételből tudjuk meghatározni  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ -t, majd (2), (3) és (9)-ből rendre  $A_2$ -t,  $\varrho_2$ -t, és  $F_{12}$ -t.

A továbbiakban vizsgáljuk  $F_{12}$  és  $F_{11}$  hányadosát.

$$\kappa = \frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{A_2 \cdot \varrho_2 \cdot x_2^2 b}{(x - e) \cdot \varepsilon_2^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varrho_1}{A_1 e b}.$$

Kiküszöböljük  $\kappa$ -ból a keresztmetszet jellemzőit. Behelyettesítve (6)-ot és  $x_2 = x_1 - \mu x_1$ -et, rendezés után a következőt kapjuk:

$$\kappa = \left[ \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \frac{A_1 \cdot \varrho_1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1} \right] \cdot \left[ \frac{(1 - \mu)^2}{1 - \alpha_1 \mu} \right] = \gamma(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \beta(\alpha_1; \mu), \quad (11)$$

ahol az első zárójelet  $\gamma$ -val, a másodikat  $\beta$ -val jelöltük.

A teherbírás akkor csökken, ha  $\kappa < 1$ . Határozzuk meg a

$$\beta = \frac{(1 - \mu)^2}{1 - \alpha_1 \mu}$$

kifejezés minimumát  $\mu$  szerint. Ekkor a

$$\frac{d\beta}{d\mu} = 0$$

összefüggésből

$$\mu = \begin{cases} 1 \\ \frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1} \end{cases} \quad (11)$$

adódik. A  $d^2\beta/d\mu^2$  vizsgálatából kiderül, hogy  $\alpha > 1$  esetében

$$\mu = \frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1} \quad (12)$$

adja a minimumot. Így

$$\beta = \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2}.$$

Ezt (11)-be helyettesítve:

$$\kappa = \gamma(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \beta(\alpha_1) = \left[ \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \frac{A_1 \cdot \varrho_1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1} \right] \cdot \left[ \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} \right] \quad (13)$$

Kimondhatjuk, hogy a *teherbíráscsökkenés általános feltétele az, hogy a keresztmetszet anyagának anyagtörvényére igaz legyen a*

$$\kappa < 1,$$

ahol  $\kappa$  (13) alapján határozható meg, és csak az anyag  $\sigma(\varepsilon)$  diagramjának jellemzőitől függ; ezek közül  $\varepsilon_1$ ,  $A_1$ ,  $\alpha_1$  és  $\varrho_1$  (8) alapján határozható meg,  $\varepsilon_2$ ,  $A_2$  és  $\varrho_2$  pedig (10) alapján. A teherbíráscsökkenés relatív nagyságát a

$$\xi = \frac{F_{11} - F_{12}}{F_{11}} = 1 - \kappa$$

képlettel tudjuk számítani.

$$\gamma \geq 1,$$

mivel (10) alapján

$$\frac{A_2 \varrho_2}{\varepsilon_2^2} = \max \left( \frac{A \varrho}{\varepsilon^2} \right).$$

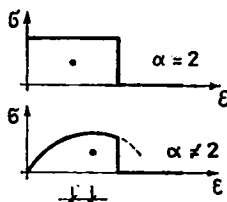
Ha a  $\sigma(\varepsilon)$  diagramnak *nincs leszálló ága*, akkor  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\max}$  miatt  $\gamma = 1$  adódik. Tehát a leszálló ág rontja a teherbíráscsökkenést. Ennek nagyságát számpéldán fogjuk vizsgálni.

Ha  $\gamma = 1$ , vagyis  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , akkor a teherbíráscsökkenés csak  $\beta$ -tól függ:

$$\kappa = \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} \quad (14)$$



$\alpha < 1$ , ha  $\alpha_1 \neq 2$ ! Vagyis a teherbírás-csökkenés szükséges feltétele  $\gamma = 1$  esetén, hogy a (dolgozó) ábra súlypontja ne essék egybe a tökéletesen kitöltött  $\sigma(\varepsilon)$  diagram súlypontjával (6. ábra). Ez szemléletes formában — az esetek többségére — fogalmazza meg az előző általános feltételt.



