EGY SACCHERI-FÉLE KONTRA-EUKLIDESZI RENDSZER NYOMAI ARISTOTELES MŰVEIBEN

A PÁRHUZAMOSAK EUKLIDES-FÉLE POSZTULÁTUMÁNAK TÖRTÉNELMI ELŐZMÉNYEI

Írta: TÓTH IMRE*

„Le contre vient avant le pour”
Picasso

Bevezetés

1. A nem-euklideszi geometria megjelenését, amint ismeretes, történelmileg az ún. *párhuzamosak problémája* előzte meg. A matematika utólagos fejlődése által rendelkezésünkre bocsátott fogalomkészlet segítségével ez a probléma a következőképpen fogalmazható meg: *bebizonyítandó, hogy az* EUKLIDES *Elemeiben szereplő párhuzamosak posztulátuma a Bolyai-féle abszolút geometria tétele.* BOLYAI-féle abszolút geometrián értjük pl. a geometriának HILBERT által axiomatizált rendszerét, amelyből a párhuzamossági axióma *hiányzik.* A párhuzamosak problémája tehát arra az explicite be nem vallott *à priori* jellegű meta-matematikai felfogásra alapul, amely szerint az ún. euklideszi geometria összes tételeinek a levezetésére elegendő a HILBERT-féle 20 axióma közül csupán 19, nevezetesen, a párhuzamosak axiómáján kívül az összes többi; e felfogás értelmében az egyetemes *klasszikus ún. euklideszi geometria azonos volna a Bolyai-féle abszolút geometriával.*

A geometria posztulátumainak csoportjában az V-ik rendszámot viselő (és egyben utolsó) állítás, eredeti megfogalmazásában a következőképpen hangzik: *ha* két *koplanáris egyenest egy harmadik egyenes úgy metsz, hogy a metsző egyenes egyik oldalán létrejött két belső szög együttesen kisebb mint* $2R$ — *akkor a két koplanáris egyenes metszi egymást*; *éspedig — fűzi hozzá* EUKLIDES — *a metsző egyenesnek azon az oldalán, amelyiken a két belső szög összege kisebb mint* $2R$[1]. A párhuzamosak problémájának alapjánál tehát az a világosan talán be nem vallott, öntudatlan hiedelem állott, hogy ez az állítás egy abszolút-geometriai tétel, amely a Bolyai-féle abszolút geometria axiómáiból szigorúan levezethető.

A párhuzamosak problémájára vonatkozó történelmi források

2. A párhuzamosak problémájának történetét illetőleg egy igen megbízható és elméleti tekintetben is nagy értékű forrásmunkával rendelkezünk: PROKLOS-nak, az V. századbeli athéni neoplatonikus iskola vezető egyéniségének, az *Elemek I*-ső könyvéhez írott, kitűnő kommentárjait tartalmazó munkájával.[2] PROKLOS művéből indirekt módon mindenekelőtt arra következtethetünk, hogy a szóban forgó állítást

* *Universitatea Bucuresti* Catedra de Fundamentele Matematicii.

[1] *Euclidis Elementa,* (ed. Heiberg), vol. I, Lipsiae 1883.

[2] *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii* (ed. Friedlein), Lipsiae 1873; a továbbiakban ennek a kiadásnak a lap- és sorszámai szerint idézünk.

maga EUKLIDES vette fel a bizonyítatlan (és egyben bizonyíthatatlannak feltételezett) posztulátumok sorába: ugyanis mind PROKLOS, mind az általa idézett őt megelőző szerzők személyesen EUKLIDES-nek róják fel, rosszallólag, ennek az alapvető jellegű állításnak a posztulátumok közé való besorolását; ezzel egyetemben, EUKLIDES-nek tulajdonítják az implicit elismerését annak, a mai szemmel nézve nagy jelentőségű, meta-matematikai ténynek, hogy a kérdéses állítás nemcsak mindaddig *bizonyítatlan*, hanem mindörökké *bizonyíthatatlan* is volna.[3]

Ennél az értesülésnél még fontosabb talán, hogy PROKLOS közli saját, önmagában igen figyelemre méltó és szellemes megoldási kísérletét a párhuzamosak problémájának megoldására.[4] PROKLOS, továbbá még arról is tudósít bennünket, hogy a párhuzamosak problémájának megoldásával már előtte is kísérleteztek. Mindenekelőtt PTOLEMAIOS egy könyvét említi, amelyet a neves, II. századbeli csillagász, teljes egészében a párhuzamosak problémája megoldásának szentelt; művében, PROKLOS közli e könyv lényeges részének kivonatát és PTOLEMAIOS kísérletét egyben szigorú bírálatnak is aláveti, pontosan kimutatván a benne rejlő fogyatékosságot, amely a kísérletet teljes lényegében teljesen meghiúsítja.[5] PROKLOS ismer azonban egy i. e. I. században GEMINOS által írott munkát is, amelyben ez — más természetű érvekre alapozva — már akkor kételyét fejezte ki az EUKLIDES által bevezetett alapvető állítás posztulátum-jellegét illetőleg. PROKLOS művéből azonban nem tűnik ki világosan, hogy GEMINOS a puszta kételyen túl megkísérelte-e volna a probléma megoldását is.[6] Végezetül, PROKLOS említést tesz még, a párhuzamosak kérdésével kapcsolatban, POSEIDONOS, — GEMINOS mesterének nevéről is, aki a párhuzamos egyenesek számára egy új definíciót vezetett be és ezeket mint egy síkban fekvő *aequidistans* egyeneseket határozta meg[7] (eltérően az *Elemek I* 23 definíciójától, amely a párhuzamosakat, negatíve, mint egymást *nem metsző* koplanáris egyeneseket definiálja). Minden valószínűség szerint ennek az új definíciónak a bevezetésére éppen a párhuzamosak problémája megoldására irányuló kísérletek folyamán került sor: a POSEIDONOS-féle definícióból ugyanis a posztulátum szigorúan levezethető — természetesen csupán azért, mert ez a definíció, az Euklides-féle posztulátumot, rejtett formában már tartalmazza. Azt a feltevést, hogy már GEMINOS és POSEIDONOS is effektíve megkísérelték volna a párhuzamosak problémájának (kétségtelen azonban, hogy igen primitív jellegű) megoldását — némileg alátámasztani látszik az a körülmény, hogy a kérdéssel foglalkozó első középkori arab nyelvű szerzők nem ismerték kimutatható módon PROKLOS művét, ezzel szemben SIMPLIKIOS-on keresztül, vagy talán közvetlenül is — ismerték GEMINOS és POSEIDONOS műveit és feltételezhető, hogy kísérleteiket a két görög szerző kísérletének elvetélt jellege ösztönözte volna.[8]

[3] Proklos 183, 20—23; 365, 5—6.
[4] Proklos 371, 10—373, 2.
[5] Proklos 191, 23; 365, 7—367, 2; 368, 1—26.
[6] Proklos 183, 14—15.
[7] Proklos 176, 6—9; a párhuzamos egyenesek *ekvidistanciáját* Euklides az *Elem. I. 33* és *I. 34* tételekben bizonyítja.
[8] Az utóbbi években B. A. Rozenfeld, A. P. Juskevics orosz nyelven közzétették szinte az összes számbajöhető arab szerző művét a párhuzamosok problémájára vonatkozólag; ezekben sehol nem történik explicit hivatkozás Proklosra és annak közvetlen hatása nem is látszik kimutathatónak. Ezzel szemben An-Nairizi kommentárműve (megjelent arabul 900 körül — latinul pedig már a XII. században, Gerhardus Cremonensis fordításában, majd nyomtatásban: *Anaritii, in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii,* ed. M. Curtze, Lipsiae 1899) kimondottan szinte teljes egé-

Bármennyire valószínű is ez a feltevés, kétségtelen tény marad azonban, hogy a párhuzamosak problémájára valamint az első figyelemre méltó megoldási kísérletre vonatkozó első *hiteles, eredeti* forrás mindeddig változatlanul, PROKLOS műve volt.