6. ábra. A teherbírás-csökkenés feltétele

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy ha a  $(0, \Delta)$  tartományba ( $\Delta = \mu x_1$ ,  $\mu \rightarrow (12)$ ) bármilyen kicsi fület is teszünk, a teherbírás mindenképpen csökken. Nagysága természetesen kisebb, mint  $A_Q \rightarrow \infty$  esetén.

## 2.2. Vizsgálat az MSZ. 15022/1—71 alapján

A beton  $\sigma(\varepsilon)$  diagramja a 12b. ábrán látható, ahol a szabvány előírása szerint

$$\varepsilon_t = 2,5\text{‰}.$$

A továbbiakban azokkal az esetekkel foglalkozunk, melyekben a keresztmetszetben eredetileg nem volt acélbetét. Ha volt ui. a keresztmetszetben eredetileg acélbetét, akkor tulajdonképpen már nem négyszögkeresztmetszetet vizsgálunk; erre vonatkozóan a 4. fejezetben található megállapítások.

*Első eset.* Téglalap keresztmetszet teherbírás-csökkenése végtelen területű acélbetét hatására

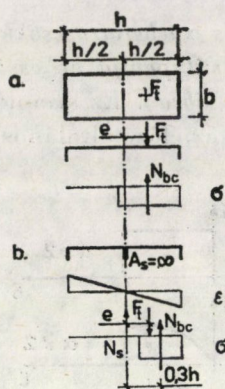
A 12b. ábrának megfelelő  $\sigma(\varepsilon)$  diagram esetén  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  miatt  $\gamma = 1$  adódik. (2), (3) és (4) alapján

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varrho_1} = \frac{2,5}{1,5} = 1,667,$$

innen (14) alapján a maximális relatív teherbírás-csökkenés:

$$\xi = 1 - \alpha = 1 - \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} = 4\%.$$

Határozzuk meg a téglalap keresztmetszet teherbírási vonalait (az  $F(M)$  függvényt).



7. ábra. Téglalap keresztmetszet vasalása

A külpontosságot ( $e$ ) a tartó geometriai középpontjától mérjük (7. ábra). \*-gal a dimenziótlantított mennyiségeket jelöljük:

$$F^* = \frac{F}{b \cdot h \cdot \sigma_{bH}},$$

$$M^* = \frac{M}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{bH}},$$

$$e^* = \frac{e}{h}.$$

Vasalatlan tartó (7a. ábra) esetében a nyomóerőt csak a beton veszi fel. Az egyensúlyi egyenletből

$$|M_t^*| = \frac{F_t^* - F_t^{*2}}{2}$$

adódik. Ez az „ $a$ ” vonalnak megfelelő görbe, amit 8a. és 8b. ábrákon felrajzoltunk.

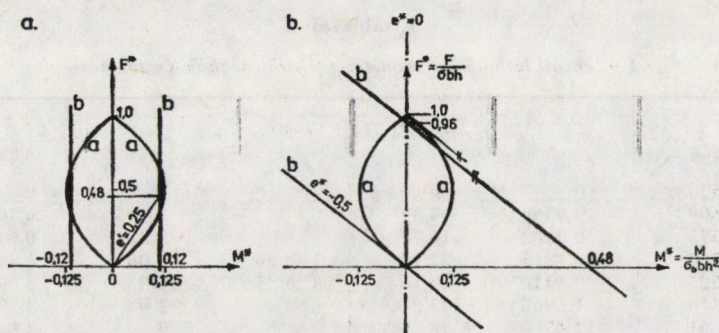
Középre helyezett végtelen területű vas esetében (7b. ábra) az  $\varepsilon$  ábrának át kell mennie a geometriai középponton, mivel ellenkező esetben  $A_s$ -ben végtelen nagyságú erő ébred. Ezért az egyensúlyi egyenlet a következőképpen alakul:

$$F_t \cdot e = \pm 0,4 \cdot h \cdot b \cdot \sigma_{bH} \cdot 0,3 h.$$

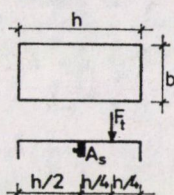
Átrendezve:

$$\frac{F_t}{b \sigma_{bH} h} \cdot \frac{e}{h} = \pm 0,12,$$

$$M_t^* = F_t^* \cdot e^* = \pm 0,12.$$



8. ábra. Téglalap keresztmetszet teherbírásának csökkenése az MSZ 15022/1-71 alapján  
 a) középre elhelyezett végtelen területű vas hatására; b) bal szélre elhelyezett végtelen területű vas hatására



9. ábra. A keresztmetszet kialakítása

Ezt a 8a. ábrán a „b” vonallal ábrázoltuk. A teherbírás-csökkenés tartományát a vonalkázott rész mutatja.

A 8b. ábrán az „a” vonal a vasalatlan keresztmetszet teherbírási vonala, a „b” vonal a bal oldalon, a tartó legszélén, végtelen területű vasalással megerősített keresztmetszetnek a teherbírási vonala. A teherbírás-csökkenés maximuma 4%.

*Második eset.* Téglalap keresztmetszet teherbírás-csökkenése véges területű acélbetét hatására

Tekintsük a 9. ábrán levő keresztmetszetet, amire  $h/4$  külpontossággal nyomóerő hat. Tartó teherbírása:

$$F_{t1} = \frac{h}{2} \cdot b \cdot \sigma_{bH}$$

Helyezzünk  $A_s$  területű acélt a keresztmetszet geometriai középpontjába. Ekkor az  $x$  tengely jobbra toódik, és a tartó teherbírása a korábban tárgyalt okokból csökkenni fog.

Statikai egyenletek:

$$F_{t2} = 0,8 x b \sigma_{bH} + N_s,$$

$$N_s h/4 = b \sigma_{bH} \cdot 0,8 x \left( \frac{h}{4} - 0,4 x \right).$$

1. táblázat

A 9. ábrán látható keresztmetszet teherbírásának csökkenése

| $x/h$  | $\eta$ | $A_s$ [cm <sup>2</sup> ] | Vasalás             | $\mu$ [%] | $\xi$ [%] |
|--------|--------|--------------------------|---------------------|-----------|-----------|
| 0,625  | 0      | 0                        |                     | 0         | 0         |
| 0,600  | 0,0360 | 4,39                     |                     | 2,195     | 0,16      |
| 0,575  | 0,0882 | 10,75                    |                     | 5,38      | 0,64      |
| 0,550  | 0,1815 | 22,12                    | 7 $\varnothing$ 20  | 11,06     | 1,44      |
| 0,525  | 0,4410 | 50,46                    | 10 $\varnothing$ 25 | 25,23     | 2,56      |
| 0,510  | 1,1965 | 145,8                    |                     | 72,9      | 3,39      |
| 0,501  | 12,45  | 1518                     |                     | 759       | 3,94      |
| 0,5001 | 124,95 | 15231                    |                     | 7620      | 3,994     |

Geometriai egyenlet:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_h \cdot \frac{x - h/2}{h}$$

Fizikai egyenlet:

$$N_s = E_a \varepsilon_a A_s$$

Fejezzük ki  $A_s$ -t és  $\xi$ -t  $x$  függvényében:

$$A_s = \frac{b \cdot 3,2 \sigma_{bH} h}{\varepsilon_h E_a} \frac{\left(0,25 - 0,4 \frac{x}{h}\right) x^2}{\left(\frac{x}{h} - 0,5\right) h^2} = \vartheta \cdot \eta$$

A relatív teherbírásnövekedés:

$$\xi = \frac{F_{t2} - F_{t1}}{F_{t1}} = 1 - 2 \left[ 0,8 \frac{x}{h} + 3,2 \left( 1 + 0,5 \frac{h}{x} \right) \right]$$