A párhuzamosak problémájának helyzete a XVII. és XVIII. században

3. PROKLOS műve és kísérlete jelentős — mondhatnám döntő — történelmi befolyást gyakorolt a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek további fejlődésére Európában, főleg a XVI. századtól kezdve. Munkájában PROKLOS mindenütt a legnagyobb csodálattal beszél az *Elemek I.* könyvének logikai tökéletességéről és rendezettségéről és EUKLIDES-t csupán abban hibáztatja — és ezt igen súlyos hibának tartja! — hogy a kérdéses állítást bizonyítás nélkül fogadta el és a posztulátumok sorába helyezte.[9]

Ez a felfogás vált uralkodóvá a XVII. századtól kezdve: eszerint a párhuzamosak posztulátuma *éktelen folt* az *Elemek* kristálytiszta, harmonikus épületén[10] és SACCHERI, a XVIII. század elején, már az egész megoldási kísérletet egyenesen olyan etikai jellegű feladatként jellemzi, amelynek kötelességszerű célja EUKLIDES-t ettől a tűrhetetlen *folttól megtisztítani.*[11] Ez már csak azért is vált az ő szemében is ilyen halaszthatalan becsületbeli kötelességgé, mert ő már világosan felismerte, hogy a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek története tulajdonképpen egy eredendő bűn állandó felderítésében és a bűn leleplezője által való azonnali megismétlésében áll: mindegyik szerző az előző szerzők kísérleteinek

szében Simplikios (Gerhardus Cremonensis fordításában: Sambelichius) és Geminos (a latin szövegben Aganis) munkáit követi; (*Anaritii*, etc., 25—27, 34—35; 65—73; főleg a 70—72. oldalon közölt és Anaritius tanúsága szerint Geminostól származó bizonyítási kísérlet elemei szinte az összes későbbi arab szerzőknél fellelhetők, így Al-Hazen, X. század, majd Naszreddin, XIII. század, munkáiban). — Omar Khayyam (*Kommentarien zu den schwierigen Postulaten der Bücher von Euklid;* oroszra fordította B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszledovanija V 1952, 69, 71, 74.) többször hivatkozik Anaritius míg Nasreddin (*Traité qui guérit des doutes en matière des lignes paralleles;* oroszra fordította B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszledovanija XIII. 1960, 523—524) Simplikios munkájára hivatkozik; a szerzőre való explicit hivatkozás nélkül Nasreddin munkájában (*op. cit.* 485) megjelenik Geminos egy érve is a párhuzamosak posztulátuma bizonyításának szükségességére vonatkozólag; (ezt Proklos is idézi op. cit. 176, 18—177, 25) és ugyancsak egy Geminostól származó és Anaritius által részletesen idézett (*Anaritii* etc.70—72) bizonyítás (Nasreddin, *Traité* etc. 516—518). — Simplikios hatására vonatkozólag lásd meg B. A. Rosenfeld et A. P. Youschkevitch, *Les démonstrations du 5-ème postulat d'Euclide chez Tabit ibn Qurra et Schams ad-Dim al-Samarkandi,* (Istoriko Matemat. Isszledovanija XIV. 1961, 591).

[9] Proklos 76, 21—23; 176, 18—19; 182, 24—183, 6; 183, 20—184, 5; 191, 21—193, 9; 364, 19—21.

[10] Sir Henry Savile beszél első ízben (egy Oxfordban, 1621-ben megjelent munkájában) az *Elemek* két *foltjáról,* szépséghibájáról, amelyek közül az egyik a párhuzamosak posztulátumának bizonyítatlan volta („In pulcherrimo Geometriae corpore duo sunt naevi,..."; lásd, P. Stäckel—F. Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss; eine Urkundensamlung;* Leipzig 1895, 18). Wallis is már erről a *foltról* beszél (*De postulato quinto;* lásd: *Opera,* vol. II, 665, Oxford 1693). — A kifejezés szinte közkedveltté vált és mindenesetre kitűnő visszhangra talált a XIX. század elejének rendkívül romantikus akusztikájú szellemi környezetében. „Meg-foghatatlan, hogy ez az el-háríthatatlan homály ez az örök nap-fogyatkozás ez a' motsok hogy hagyatott a' Geometriába, ez az örök felleg a' szűz tiszta igazságon" — fakad ki Bolyai Farkas egy Marosvásárhelyről Bécsbe, 1820 tavaszán Jánoshoz írott levelében (Stäckel P., *Bolyai Farkas* és *Bolyai János geometriai vizsgálatai,* I. kötet, 75, Budapest 1914).

[11] Erről ír Saccheri, művének előszavában, és munkájának jellegzetesen barokk címében erről, mint egy már befejezett tényről beszél; *Euclides ab omni naevo vindicatus,* etc. Mediolani 1733, IX.

a kritikájából, hibáinak gyakran rendkívül elmés kimutatásából indul ki és munkáját egy — a megbírált elődénél általában raffináltabb —, megoldási kísérlet bemutatásával fejezi be, amely azonban ismét a kárhoztatott elõd alapvető hibáját ismétli. Ez a hiba — mint PROKLOS-nál is mindig egy *petitio principii* — egy *logikai rövidzárlat*, amelyben a bizonyítandó tétel, implicit formában már a feltevésekben benne foglaltatik. Mindezek a kísérletek *direkt* úton igyekeztek a problémát megoldani, azaz a párhuzamosak euklidesi állítását közvetlenül igyekeztek a Bolyai-féle abszolút geometria axiómáiból levezetni és mindig ott vétették el a dolgot, hogy az abszolút axiómák közé rejtett formában gyakran szinte öntudatlanul már felvettek egy az euklideszi posztulátummal logikailag ekvivalens tételt.

A párhuzamosak problémájának megoldására irányuló indirekt módszerek

4. Csupán a múlt század végén vált ismeretessé,[12] hogy a párhuzamosak problémájának történetében egy a klasszikus úttól gyökeresen eltérő kísérlet is történt a kérdés megoldására. SACCHERI 1733-ban megjelent művéről van szó, amelyben a szerző arra tesz kísérletet, hogy a párhuzamosak problémáját *indirekt* úton oldja meg.[13] Tőle valószínűleg függetlenül hasonló módon kísérelte meg a kérdés megoldását LAMBERT is (1766), aki azonban munkáját nem publikálta.[14] (Nem lehet kimutatni, hogy LAMBERT SACCHERI munkáját ismerte volna; munkájának egész felépítése arra mutat, hogy SACCHERI eljárásának legfeljebb az alapötletét ismerhette.)

Sokáig azt hitték, hogy SACCHERI volt az első, aki a probléma tárgyalásába az *indirekt* módszert bevezette. D. E. SMITH azonban, egy 1935-ben megjelent dolgozatában, felhívta a figyelmet arra, hogy az indirekt bizonyítás *ötlete* már OMAR KHAYYAM, majd őt követőleg NASZREDDIN munkáiban felmerül.[15] Nemrég vált hozzáférhetővé orosz fordításban AL HAZEN arab-, valamint a neves dél-franciaországi LEVI BEN GERSON héber nyelvű munkája (ez az első nyugat-európai mű a párhuzamosak problémájáról) és ezekben, ugyancsak arra történik kísérlet, hogy egy alapvető euklideszi jellegű tétellel szemben álló hipotézis lehetetlenségét bizonyítsák.[16] Meg kell azonban jegyeznem, hogy mindezekben a kísérletekben csupán az alkalmazott eljárás *indirekt* jellegének puszta *ötlete* a figyelemre méltó, mert maga a kísérlet — az eredeti feltevés következményeinek a követése, igen hamar megfeneklik. SACCHERI munkája még csak össze sem hasonlítható elődeiével: ő az első, aki a tompaszög és a hegyesszög hipotéziseit a triviális következményeken *messze-*

[12] Saccheri művére 1889-ben hívta fel ismét a figyelmet Beltrami (lásd. L. Bonola—H. Liebmann, *Die nicht-euklidische Geometrie; historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung*, Leipzig 1908,45).

[13] Saccheri, op. cit. 5—6.

[14] A Lambert hagyatékában őrzött kéziratot első ízben J. Bernoulli (a neves matematikus egyik unokája) tette közzé nyomtatásban, 1786-ban. Ismét közli Stäckel és Engel, *Theorie der Parallellinien* c. gyűjteménye (152—207).

[15] Smith, D. E., *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri* (Scripta Mathematica VIII. 1935, 5—10).

[16] Ibn-al-Haytam, *Livre des commentaires aux introductions des Elementes d'Euclide* (oroszra ford. B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszled. XI. 1958, 743—762); Gersonide, L., *Commentaire des Introductions aux livres d'Euclide;* (héberből oroszra fordította I. G. Polsky; Istoriko Matemat. Isszled. XI. 1958, 763—776).

menően túl követi és aki ezekre a hipotézisekre már valóságos *geometriai rendszereket épít, amelyekben már szerepelnek a későbbi abszolút, illetve hiperbolikus és elliptikus geometriák lényeges, alapvető tételei is.*

A XIX. század elején LEGENDRE bebizonyított egy igen nevezetes abszolút tételt, amelynek értelmében a *háromszög szögeinek összege nem lehet nagyobb mint* $2R$; ez a tétel — amely azóta LEGENDRE nevét viseli, lényegében már SACCHERI munkájában megtalálható.[17]

SACCHERI azt bizonyítja, hogy *az abszolút geometrián belül megfogalmazható hipotézis, amely azt állítja, hogy a háromszög összege nagyobb mint* $2R$ — *a* BOLYAI-*féle abszolút geometrián belül a következő flagráns ellentmondáshoz vezet: „a nem-metsző egyenesek metszik egymást"*. Ez a tétel igen lényeges, mert ennek segítségével a tompaszög hipotézise eliminálható és etikai szempontból ez a siker arra ösztönöz, hogy a hegyesszög hipotézise esetében is (annak, az euklideszi posztulátumra, illetve az ezzel ekvivalens derékszög hipotézisre vonatkozólag, látszólag, *logikusan szimmetrikus helyzete* miatt) hasonló eredményt várjunk. SACCHERI-nek azonban talán legnagyobb, személyes érdeme, hogy szigorúan *abszolút-geometriai* tételek segítségével bebizonyította, hogy a párhuzamosak problémája esetében a kizárt harmadik és az ebből folyó kettős negáció logikai törvénye *alkalmazható*; csupán ezzel teremtette meg — első ízben! — az indirekt módszer alkalmazhatóságának logikai alapjait. Nevezetesen SACCHERI, egy — korában még teljesen új —, *induktív* eljárással — bebizonyította a BOLYAI-féle abszolút geometria következő alapvető tételét: *a három hipotézis* (a tompaszög, a derékszög és a hegyesszög hipotézise)[18] — *kölcsönösen kizárja egymást*;[19] egyetlen háromszög esetében már a formális logika önmagában elegendő annak a belátására, hogy a szögek összege nem lehet csak *vagy* nagyobb mint $2R$, *vagy* egyenlő $2R$-rel, *vagy* kisebb mint $2R$, és ha e három eset közül valamelyik teljesül, akkor a másik kettő nem teljesülhet. Ha azonban a *háromszögek univerzumáról* van szó, akkor elvileg igenis lehetséges, hogy egyik háromszögben a szögek összege egyenlő legyen $2R$-rel, míg más háromszögben nagyobb, ismét más háromszögben pedig kisebb legyen mint $2R$. Az ami az euklideszi geometriában ugyanis biztosítja, hogy a háromszögek szögeinek összege *általánosságban*, minden egyes háromszög esetében, $2R$-rel legyen egyenlő — az éppen a párhuzamosak euklideszi posztulátuma, ami azonban az abszolút geometriában

[17] „Diesen Lehrsatz pflegt man unberechtigterweise den *ersten Legendreschen Lehrsatz* zu nennen. Wir sagen unberechtigterweise, weil Saccheri mit seinem Beweis der Falschheit der Hyp. d. stumpfen Winkels fast ein Jahrhundert früher diesen Lehrsatz begründet hatte" (Bonola—Liebmann, *i. m.* 60). — Valóban ez a tétel fellelhető Saccheri idézett művében, (19—20, Prop. XIV). — Ámde épp olyan jogosulatlan volna ezt a tételt Sacheri nevével jelölni, hiszen, — amint alább látni fogjuk — ez már Aristotelesnél szerepel!; (lásd az itt közölt 1. és 2. sz. töredéket, *Anal. Prior. 66 a 11—15*).

[18] Saccheri (*i. m.* 6) lényegében a következőképpen fogalmazza meg a három hipotézist: a négyszög szögeinek összege *nagyobb* mint négy derékszög *(tompaszög hip.)*; a négyszög szögeinek összege *egyenlő* négy derékszöggel *(derékszög hip.)*; a négyszög szögeinek összege *kisebb* mint a négy derékszög *(hegyesszög hip.)*; ezek megfelelő módon fogalmazhatók a *háromszög* esetében is. Aristotelesnél a háromszögre kimondott állítások szerepelnek mint eredeti hipotézisek; a hipotézisek Saccheri-féle fogalmazása nála mint következmény jelenik meg; (lásd alább az *5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36, 11. Magna Moral. 1187 a 36—37* töredékeket).

[19] Saccheri, *i. m.* 5—10, Prop. V, VI, VII; „Hinc sumitur occasio secernendi tres diversas hypotheses, unam anguli recti, alteram obtusi, tertiam acuti; circa quas in V. VI. & VII. demonstratur, unam quamlibet harum hypothesium fore semper unice veram, si nimirum depraehendetur vera in uno quolibet casu particulari" (Saccheri, *i. m.* XII).

érvényét veszti. Ha tehát az abszolút geometriában a párhuzamosak posztulátumának érvénytelensége miatt lehetséges volna, hogy egyes háromszögek szögösszege egyenlő legyen $2R$-rel, mialatt más háromszögek szögösszege eltérne a $2R$ értéktől — akkor az *indirekt módszer nyilván nem volna alkalmazható*, ha ugyanis ilyen körülmények között bizonyítást nyerne, hogy *hamis* a tétel amely azt állítja, hogy a szögösszeg *minden* háromszögben nagyobb (ill. kisebb) mint $2R$ — akkor ebből még egyáltalában *nem következne* az euklideszi tétel, (amely szerint *minden* háromszög szögeinek összege $2R$), hiszen fennáll még a ki nem zárt eset, hogy *egyes* háromszögek szögeinek összege $2R$, más háromszögek szögösszege viszont nagyobb (ill. kisebb) mint $2R$.

Euklideszi, kontra-euklideszi és nem-euklideszi geometria

5. A *hegyesszög* hipotézisére épülő, SACCHERI által kifejtett geometriai rendszer immár tartalmazza a későbbi hiperbolikus geometria számos tételét; *kiragadva* és *önmagukban* ezek a tételek már nem-euklideszi tételek, de a *hegyesszög hipotézisére épülő* SACCHERI-*féle rendszer mégsem nevezhető a szó igazi, pozitív értelmében vett nem-euklideszi geometriának*; pusztán technikai szempontból tekintve a dolgot, ezt a jelzőt azért kell a SACCHERI-féle geometriától még megvonnunk, mert *hiányzik a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer ellentmondásmentességének a tétele*, sőt, azt mondhatjuk, hogy a SACCHERI-*féle eredeti rendszerhez még implicite hozzátartozik az az önmagában hamis meta-matematikai tétel, hogy a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer két egymásnak formálisan ellentmondó állítást tartalmaz*, illetve az a szintén *hamis* felfogás, hogy *ha a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer ellentmondásos, akkor az euklideszi rendszer szükségszerűen ellentmondásmentes*. A SACHCHERI-féle geometriát a szorosabb értelemben vett későbbi nem-euklideszi geometriától nem maguk az eredeti, *primer* geometriai tételek különböztetik meg — hanem egy a rendszerhez hozzátapadó kívülről jövő *tudat*, amely az euklideszi posztulátumhoz az *igaz*, — míg az ezzel formálisan szembenálló hipotézishez a *hamis* logikai értéket rendeli hozzá. Éppen e lényeges különbség miatt fogjuk a SACCHERI-féle rendszert *kontra-euklideszi* rendszernek nevezni. A kontra-euklideszi rendszer — bár tételeinek megfogalmazása nem-euklideszi — logikai szempontból mégis szigorúan az euklideszi geometriához — és nem a nem-euklideszi geometriához — tartozik: a *kontra-euklideszi rendszer nem nem-euklideszi — hanem euklideszi!* Valóban, az euklideszi geometriához épp úgy szigorúan hozzátartozik, hogy az euklideszi posztulátumból következő állítások igazak — mint az, hogy a neki ellentmondó tételek mind hamisak — feltéve, hogy maga ez a posztulátum *igaz*!

Összegezve az eddigieket, elmondhatjuk, hogy a párhuzamosak problémájának megoldására vonatkozó *első*, *eredeti*, *hiteles adataink* az V. századból származnak és hogy a további értesülések alapján a probléma és a megoldási kísérletek megjelenésének időpontját legfeljebb az i. e. II. századig vihetjük vissza; ami pedig az *indirekt módszert*, azaz egy *kontra-euklideszi* rendszer felállítását illeti — azzal a céllal, hogy ez, egy gondolati kísérlet keretein belül, mintegy az áldozati bárány szerepét játssza, amelynek megsemmisítésével az euklideszi geometria élete és fennmaradása elnyerné szinte isteni biztosítékait — erről SACCHERI előtt, eddig *lényegében* nem is beszélhettünk.

Kontra-euklideszi rendszer meglétére utaló töredékek Aristotelesnél

(Általános áttekintés)

6. A *Corpus Aristotelicum*[20] kötelékébe tartozó művek figyelmes átvizsgálása után azonban kénytelenek vagyunk levonni a következtetést, hogy a *párhuzamosak problémájának* — a matematikatörténet e Nílusának — *forrásait sokkal feljebb és sokkal mélyebben, az i. e. IV. század közepe táján találhatjuk meg.* Erre vonatkozó adataink a lehető legjobb eredeti forrásból: ARISTOTELES műveiből, tehát egyik nemcsak rendkívül megbízható, de felbecsülhetetlen értékű szemtanútól származnak. Számunkra talán a legmeglepőbb az a tény, hogy a felszínre került adatok túlnyomó többségének bizonyítéka szerint ARISTOTELES geométer kortársai a *problémát* már egy a SACCHERIéhez legközelebb álló indirekt módszerrel igyekeztek megoldani, amelynek kapcsán már egy *valóságos kontra-euklideszi rendszert is felállítottak* és így eljutottak olyan fundamentális tételek felismeréséhez és bizonyításához, amelyeket SACCHERI később önállóan bebizonyított,[21] sőt olyan állításokhoz is, amelyek még SACCHERInél sem szerepelnek.[22] Számos olyan helyet sikerült azonosítanom, ahol ARISTOTELES különböző logikai, metafizikai és etikai fejtegetések illusztrálása céljából vagy ilyen kontra-euklideszi tételeket idéz, vagy ezekkel kapcsolatos álta-

[20] *Aristoteles graece, ex recensione Im. Bekkeri,* ed. Academia Regia Borussica, Berolini 1831; az összes görög idézetek a Bekker-féle kiadás lap-, hasáb- és sorszámaira vonatkoznak.