A keresztmetszet adatai legyenek a következők:

$$h = 500 \text{ mm,}$$

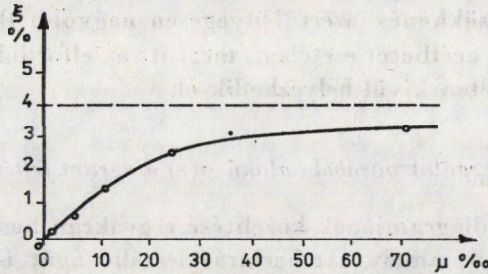
$$b = 400 \text{ mm,}$$

$$\varepsilon_h = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$E_a = 210\,000 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{B 200 esetén } \sigma_{bH} = 10 \text{ N/mm}^2$$

Ekkor  $\vartheta = 121,9$ -re adódik.  $x = 0,625 h$ -től  $0,5 h$ -ig változhatik. Vizsgáljunk meg néhány értéket (lásd 1. táblázat, ill. 10. ábrát).



10. ábra. A teherbírás csökkenése a vashányad függvényében

2.3. Vizsgálat a II. feszültségi állapotnak megfelelő diagram feltételezésével

A II. feszültségi állapotnak megfelelő beton  $\sigma(\epsilon)$  diagramja a 12f. ábrán látható.

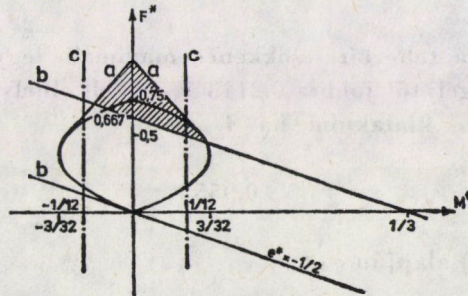
A teherbírási vonal a 11. ábrának megfelelően alakul, ahol az „a” vonal a vasalatlan keresztmetszet teherbírási vonala, „b” a keresztmetszet bal szélén végtelen mennyiségű vassal megváltoztatott keresztmetszeté, a külpontosságot a geometriai középponttól mérve, „c” pedig a geometriai közép-pontban végtelen mennyiségű vassal ellátott keresztmetszeté.

Az „a” vonal  $F^* = 0$ -tól  $F^* = 0,5$ -ig parabola, e fölött ehhez érintőle-gesen csatlakozó egyenes.

A „c” vonal megmutatja, hogy középre tett vasalás esetében a maxi-málisan felvehető nyomaték nagysága 11,1%-kal csökken. A 11. ábrán a kö-zépre helyezett vasalás esetében bekövetkező teherbírás-csökkenés tartomány az „a” és a „c” vonal közé essék.

A „b” vonalat vizsgálva azt látjuk, hogy a maximális relatív teherbírás-csökkenés  $e = 0$ , azaz  $M = 0$  esetén 33%!

A 11. ábrán a bal szélre elhelyezett acélbetét esetében a teherbírás-cök-kenés tartományát vonalkázással jelöltük.



11. ábra. Téglalap keresztmetszet teherbírási vonalai a II. feszültségi állapot anyagtvörvényeit feltételezve

A teherbíráscsökkenés azért lényegesen nagyobb (háromszoros), mint a középre helyezett acélbetét esetében, mert itt az elfordulási tengely kezdetben a keresztmetszeten kívül helyezkedik el.

#### 2.4. Vizsgálat parabola alakú $\sigma(\varepsilon)$ diagram feltételezésével

A beton  $\sigma(\varepsilon)$  diagramjának közelítésére gyakran használják a parabola alakú anyag törvényt, amely a teherbírási leszálló ágát is figyelembe veszi.

Legyen a  $\sigma(\varepsilon)$  diagram  $\sigma = 2\varepsilon - \varepsilon^2$  alakú (12g. ábra). Határozzuk meg (2), (3), (4)-et:

$$A_i = \int_0^{\varepsilon_i} (2\varepsilon - \varepsilon^2) d\varepsilon = \varepsilon_i^2 \cdot \frac{3 - \varepsilon_i}{3},$$

$$Q_i = \frac{\int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon(2\varepsilon - \varepsilon^2) d\varepsilon}{A_i} = \frac{\varepsilon_i}{4} \cdot \frac{8 - 3\varepsilon_i}{3 - \varepsilon_i},$$

$$\alpha_i = \frac{4(3 - \varepsilon_i)}{8 - 3\varepsilon_i}.$$

Határozzuk meg (8) alapján  $\varphi_1$ -et:

$$\varphi_1 = \frac{A_i}{\varepsilon_i - Q_i} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i^3 - 6\varepsilon_i^2 + 9\varepsilon_i}{4 - 3\varepsilon_i} = \max!$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon_i} = 0 \text{ — ből:}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_i = 1,2679.$$

Innen:

$$\alpha_1 = 1,6511.$$

(12) alapján:

$$\mu = \frac{2 - 1,6511}{1,6511} = 0,2113.$$

Vagyis, hogy a teherbíráscsökkenés maximális legyen, a füleket az eredeti elfordulási tengelytől jobbra 0,2113  $x_1$ -re kell elhelyezni, és itt fog az új elfordulási tengely is kialakulni, ha  $A_Q \rightarrow \infty$ .

(13) alapján:

$$\beta = 0,9553.$$

Képezzük (10) alapján  $\varphi_2$ -t:

$$\varphi_2 = \frac{A_i Q_i}{\varepsilon_i^2} = \frac{8\varepsilon_i - 3\varepsilon_i^2}{12} = \max!$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon_i} = 0\text{-ből:}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_i = \frac{4}{3}$$

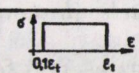
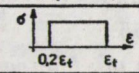
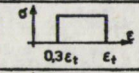
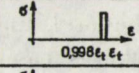
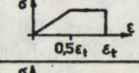
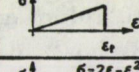
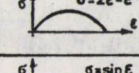
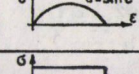
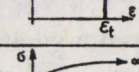
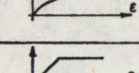
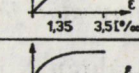
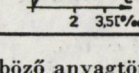
(12)-ből:

$$\gamma = 1,00241.$$

A relatív teherbírásnövekedés:

$$\xi = 1 - \kappa = 1 - \gamma \cdot \beta = 1 - 1,00241 \cdot 0,9553 = 4,24\%$$

Ha  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  közelítéssel élünk, akkor  $\gamma = 1$ , a teherbírásnövekedés 4,47 %-ra adódnék, vagyis  $\varepsilon^i$  változásának figyelembevétele alig (5%-os relatív hibával) változtatja meg a teherbírásnövekedést.

|    | Anyagtörvény  | Kitértés<br>ség [%] | Teherbí-<br>rásnö-<br>vekedés [%] |
|----|---|---------------------|-----------------------------------|
| a. |    | 90                  | 1                                 |
| b. |    | 80                  | 4                                 |
| c. |    | 70                  | 9                                 |
| d. |    | 0,2                 | 99,6                              |
| e. |   | 75                  | 4,9                               |
| f. |  | 50                  | 11,1                              |
| g. |  |                     | 4,24                              |
| h. |  |                     | 5,13                              |
| i. |  | 100                 | 0                                 |
| j. |  | (->100)             | 0                                 |
| k. |  | 80,7                | 3,15                              |
| l. |  | 81,0                | 2,83                              |

12. ábra. Különböző anyagtörvények összehasonlítása

### 2.5. Különböző anyagtörvények összehasonlítása

A 12. ábrán látható, hogy különböző anyagtörvények esetében mekkora a lehetséges teherbíráscsökkenés. Ha az anyagtörvényt matematikailag egy Dirac-féle impulzus függvény írja le,  $\sigma = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ , akkor a teherbíráscsökkenés 100%.

Merev — korlátozottan képlékeny (12i. ábra) és tökéletesen képlékeny (12j. ábra) anyagtörvény esetén nincs teherbíráscsökkenés.

A teherbírás-csökkenés lehetséges értéke annál nagyobb, minél kevésbé mutat az anyag képlékeny tulajdonságokat. Ezért jöhet létre a II. feszültségi állapot alapján történő méretezés esetén sokkal nagyobb (nyolcszoros) teherbíráscsökkenés, mint a III. feszültségi állapot anyagtörvényét figyelembe véve.