[21] Feltünő az alább közölt *1. Anal. Prior. 66 a 14—15* töredék hasonlatossága Saccheri XIV. sz. tételével (*i. m.* 19—20; lásd fentebb a 17. sz. jegyzetet). — Ennek ellenére semmi okunk nincsen feltételezni, hogy ezt Saccheri Aristotelestól vette volna át. Saccheri minden általa olvasott szerzőt behatóan idéz, Aristotelest azonban sehol sem említi; ez szembeötlő, ha meggondoljuk, hogy Saccheri elsősorban filozófus és teológus volt, és előbb a grammatika, majd mint a filozófia és vitatkozó teológia professzora működött Milano, Torino és Pávia Jezsuita Kollégiumaiban (ő maga is tagja volt a Jézus Társaságnak); matematikát ezzel párhuzamosan Páviában adott elő (Stäckel—Engel, *Die Theorie der Parall.,* 34). Ebből mégsem következik, hogy Aristoteles műveit behatóan ismerte volna: a XVII. század második felétől kezdve Aristoteles teljesen népszerűtlen volt és általában nem olvasták. Így hát nagyon valószínű, hogy a kérdéses tételt Saccheri önállóan fedezte fel. — Meg kell jegyeznem ezzel kapcsolatban, hogy a párhuzamosak problémájának története bővelkedik ugyanannak a tételnek a többek által és különböző időkben teljesen önálló — gyakran szinte szó szerint megegyező — megfogalmazásban. — Feltűnő azonban, hogy Omár Khayyam igen kategorikus formában hivatkozik Aristotelesre. A párhuzamosak problémája könnyen megoldható — írja Omár — *öt alapvető principum* felhasználásával, amelyek közül az első négy Arisztotelestől származik (az ötödik a ma Eudoxos—Archimedes nevéről ismert axióma). Ezek közül az első három valóban előfordul Aristotelesnél; a harmadik például azt mondja ki, hogy a *szög két szára minden határon túl távolodik egymástól.* Proklos is felhasználja ezt az általa „axiómának" nevezett állítást bizonyítási kísérletében, és azt Aristoteles *De Caelo I 5* nyomán idézi (*i. m.* 371, 12—17); csak Saccheri mutatta ki első ízben teljes szigorral, hogy ez nem egy axióma, hanem egy *abszolút geometriai tétel,* amely azonban a *tompaszög hipotézise esetében nem is érvényes;* (Saccheri, *Euclides ab omni naevo,* etc. 28—30). A negyedik principium, amelyet Omár (*i. m.* 76) Aristotelesnek tulajdonít, a következőképpen hangzik: *két egymás felé tartó* (konvergáló) *egyenes metszi egymást, és nem lehet, hogy két egyenes előbb egymás felé tartson — majd ismét távolodjon egymástól.* — Ez, egy igen figyelemre méltó (az euklideszi posztulátummal ekvivalens) állítás: benne foglaltatik már — negatív, tagadott formában — az egymást nem metsző, divergáló (egyetlen közös merőlegessel rendelkező) egyenespár fogalma. Sajnos azonban, Aristoteles hátramaradt írásaiban sem ez, sem ehhez hasonló állítás fel nem lelhető és Omár tudósításnak történelmi hitelessége igen *kétséges.*

[22] Legfontosabb ezek közül az *5. Eth. Eudem. 1222b 35—36* és a *8. De Caelo 281b 5—7* töredékek; (lásd alább). Ezek alapvető jelentőségű tételeket mondanak ki — a *8. De Caelo 281b 5—7* töredék kimondja, hogy *ha az euklideszi posztulátum nem igaz, akkor a négyzet átlójának hossza racionális értéket is felvehet;* az *5. Eth. Eud. 1222b 35—36* töredékben pedig már szerepel a Riemann-féle geometria szingularis maximális négyzete — és ezek nemcsak Saccherinél — de a nem-euklideszi geometria első meglapítóinál sem szerepelnek!

lános meta-matematikai megjegyzéseket tesz; egyetlen olyan helyet ismerek, amelyből arra lehet következtetni, hogy a korabeli geométerek a párhuzamosak problémájának már *direkt* úton való megoldásával is kísérleteztek;[23] ezenkívül számos olyan hely található meg a CORPUS-ban, amelyekből ezeknek a kísérleteknek a hatása indirekt módon kiolvasható.

Aristoteles korában a koplanáris egyenesek metszésére vonatkozó nevezetes euklideszi állítás még biztosan nem szerepelt a posztulátumok csoportjában;[24] ez azonban nem jelenti azt, mintha a *párhuzamosak problémája* még nem tevődhetett volna fel. Sőt ellenkezőleg: az euklideszi geometria ez öntudatlan paradicsomi állapotához a párhuzamosak problémája *szervesen hozzátartozik*, és ebben az állapotban akaratlanul, még ha nem mondják ki, akkor is — a dolgok természete folytán, benne rejlik. Mai szemmel nézve ugyanis azt mondhatjuk: a párhuzamosak posztulátumának hiánya folytán ennek a kornak a geometriája még *abban a tudatban él*, hogy *ő egy Bolyai-féle abszolút geometria* és így, ennél fogva, a dolgok természetéből folyik, hogy bármely önmagában euklideszi jellegű tétel szigorú bizonyítására irányuló törekvés előbb utóbb, automatice felveti a párhuzamosak problémáját.

A szóban forgó szövegrészek elszórtan fellelhetők ARISTOTELES majd mindegyik jelentősebb művében; találunk ilyeneket az *Első* és a *Második Analitikában*, a *Szófisták Cáfolásában*, a *Fizikában* és végül mind a három *etikai* munkában. Mindezek az aristotelesi szövegrészek úgy tekintendők, mint egy EUKLIDES előtti — de ugyanakkor *kontra-euklideszi rendszer töredékei*; a szellemi archeológia által, az aristotelesi művek *Corpus*-ának geológiai rétegeiből felszínre hozott antik vázát a mai olvasó rendkívül modernnek látja és hajlamos azt egy olyan szellemi produktumnak tekinteni, mint ami jóval megelőzte volna korát; az emberi szellem mindig egykorú önmagával és sohasem előzheti meg korát; de igenis az egyes egyének szubjektív tudata elmaradhat az objektív emberi szellem mögött. Az aristotelesi *Corpus*-ból felszínre kerülő *kontra-euklideszi* elmélet sem előzte meg korát, hanem ellenkezőleg, az szervesen beleillik, sőt szinte szükségszerűen következik PLÁTÓ és EUDOXOS környezetének szellemi légköréből.[25]

A tompaszögek hipotézise és annak lerombolása

(Anal. Prior. 66a 11—15)

7. Az említett töredékek között van *három* olyan szövegrész, amely minden kétséget kizáróan azt bizonyítja, hogy az ARISTOTELES korabeli görög geométerek már felállították a *tompaszög hipotézisét*. E töredékek közül kettő az *Analytica*

[23] Lásd alább a *18. Anal. Prior. 65a 4—7* töredéket.

[24] Erre enged következtetni maga — az imént a 23. sz. jegyzetben idézett — *18. Anal. Prior. 65a 4—7* töredék (lásd T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements;* vol. I. 202, Cambridge 1908); erre következtethetünk azonban Proklos nyilatkozataiból is, aki erről mindig mint Euklides posztulátumáról beszél és annak bevezetését mindig személyesen Euklidesnek rója fel; (lásd a 3. sz. jegyzetet).

[25] Proklos (*i. m.* 67), valószínűleg Eudemos nyomán már említi az Akadémiában közösen végzett kutatásokat, amelyeknek jórésze éppen a matematika szigorú felépítésére volt irányítva; mindaz amit a bizonyítások szigorúvá tételével kapcsolatban Proklos oly nagy részletességgel Euklidesnek tulajdonít (*i. m.* 74—75), minden valószínűség szerint, az őt megelőző két matematikus-generáció műve volt, lényegében tehát az Aristoteles korabeli athéni matematikusoké.