## 3. Acél anyagú téglalap keresztmetszet vizsgálata

### 3.1 A teherbíráscsökkenés feltétele általános anyagtörvény esetén

Vizsgálódásunkban csak azzal az esettel foglalkozunk, mely akkor forog fenn, ha a  $\sigma(\varepsilon)$  diagram monoton nő.

Ha a  $\sigma(\varepsilon)$  diagramú anyag *nem tökéletesen képlékeny*, (vagyis létezik egy olyan  $\varepsilon_T$ , hogy ha  $\varepsilon > \varepsilon_T$ , akkor  $\sigma(\varepsilon) = 0$ , a húzott és nyomott részre egyaránt) *ezenkívül a húzott és a nyomott rész közül legalább az egyik nem merev-képlékeny*, akkor létezik olyan igénybevétel, amelynek a valódi teherbíráshoz tartozó értéke csökkenni fog, ha a keresztmetszet valamely meghatározott helyére fület teszünk.

Ebben az esetben is annál nagyobb lehet a teherbíráscsökkenés, minél kevésbé mutat az anyag képlékeny tulajdonságokat.

A fentiek bizonyítását a levezetés hosszadalmassága miatt nem közöljük.

Az előbbi feltétel lényegesen erősebb, mint a csak nyomást felvevő anyagra tett, ahol bármilyen helyre felhelyezett fül esetén van olyan igénybevétel, amelynek a valódi teherbíráshoz tartozó intenzitása csökken.

13a., 13b. ábra esetén nem jön létre, 13c., 13d. és 13e. ábra esetén létrejöhet a teherbíráscsökkenés.

A feltétel természetesen igaz a csak nyomást felvevő anyagokra is; ekkor a húzott rész nem lehet merev-képlékeny, ami megegyezik az  $\alpha \neq 2$  feltétellel.

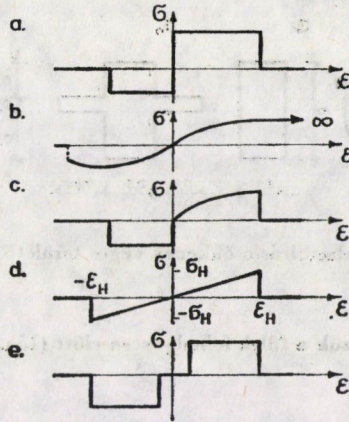
### 3.2. Vizsgálat lineáris anyagtörvény feltételezésével

Az anyagtörvény legyen a 13d. ábrának megfelelő.

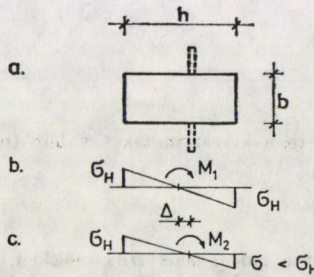
3.2.1. Számpélda végtelen területű fül esetén.

A keresztmetszet kialakítását a 14a. ábrán vázoltuk.





13. ábra. Különböző  $\sigma(\epsilon)$  diagramok



14. ábra. Lineáris anyagtörvény vizsgálata

A fül felhelyezése előtt a nyomatékra

$$M_1 = \frac{\sigma_H \cdot b \cdot h^2}{6}$$

érték adódik.

A végtelen területű fül felhelyezése után:

$$M_2 = \left[ \frac{(0,5 + \mu)^2}{2} \frac{2}{3} + \frac{(0,5 - \mu)^2}{2} \frac{2}{3} \frac{0,5 - \mu}{0,5 + \mu} \right] b \cdot h^2 \sigma_H$$

A teherbírásnövekedés akkor maximális, ha a fül helyét meghatározó  $\mu = \Delta/h$  arány:

$$\mu = 0,0774.$$

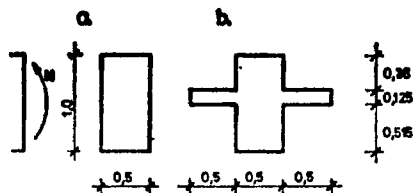
Ekkor

$$\xi = \frac{M_1 - M_2}{M_1} = 7,18 \%$$

adódik.