Priora II 17, 66a 11—15 helyén található. Megelőzőleg ARISTOTELES azt írja, hogy ugyanaz a *hamis* (*ψεῦδος*; 66a 11) következmény többféle feltevésből is származtatható, amiben semmi helytelen, abszurd nincsen (*ἄτοπον*; 66a 13); majd a következőkkel folytatja: *mert például, a párhuzamosak metszik egymást akkor is, ha a belső* (szög) *nagyobb mint a külső* (szög) *és akkor is, ha a három szög* (azaz a háromszög szögeinek összege) *nagyobb mint két derék* (szög).[26]

Az eredeti szöveg rendkívül elliptikus; a zárójelbe tett kifejezések egyáltalán nem szerepelnek benne; ez az elliptikus kifejezésforma, amely az idézett matematikai tételek tartalmára csak célzásszerűen utal — általános jellemvonása az aristotelesi szövegnek. Mivel a reánk maradt írások az *akroamatikus* szövegek csoportjába tartoznak és eredetileg egy beavatott közönséghez szóló előadásokat tartalmaznak, természetes, hogy a szerző (vagy az előadásokat jegyzet alapján kiadó hallgatók) — a körükben használatos familiáris technikai zsargont használta, és a hosszadalmas szövegezésű matematikai tételeket a leglényegesebb szavakra, maximálisan lerövidített formában használta; így például az euklideszi geometria egyik alapvető, közismert tétele a következő, klasszikus, teljes formában szerepel az Elemek (*I. könyv 32. 2* tétel): *bármely háromszögben... a háromszög három belső szöge együttesen két derékszöggel egyenlő.* Ehelyett a megfogalmazás helyett, ezt a tételt ARISTOTELES általában a következő rövidített formában idézi: *„háromszög két derék"*. Ismervén az ARISTOTELEStől hátramaradt írásoknak ezeket a sajátosságait, semmi akadályba nem ütközik az idézett szövegekbe a zárójelbe helyezett kifejezéseket közbeiktatni.[27] Ezek után, az idézett példák közül, a *második* értelmezése teljesen világos és ez a következő parafrázissal adható vissza:

(1) *Ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R, akkor a párhuzamos egyenesek metszik egymást. (Anal. Prior. 66a 14—15).*

Ez az ARISTOTELES által idézett példa nemcsak azt mutatja, hogy a korabeli görög geométerek már felvetették a tompaszög hipotézisét — hanem, hogy e kiinduló

[26] *ἐπεὶ ταὐτό γε ψεῦδος συμβαίνειν διὰ πλειόνων ὑποθέσεων οὐδεν ἴσως ἄτοπον, οἷον τὰς παραλλήλους συμπίπτειν καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ἐντὸς τῆς ἐκτὸς καὶ εἰ τὸ τρίγωνον ἔχει πλείους ὀρθας δυεῖν*. (Falsum concludatur per multas hypotheses: veluti lineas parallelas concurrere, sive maior sit angulus internus externo, sive triangulus plures duobus rectis angulos habeat.) — Az egységesség kedvéért, — és mivel ezek állanak szó szerint a legközelebb a görög eredetihez, — az idézett görög szövegekkel párhuzamosan adjuk azok latin változatait is, a következő szerzők fordításában: *Analytica Priora, Analytica Posteriora, Topica, De Sophisticis Elenchis, Physica, De Anima* — Iulius Pacius fordításában; *De Caelo* — Ioannes Argyropylos fordításában; *Ethica Nicomachea* — Dionysius Lambinus fordításában; *Magna Moralia* — Georgius Valla fordításában; *Ethica ad Eudemum* — Ismeretlen fordításában; *Metaphysica* Bessarion kardinális fordításában. A latin fordításokat a következő kiadás szerint idézzük: *Aristotelis Opera Omnia, graece et latine;* edidit Guil. Du Val, Lutetiae Parisiorum 1629. (Ugyanezek a latin szövegek szerepelnek a Bekker-féle kiadás harmadik kötetében is). Ezeken kívül számos más (angol, francia és német) fordítást konzultáltam; így az E. D. Ross vezetése alatt készült angol, valamint az E. Grumach vezetése alatt folyóban levő német kidást; (Az *Első Analitikát* A. J. Jenkinson, a *Második Analitikát* G. R. G. Mure, a *Topikát* és a *Szofisták Cáfolásait* W. A. Pickard-Cambridge, a *Fizikát* P. P. Hardy és R. K. Gaye, az *Égről* szóló könyveket J. L. Stocks, a *Lélekről* szóló könyveket J. A. Smith, a *Metafizikát* W. D. Ross angol fordításában; a három *Etikát* F. Dirlmeier, a *Lélekről* szóló munkát W. Theiler német fordításában); J. Tricot francia kiadásait *(Organon, Az Égről, A Lélekről)*, a *Második Analitikához* valamint a *Topikához* felhasználtam még H. Tredennick és E. S. Forster görög és angol kiadását, (London 1960), a *Fizikához* C. Prantl görög és német szövegét (Leipzig 1854) és a *Metafizikához* D. W. Ross görög kiadását és kommentárjait (Oxford, 1953).

[27] Természetesen a felderítő szövegek közbeiktatása nem minden esetben ilyen egyszerű feladat és nem mindig sikerül egyértelműen úgy, hogy minden további vita és próbálkozás fölöslegessé válna általa.

feltevés következményeit is alapos kutatásnak vetették alá. Valóban, ez egy teljesen korrekt és egyáltalán nem triviális implikáció. A konklúzió (*a párhuzamosak metszik egymást*) nem következik minden további nélkül a premisszából — *(a háromszög szögeinek összege nagyobb mint* $2R$*)*. A konklúziónak a párhuzamosak problémája szempontjából lényeges jelentése: a tompaszög hipotéziséből a BOLYAI-féle abszolút geometrián belül alapvető ellentmondás következik: *az egymást nem-metsző (párhuzamos) egyenesek — metszik egymást.* Ez azonban nem más, mint a LEGENDRE nevén ismert tétel, amelyet azonban 1733-ban már SACCHERI is bizonyított,[28] de a tétel SACCHERI-*féle megfogalmazásában igen közel áll annak aristotelesi formájához;* SACCHERI ugyanis, már előre bevezetett segédtételek alapján, éppen azt bizonyítja, ami az *Anal. Prior. 14—15* helyén ki van mondva: *ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint* $2R$*, akkor két* (az *Elem. I 28* alapján) *egymással párhuzamos egyenes metszi egymást.*[29] A tétel bizonyításához szükséges leglényegesebb segédtétel már a középkori arab nyelvű szerzőknél, valamint GERSONIDES munkájában is megtalálható; e döntő jelentőségű segédtételre jellemző, hogy az EUDOXOS—ARCHIMEDES-féle axiómára épül. Könnyen elvégezhető az ARISTOTELES által idézett tétel rekonstrukciója, amelynek keretében a premisszából a következmény csupán a korabeli görög matematikában használatos tételek és módszerek segítségével származtatható. Ebben a rekonstrukcióban nem játszik szerepet, ha szóban forgó párhuzamos egyeneseket az *Elem. I. 28* tétele alapján úgy definiáljuk, mint olyan *koplanáris egyenespárt, amely egy harmadik metsző egyenessel, a metsző egyik oldalán együttesen* $2R$ *értéket kitevő belső szögeket alkot* — vagy, ha ettől eltérően, ellenkezőleg, feltételezzük, hogy *a párhuzamos egyenesek a metsző egyenes egyik oldalán olyan belső szöget alkotnak, amelyek összege nagyobb mint* $2R$. Jelentőségteljes mozzanat azonban, hogy az EUDOXOS által bevezetett *axiómára* a bizonyításban *elengedhetetlenül szükség van*[30].

Szükség van azonban az idézett implikáció bizonyításához arra is, hogy a szögek összege *minden* háromszögben nagyobb legyen mint $2R$. Ez egy igen bonyolult tétel, és csak SACCHERI bizonyította be első ízben teljes szigorral mint egy abszolút-geometriai állítást.

Semmi nyoma nincsen annak, hogy egy ilyen tétel explicit kimondásának és főleg bizonyításának a szükségességét a görögök már belátták volna, és szinte biztosan állíthatjuk, hogy *nem.* Ellenben egész mentalitásukból következik, hogy a kontra-euklideszi hipotézist már egyenesen ebben az általános formában értelmezték, mint olyat, tehát amelyik változatlanul érvényes *minden* háromszög esetében. Erre enged következtetni a megfogalmazás határozatlan módja is, amely *általánosságban* beszél a *háromszög* szögösszegéről. (Ennél tovább menve, egy a *Metafizika* IX. 10 fejezetében foglalt szövegből, *Metaph. 1052a 10—11*, feltevésszerűen arra lehet következtetni, hogy ha egy ilyen tétel külön bizonyítását nem is érezték szükségesnek, mégis tudták — illetve azt mondhatnánk, hogy inkább *természetesnek tartották* —, hogy a háromszögek univerzuma csak *vagy* teljes egészében euklideszi —, *vagy* egészében nem-euklideszi lehet, és hogy nem állhat fenn, hogy

[28] Lásd fent a 17. sz. jegyzetet.

[29] Prop. XIV: Hyotheses anguli obtusi est absolute falsa, quia se ipsum destruit (Saccheri, *i. m.* 19—20).

[30] E rekonstrukció részleteire vonatkozólag l. I. Tóth, *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum* (Archive for History of Exact Sciences, 1966 vol. III., 304—311).

egyik háromszögben a szögek összege egyenlő legyen, míg más háromszögben ne legyen egyenlő két derékszöggel.)

Világossága és egyértelműsége folytán ez a hely *(Anal. Prior. 66a 14—15)* önmagában is elegendő alapot szolgáltathatna nemcsak annak a feltételezésére, hogy az ARISTOTELES korabeli görög geométerek a *tompaszög hipotézisét* egyszerűen, mint egy átmeneti ötletet pusztán felvetették volna — hanem arra is, hogy a hipotézis logikai következményeit rendszeresen kutatták, és hogy az ebbe a körbe tartozó döntő fontosságú eredményt, *a tompaszög hipotézisének ellentmondásos jellegét kimondó tételt szigorúan be is bizonyították.*

Szerencsére azonban ugyanazon a helyen rendelkezésünkre áll még egy geometriai töredék, amelyből ugyanaz a következtetés vonható le; nevezetesen, a már idézett hely *első fele,* amely az eredeti szövegben a következőképpen hangzik: *a párhuzamosak metszik egymást... ha a belső* (szög) *nagyobb mint a külső* (szög). E hely értelmezése sem ütközik különösebb nehézségbe. A mondat szerkezetéből elég világosan kitűnik, hogy a belső és a külső szög, amelyekről említés történik, a párhuzamos egyenesekkel van kapcsolatban; ezek szerint az idézett hely teljes, explicit formában a következőképpen volna megfogalmazható:

(2) *Ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes úgy metsz, hogy a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán létrejött belső szög nagyobb, mint a vele szemben fekvő külső szög —, akkor a párhuzamosak metszik egymást. (Anal. Prior. 66a 13—14).*

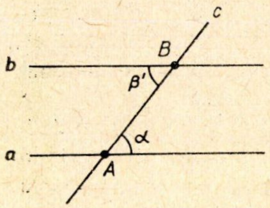
8. Az idézett két ikertöredékből most már valóban arra következtethetünk, hogy a tompaszög hipotézise *igen részletes* vizsgálatnak volt alávetve, hiszen, ime itt van előttünk annak két egymástól eltérő megfogalmazása is; nyilvánvaló, hogy a görög geométerek többféle úton is megkíséreltek döntést létrehozni abban a problémában, amelynek megoldására irányultak vizsgálataik. Ez pedig nem lehetett más, mint éppen az, amit később a *párhuzamosak problémájának* neveztek[31].

A két idézett töredékből az is azonnal kiderül, hogy milyen euklideszi tételek abszolút bizonyításáról lehetett szó: az (1) töredék *(Anal. Prior. 66a 14—15)* minden további nélkül világosan mutatja, hogy a háromszögek szögeinek összegére vonatkozó *Elem. I 32. 2* tétel[32] volt az egyik, amelyik a bizonyítási kísérletek célpontjában állott. De hiszen ez a tétel az *Elemekben* szigorúan bizonyítva van és annak bizonyítása már ARISTOTELESnél is szerepel! De megbízható tudósítások arról vallanak, hogy ez a bizonyítás már jóval előtte a pythagoreus matematikusok körében is ismeretes volt. Azonban az *Elem. I 32. 2* tétel bizonyításához elengedhetetlen szükség van az *Elem. I 29* tételre. Ez t. k. három egymásból közvetlenül következő tételt tartalmaz és e három tétel egyenként az *Elemek*ben azokat közvetlenül megelőző *Elem. I 27* és az ebből közvetlenül következő *Elem. I 28* (amely ismét két tételt tartalmaz: *I. 28. 1* és *28. 2*) tételeknek a reciprokjai. Nevezetesen az *Elem. I 27* valamint *Elem. I 28. 1* és *I 28. 2* a párhuzamosság *elegendő* feltételeit mondja ki. Legyen a és b két koplanáris és c egy ezeket A és B pontokban metsző egyenes,

[31] A két ikertöredék (66 *a* 11—15) összefüggését a párhuzamosak problémájának EUKLIDES előtti korszakával már a következő dolgozataimban tárgyaltam: Tóth I., *A Bolyai Geometria filozófiai vonatkozásai,* — "A párhuzamosak problémája Aristotelésnél" c. fejezet *(Bolyai János élete és műve* c. tanulmánykötet, Bukarest 1953, 264 1.); I. Tóth, *Unele aspecte filosofice ale geometriei neeuclidiene* (Cercetari filosofice, III. 3, 1955, 38—39 1.)

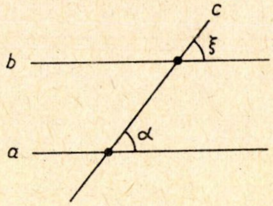
[32] Az *Elem. I. 32* állítás két tételt tartalmaz; az állítás első része (*Elem. I 32. 1.)* kimondja, hogy *a külső szög nagyobb mint a háromszögben vele szemben fekvő belső szög bármelyike;* csak az állítás második része *(Elem. I. 32. 2)* mondja ki *a szögek összegére* vonatkozó klasszikus tételt.

akkor áll a következő implikáció: *ha* a váltószögek egyenlők — *akkor* a két koplanáris egyenes nem metszi egymást *(Elem. I 27; 1 ábra)*; *ha* a *c* metsző és az *a* egyenes által, a *c* metsző egyenes egyik oldalán létrejött szög egyenlő a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán fekvő, de a másik, *b* egyenessel alkotott külső szöggel — *akkor* az *a* és *b* egyenesek nem metszik egymást *(Elem. I 28. 1; 2 ábra)*, — és végül: *ha* az *a*, *b* egyenesek és a metsző által a metsző egyenesnek egyik oldalán alkotott két belső szög együttesen $2R$ — *akkor* az *a* és *b* egyenesek nem metszik egymást. *(Elem. I 28. 2; 3 ábra)*. Az *Elem. I 29* alatti három tétel — mint az előbbi három



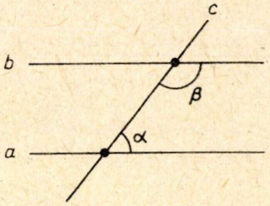
Elem.I27.: (α=β')→(a∥b).

1. ábra



Elem.I28.1: (α=ξ)→(a∥b).

2. ábra



Elem.I28.2: (α+β=2R)→(a∥b).

3. ábra

tétel reciprokja — a párhuzamosság *szükséges* (és az előbbiek miatt egyben elegendő) feltételeit állapítja meg. Ezek szerint, *ha* feltételként adva van a premissza, hogy az *a* és *b* koplanáris egyenesek egymással párhuzamosak — (és *c* ismét egy ezeket metsző harmadik egyenes) — *akkor*: a váltószögek egyenlők, *(Elem. I 29. 1)*; a metsző egyenesnek egyik oldalán fekvő belső szög egyenlő a metszőnek ugyanazon az oldalán szemben fekvő külső szöggel, *(Elem. I 29. 2)*, — és végül: *akkor* a metsző és a két párhuzamos egyenes által, a metszőnek egyik oldalán alkotott két belső szög együttesen $2R$, *(Elem. I 29. 3)*. Igen ám, de addig míg a három első tétel *(Elem. I 27, 28. 1* és *21. 2) abszolút — ezek reciprokjai valódi euklideszi tételek, és a párhuzamossági axióma nélkül nem bizonyíthatók*! Sőt — feltűnő módon éppen itt — az *Elem. I 28. 2* és az *Elem. I 29. 1* között vonul át az abszolút geometria és az euklideszi geometria nevezetes demarkációs vonala: az *Elemek*ben az *Elem. I 29. 1* az első valódi euklideszi tétel. A párhuzamosságot az *Elem. I def. 23* definíciója írja le; az *Elem. I 27* és *I 28* állítások a párhuzamos egyenesek effektív egzisztenciáját bizonyítják; ezek szerint *már a* (Bolyai-féle) *abszolút geometria axiómáiból szigorúan következik a párhuzamos egyenes egzisztenciája*; Az *Elem. I 29* tétel mármost az előbbieket szükségszerű módon kiegészítve végül ismerteti a párhuzamos egyeneseknek azt a lényeges tulajdonságát, amely ezeket általánosan jellemzi; így például: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással, akkor egy tetszés szerinti metszővel mindig olyan szögeket alkot, hogy a metsző egyenes egyik oldalán fekvő belső szög egyenlő az ugyanazon az oldalon az elsővel szemben fekvő külső szöggel (Elem. I 29. 2)*.