3.2.2. Számpélda véges területű fül esetén.

Tekintsük a 15. ábrán látható keresztmetszeteket. (Az anyagtörvény legyen most is a 13d. ábrán vázolt lineárisan rugalmas.) A felhelyezett fülek hatására a felülete 25%-kal meg-



15. ábra. Teherbírás-csökkenés véges területű fül esetén

nőtt. A keresztmetszeti jellemzők a fülek felhelyezése előtt (15a. ábra):

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0,5 \text{ m}^2, \\
 y_1 &= 0,5 \text{ m}, \\
 I_1 &= \frac{0,5}{12} \text{ m}^4, \\
 K_1 &= \frac{1}{12} \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

A fülek felhelyezése után (15b. ábra):

$$\begin{aligned}
 F_2 &= 0,625 \text{ m}^2, \\
 y_2 &= 0,5155 \text{ m}, \\
 I_2 &= 0,04243 \text{ m}^4, \\
 K_2 &= 0,08231 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

A felület növelése ellenére a keresztmetszet valódi (nyomatéki) teherbírása csökken:

$$\xi = 1 - \frac{K_2}{K_1} = 1,23\%!$$

Hangsúlyozzuk, hogy itt a *valódi teherbírás* csökken, és ez merőben más, mint az 1. ábrán vázolt keresztmetszet esetén bekövetkező *rugalmas teherbírás*csökkenés, ahol a füleket a szélső szálak közelében helyeztük el és nem a semleges tengely közelében.

#### 4. Nem téglalap keresztmetszet vizsgálata

A dolgozat korábbi levezetései (2. és 3. fejezet) csak a négyszög keresztmetszetre vonatkoztak. Vizsgáljuk most meg a teljesség igénye nélkül, hogy a keresztmetszet teherbírásának csökkenése hogyan függ a tartó alakjától.

##### 4.1. Vizsgálat lineáris anyagtörvény feltételezésével

Legyen a keresztmetszet  $\sigma(\varepsilon)$  diagramja lineáris (13d. ábra).

Bizonyítható, hogy kétszeresen szimmetrikus keresztmetszet esetén a maximális relatív teherbírás-csökkenés végtelen területű „fül” esetében következik be. Értéke

$$\xi = 1 - 0,5 (\sqrt{a^2 + 4a} - a), \quad (15)$$

ahol

$$a = \frac{Ah^2}{I_y}.$$

(A betűk értelmezését lásd a 16. ábrán.)

A relatív teherbíráscsökkenés maximuma (15) alapján csak a keresztmetszet kialakításától függ.  $\xi(a)$  a vizsgált tartományon monoton csökken, tehát akkor a maximális, ha  $a$ -t a lehető legkisebbre választjuk.  $a$  akkor kicsiny, ha a keresztmetszet területe kicsi, inercianyomatéka pedig nagy. Ennek szélső értéke a 0 gerincvastagságú, úgynevezett „ideális I szelvény”-nél van; ennél

$$a = 4.$$

Ebben az esetben a teherbíráscsökkenés akkor a legnagyobb, ha a végtelen területű fül a semleges tengelytől

$$\delta h = 0,2071 h$$

távolságra kerül, ekkor (15) szerint:

$$\xi = 17,1\%!$$

A 16. ábrán néhány keresztmetszet esetén a teherbíráscsökkenés maximuma megtalálható.

#### Szám példa

A keresztmetszet kialakítását lásd a 17a. ábrán.

A keresztmetszeti adatok:

$$F_1 = 184\,000 \text{ mm}^2,$$

$$I_1 = 5,7743 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4,$$

$$K_1 = \frac{I}{2050} = 2,8168 \cdot 10^6 \text{ mm}^3.$$

Helyezzünk el egy további övet a 17b. ábra szerint, ekkor a keresztmetszeti adatok:

$$F_2 = 243\,200 \text{ mm}^2,$$

$$I_2 = 6,1542 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4,$$

A súlypont eltolódása  $y_s = 178,5 \text{ mm}$ ,




$$K_2 = \frac{I_2}{2228,5} = 2,6993 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

A valódi relatív teherbíráscsökkenés:

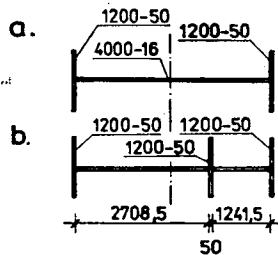
$$\xi = 1 - \frac{K_2}{K_1} = 4,17\%.$$

Ha a gerinc vastagsága zérus, akkor a harmadik — a másik kettővel azonos területű — fül hatására bekövetkező relatív teherbíráscsökkenés 7,18%.