Az *Elem. I 29* tételének az indirekt úton történő bizonyításához meg kell fogalmazni az ezzel formálisan szemben álló állítást és ezt aztán *meg kell dönteni* azzal, hogy következményei között *belső ellentmondást* mutatunk fel. Így például az *Elem. I 29. 2* tétellel a következőt kell szembeállítani: (P) *Ha két koplanáris egyenes párhuzamos, a k k o r egy tetszés szerinti metszővel alkotott belső szög n e m egyenlő a metszőnek ugyanazon az oldalán, de az első szöggel szemben fekvő külső szöggel.* Valamilyen okból kifolyólag — (talán mert ezzel az általános hipotézissel nem boldoguitak, talán azért, mert ebben a párhuzamosakat egy határozatlan predikátum jellemzi — azaz szorosabban véve ezek egyáltalán nincsenek jellemezve, vagy pedig csak a hosszas és ismételt próbálkozások véletlenszerű eredményeként) — ezt az általános ellen-hipotézist két diszjunkt részre bontották éspedig: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos — akkor a belső szög nagyobb mint a külső* (P 1 hipotézis), ez természetesen a tompaszög hipotézisének az idézett helyen *(Anal. Prior. 66a 13—14)* található megfogalmazása; a hipotézis másik része: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással — akkor a belső szög kisebb mint a külső* (P 2 hipotézis); világos, hogy ez a hegyesszög megfelelő megfogalmazású hipotézise; ez utóbbi azonban *nem lelhető fel a Corpus által megőrzött szövegek között.*

A hegyesszög hipotézise és az elemek V posztulátuma

9. De ha itt nem — úgy megtalálható a *hegyesszög hipotézisének* az *Elem. I 29* tételével szembehelyezett P 2 variánsa a kissé odébb, a szellemnek a *Corpus* anyagával szinte egyidejű geológiai rétegében, nevezetesen az EUKLIDES-féle *Elemek*ben: *nem más ez, mint maga az* EUKLIDES *által bevezetett V. posztulátum.*

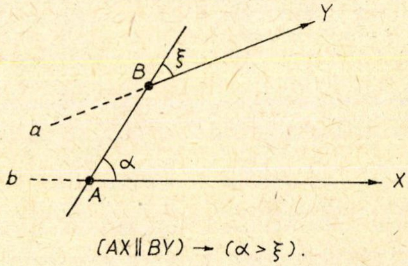
Ennek a feltevésnek az elfogadására azonban szükség van a következő megfontolásokra:

(a) a tompaszög P 1 megfogalmazású hipotézisében a görög geométerek számára valószínűleg különös gyönyörűséget okozó, rendkívül plasztikus és pregnáns ellentmondás adódott ki, mint végeredmény: *a párhuzamos (azaz egymást nem metsző) egyenesek — metszik egymást*; természetesnek tűnik elvárni, hogy ha a hegyes szög megfelelő, P 2 fogalmazású, hipotézise megdönthető — akkor az ebből kiinduló gondolatláncolat végén ugyanennek a plasztikus ellentmondásnak kell majd előállnia. A hegyesszög hipotézise esetén tehát az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helynek megfelelően, a következő implikációnak kellene fennállnia: *ha a* (párhuzamosakat metsző egyenes által alkotott) *belső szög kisebb mint a* (metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán, de az előzővel szemben fekvő) *külső szög — akkor a párhuzamos egyenesek metszik egymást.*

(b) Alapvető fontossággal bír azonban a következő — immár valamivel nehezebben belátható, finomabb követelmény szükségességének a felismerése: ahhoz, hogy a szükséges és remélt ellentmondáshoz eljussunk, — illetve ahhoz, hogy a két, eredetileg párhuzamosnak feltételezett egyenes bizonyított incidenciája valóban formális ellentmondás legyen és hatékonyan megdöntse a kiindulást képező P 1 vagy P 2 hipotézist — *elengedhetetlenül szükség van annak a precíz és kategorikus leszögezésére, hogy a párhuzamosaknak feltételezett egyenesek a harmadik, őket metsző egyenesnek éppen azon az oldalán találkoznak, amelyiken a belső szög nagyobb (ill. kisebb) mint a szemben fekvő külső szög.* A P 1 megfogalmazású tompaszög hipotézis esetében bebizonyított és a *Corpus* (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* töredékében fennmaradt implikációban ez a kikötés *nem szerepel*; ezt a hiányt azonban minden további nélkül megmagyarázhatjuk a *Corpus*ban szereplő matematikai tételek megfogalmazásának teljesen általános *elliptikus*, sőt egyenesen *laza és pongyola* jellegével. Kétségtelennek kell azonban tartanunk, hogy azok a matematikusok — (EUDOXOS tanítványai!) — számára, akik ilyen finom és rendkívül fejlett logikai érzéket követő kérdésekkel ebben a stílusban és ezen a szinten (éppen a szigorúság tudatosan megfogalmazott követelménye által hajtva) foglalkoztak —

ez a követelmény precíz és explicit formában jelentkezett. Valóban, a (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyen szereplő implikáció bizonyításának rekonstrukciója, ennek a feltételnek a szigorú tekintetbevételével, pusztán az akkor már ismert segédtételek igénybevételével minden különösebb nehézség nélkül sikeresen elvégezhető. Igen könnyen eljuthatunk ugyanis arra a végkövetkeztetésre, hogy a két egymást eredetileg nem metszőnek feltételezett egyenes metszi egymást — de úgy, hogy a metszéspont a közös metsző egyenesnek a *másik* oldalán van, ahol éppen megfordítva: a belső szög kisebb mint a vele szemben fekvő külső szög; sajnos, azonban, ez a *végkövetkeztetés egyáltalán semmilyen ellentmondásban nincsen a kiinduló hipotézissel és így azt nem is rombolja le*! Hiszen ez a tétel pl. az euklideszi geometriában mindig igaz, és a hiperbolikus geometriában sem mindig hamis! Mert mi sem természetesebb annál, hogy egy metsző egyenes oldalán egymástól távolódó, divergáló egyenesek (ilyen a két koplanáris *a*, *b* egyenes a P 1 hipotézis esetében, ha tehát a belső szög nagyobb, mint a külső) a metsző egyenes másik oldalán konvergáljanak, úgy, hogy kellőképpen meghosszabbítva egymást messék is! Így hát, ennélfogva azt kell mondani, hogy valóban *kritikus jelentőséggel* bír annak az explicit megfogalmazása, hogy a P 1, ill. a P 2 hipotézis esetében a felvett koplanáris egyenesek eleve feltételezett nem-metszése *melyik félsíkban* valósul meg és ilyen körülmények között az implikáció premisszáját leromboló végkövetkeztetés is csak akkor mond formálisan ellent a premisszának, és így csak akkor dönti azt meg, *ha azt bizonyítja, hogy a párhuzamosnak feltételezett egyenesek incidenciája ugyanabban a félsíkban valósul meg, amelyben eredetileg azok non-incidenciáját feltételeztük.*

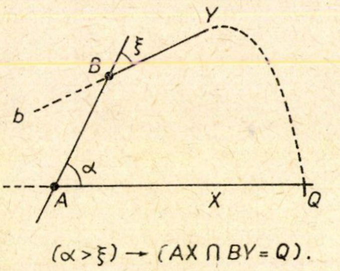
Ehelyütt kell megemlítenünk azt is, hogy Ptolemaios a fenti pongyola módszerrel gondolta megdönteni a párhuzamosak euklideszi posztulátumával általa szembeállított hipotéziseket; Proklos azonban, aki az eredeti munka alapján ismerteti Ptolemaios kísérletét, már igen kategorikusan rámutat az elkövetett hiba triviális jellegére.[33] Logikai szigor tekintetében azonban Aristoteles kortársai Ptolemaiosnál — és Proklosnál is sokkal magasabb szinten állottak és sokkal igényesebb kritikai szellemmel rendelkeztek. Az előbbiek alapján tehát feltesszük, hogy a tompaszög P 1 megfogalmazású hipotézisét az Aristoteles korabeli geométerek eredetileg a következő *precíz* formában értelmezték: *ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes metsz — akkor a két eredeti egyenes a metszőnek azon az oldalán nem találkozik, amelyiken a belső szög nagyobb mint a vele* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *szemben fekvő külső szög* (4. ábra). Ennek megfelelően a *Corpus* által megőrzött végeredményt is eredetileg a következő precíz formában kellett kimondani és bebizonyítani: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és ha a két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szög nagyobb mint* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög — akkor ez a két egymással párhuzamos egyenes metszi*



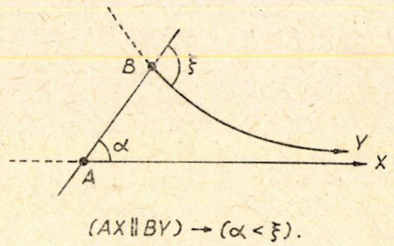
4. ábra

[33] Proklos, 365—368.

egymást éspedig éppen a metsző egyenesnek azon az oldalán, amelyiken a belső szög nagyobb mint a külső (5. ábra). *Ez valóban a remélt és elvárt formális ellentmondás.* Ennek megfelelően a hegyesszög P 2 hipotézisét a következőképpen kellett eredeti formájában megfogalmazni: *ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes metsz — akkor a két egyenes a metszőnek azon az oldalán nem találkozik, amelyiken a belső szög kisebb, mint a* (metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög (6. ábra).*

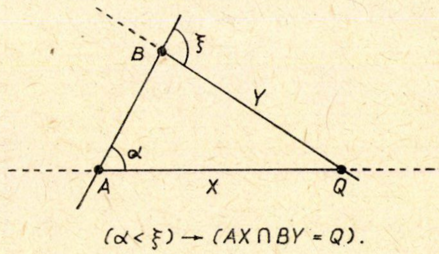


5. ábra



6. ábra

Ebben az esetben egészen világos, milyen fontos *már a feltételben* kimondani, hogy a párhuzamos egyenesek *non-incidenciája* a metsző egyenes által meghatározott két *félsík* melyikében valósul meg; ellenkező esetben tehát ha ezt nem precízirozzuk, akkor ez az állítás nem is szerepelhet mint egy az *Elem. I 29. 2* tételével szembenálló hipotézis! Megfelelő módon, P 2 hegyesszög hipotézis esetében a remélt és várt — magát a P 2 hipotézist megdöntő — végeredménynek a következő megfogalmazásban kellett volna egy (BOLYAI-féle értelemben vett) *abszolút* következtetési láncolat legvégén megjelennie: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és ha a két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szög kisebb mint* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög — akkor ez a két* (egymással párhuzamos) *egyenes metszi egymást, éspedig a metsző egyenesnek éppen azon az oldalán, amelyiken a belső szög kisebb mint a külső (7. ábra).*