Általánosabb anyagtörvény esetére a vizsgálatot e dolgozatban nem végezzük el. Néhány megjegyzést azonban ehhez is fűzünk.

| Keresztmetszet  | $\alpha = Ah^2/l$ | $\xi$ [%] |
|---|-------------------|-----------|
|  | 12                | 7,1       |
|  | 8                 | 10,1      |
|  | 4                 | 17,1      |

16. ábra. Néhány keresztmetszet összehasonlítása



17. ábra. A keresztmetszet kialakítása

A teherbíráscsökkenés létrejöttének lehetősége továbbra is — a keresztmetszet alakjától függetlenül — csak az anyagtvörvénytől függ a 3.1. szerint. A keresztmetszet alakja csak a teherbíráscsökkenés nagyságát befolyásolja, azt viszont jelentős mértékben.

A legveszélyesebb (legnagyobb teherbíráscsökkenést lehetővé tevő) keresztmetszet az ideális I szelvény. A két öv lehet különböző területű, és általános esetben a veszélyes teherállás a külpontos nyomás lesz.

## 5. A jelenség viszonya a képlékenységtanhoz

Látszólag ellentmondásba kerültünk a képlékenységtannak — az 1. fejezetben említett — statikai tételével, mivel azt találtuk, hogy bizonyos esetekben a keresztmetszet teherbírása, mégpedig a valódi teherbírása anyag hozzáadása esetében csökken. Az ellentmondásnak az az oka, hogy a képlékenységtan tétele csak tökéletesen képlékeny anyagokra vonatkozik, az általunk vizsgált jelenség viszont csak korlátozott alakváltozó képességű anyagok esetében következik be. A tökéletesen képlékeny anyagú keresztmetszeteknél a valódi teherbírás azonos a képlékeny teherbírással, véges nyúlóképesség esetén viszont különbözhet attól.

A szerkezetépítésben használt — és egyáltalán a természetben található — anyagok sohasem tökéletesen képlékenyek. Ez arra figyelmeztet bennünket, hogy a képlékenységtan tételeit — illetve annak szemléletét — csak bizonyos kritikával alkalmazzuk a valódi építőanyagokra.

## IRODALOM

1. CSONKA PÁL: A képlékenységtan alkalmazása az építőipari gyakorlatban. *Építési és Közlekedéstudományi Közlemények* (1966), 527—539
2. KALINSZKY SÁNDOR: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest 1975

**Paradox of the Load-bearing Capacity of Cross-sections.** — The paper deals with the paradox unknown up to now, that the real (not „elastic”) load-bearing capacity of some reinforced concrete and steel cross sections decreases if their area is increased. This phenomenon comes about not only in the case of simplified material laws, prescribed in the Building Codes, but also in the case of actual material laws. The necessary and sufficient conditions for the coming about of this paradox and the possible maximum of the decrease of the load-bearing capacity are given.

**Paradox der Abnahme der Tragfähigkeit bei Vergrößerung des Querschnittes.** — Es wird das bisher unbekannte Paradox untersucht, daß die wirkliche (nicht „elastische”) Tragfähigkeit gewisser Stahlbeton- und Stahlquerschnitte abnimmt, falls ihre Fläche vergrößert wird. Das kommt nicht nur bei vereinfachten Stoffgesetzen laut der Bestimmungen zustande, sondern auch bei wirklichen Stoffgesetzen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Zustandekommen dieses Paradoxes und das mögliche Maximum der Tragfähigkeitsabnahme werden angegeben.