7. ábra

Ebből azonnal következik tehát, hogy a feltevés hamis, és a két párhuzamosnak feltételezett *koplanáris egyenes, amely egy közös metszővel ennek egyik oldalán kisebb belső szöget alkot a szemben fekvő külső szögnél — nem lehet párhuzamos, éspedig a metszőnek azon az oldalán találkozik egymással, amelyiken a belső szög kisebb mint a külső.*

(c) Végül, igen könnyű belátni, hogy valamint az *Elem. I 29. 2* esetből közvetlenül következik az *Elem. I 29. 3* tétel — hasonlóképpen az *Elem. I 29. 2* tétellel szembeállított két hipotézisből is minden további nélkül következik a tompaszög, illetve a hegyesszög hipotéziseinek egy-egy olyan megfogalmazása, amelyik az

Elem. I 29. 3 tételnek a formális negációja. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyen fellelhető implikáció rekonstrukciójában szinte szükségszerű módon kell áttérni a tompaszög hipotézisének az *Elem. I 29. 3* tétellel szembenálló megfogalmazására. Ebben az esetben a tompaszög (ill. a hegyesszög) hipotézise a következőképpen fogalmazható: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással, akkor ezek, egy harmadik őket metsző egyenessel a metsző egyenes egyik oldalán olyan belső szögeket alkotnak, amelyek összege nagyobb (ill. kisebb) mint* 2*R*. A megfelelő, lényegtelen szövegbeli módosítást eszközölve, a tompaszög hipotézise esetén effektíve realizált ellentmondáshoz hasonlóan, a hegyesszög esetében a következő ellentmondásnak kellett volna megjelennie ahhoz, hogy a kiinduló hipotézis megdőljön: *ha két egyenes párhuzamos és egy metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szögek összege kisebb mint 2R — akkor az eredeti két egyenes metszi egymást, nevezetesen a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán, amelyiken a belső szögek öszszege kisebb mint* 2*R*; ahonnan azonnal következne a tétel: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és a szelő egyik oldalán a belső szögek összege kisebb mint* 2*R*, *akkor a két egyenes meghosszabbítva, találkozik a szelőnek azon az oldalán, amelyiken a belső szögek összege kisebb mint* 2*R*. *De ez éppen az Elemekben szereplő V. posztulátum!*

Ezek szerint ha az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyén található töredéket kiegészítjük a hozzátartozó, vele szimmetrikus implikációval, amelynek a várakozás szerint szükségszerűen elő kellett volna állnia ahhoz, hogy az *Elem. I 29. 2*, illetve *Elem. I 29. 3* tétel indirekt úton bizonyítást nyerjen — akkor ezen az úton éppen az Elemek V. posztulátumához jutunk! Ebből azonban azonnal következik, hogy *az Elemek V posztulátuma t'k. nem egyéb, mint a hegyes szögnek az Elem. I 29. 3 tétellel formálisan szembenálló hipotézisét megdöntő végkövetkeztetése.* Ahhoz, hogy a hegyesszög hipotézisének önellentmondó lényege (a tompaszög hipotéziséhez hasonlóan) bizonyítást nyerjen — a hegyesszög hipotéziséből kiindulva egy abszolút geometriai gondolatláncolat végén ennek, tehát éppen az Elemek V posztulátumának — kellett volna végkövetkezményként megjelennie; ez azonban nem történt meg és minden valószínűség szerint az akkori görög geométerek még elég igényesek lehettek ahhoz, hogy belássák az erre irányuló kísérletek gyakorlati sikertelenségét. De mivel a végkövetkezményben foglalt tétel nélkül az *Elem. I 29* tétel szigorú bizonyítása nem volt lehetséges, így Euklides ezt a döntő jelentőségű tételt felvette a bizonyítatlan követelmények közé. Természetesen, az V. posztulátum bizonyíthatatlanságára, azaz a többi posztulátumoktól való logikai függetlenségének a kimutatására még semmilyen szigorú bizonyíték nem állott rendelkezésére (ne felejtsük el, hogy ennek a szigorú bizonyítása még nem volt a nem-euklideszi geometria első három megalapítójának sem a birtokában — bár ők az V. posztulátum függetlenségének meta-matematikai tételét már explicit módon megfogalmazták) — és azt sem tudhatjuk, hogy ő maga vajon azt tartotta-e, hogy a posztulátum elvileg *bizonyíthatatlan*, vagy pedig hitt annak elvi bizonyíthatóságában és csak az a tény, hogy szigorú (azaz abszolút geometriai módszerekkel történő) bizonyítása mindaddig nem sikerült, tehát, hogy csupán pragmatikus kényszerből vette fel a kérdéses tételt a posztulátumok sorába. De ez egyáltalán nem is érdekes és teljesen közömbös, milyen meggondolások vezették tettében. A történelem számára csak a már elkövetett tett számít és kétségbevonhatatlan, hogy ez a tett, — akár tudatában volt ennek elkövetője, akár nem — önmagában sorsdöntő jelentőségűnek bizonyult a geometria további történetében.[34]

10. Végezetül, annak elfogadására, hogy az *Elemek V* posztulátuma valóban a (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* szövegrészben megjelenő tompaszög hipotézisnek az ikerhipotéziséből levezetni remélt végkövetkeztetéssel ekvivalens — tekintetbe kell még vennünk a következő két tényezőt:

(d) Mindenekelőtt tekintetbe kell venni, hogy az V. posztulátumnak az Elemekben található *megfogalmazása nem elég szigorú*, amennyiben magán a szükséges *posztulátumon kívül egy bizonyítható* — méghozzá az abszolút geometriához tartozó! — *tételt is tartalmaz*. Nevezetesen az a zárókitétel, amelyik kimondja, hogy a két szóban forgó koplanáris egyenes *a szelőnek azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a két belső szög összege kisebb mint 2R* — teljesen fölösleges, hiszen ez a kitétel az abszolút geometria axiómáiból szigorúan következik! A posztulátumnak magának csak annyit kellene kimondania, hogy *ha a két koplanáris egyenes a szelővel olyan belső szögeket alkot ennek egyik oldalán, amelyek összege kisebb mint 2R — akkor a két egyenes találkozik* — és semmivel se többet. Ellenben a posztulátum megfogalmazásában teljesen *fölösleges kitétel elengedhetetlenül szükséges akkor, ha ez az állítás mint a hegyesszög hipotézisének a végkövetkezménye jelenik meg!*[35] És EUKLIDES — közismert szokásához híven — ebben az esetben is abban az eredeti megfogalmazásban vette át ezt az állítást is, — úgy ahogy és ahol találta, nem változtatván semmit annak szóösszetételén.[36] Márpedig abban a fogalmazásban, ahogy az az *Elemek*ben szerepel *nem találhatta másutt, csak a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló indirekt kísérletek zsákutcájának a legvégén.* Az említett fölösleges kitétel tehát úgy tekintendő, mint a geometriai filogenézisnek egy atavisztikus maradványa.

(e) És végül, utolsósorban, nem hagyható figyelmen kívül az a körülmény sem, hogy *az Elem. I 29 tételnek az Elemekben adott bizonyítása ugyancsak indirekt úton történik*; nevezetesen, az *Elemek*ben követett gondolatmenet lényegében a következő: az *Elem. I 29* tétel igaz, mert annak ellenkezője hamis; ámde a bizonyí-

[34] „Euklides ist vor allem Didaktiker, kein schöpferisches Genie" (B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft,* Basel—Stuttgart 1956, 323); „Euclid... laid down this epoch-making Postulate. When we consider the countless successive attempts made through more then twenty centuries to prove the Postulate, many of them by geometers of ability, we cannot but admire the genius of the man who concluded that such a hypothesis, which he found necessary to the validity of his whole system of geometry, was really indemonstrable". (T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* volt. I. 202, Cambridge 1908). — „L'homme qui, contrairemenet à l'opinion des géomètres distingués qui la considéraient comme un théorème, a placé cette proposition, nommée des parallèles parmi les postulats, qui sont a admettre parmi les indémontrables, comme point de départ de la science géometrique, a fait oevre de génie, et non de compilateur inintelligent. Même s'il y a de la gaucherie dans la rédaction de ce début des Éléments d'Euclide, il nous semble impossible de méconnaitre l'intuition géniale qui se trouve à la base de l'édifice scientifique le plus important que l'Antiquité nous a légué". (A. Frenkian, *Le postulat chez Euclide et chez les modernes,* Paris 1940, 15). — Lehet azonban, hogy van der Waerdennek mégis igaza van, abban az értelemben, hogy egy új posztulátum bevezetésének a szükségességét talán már a megelőző generáció matematikusai felismertek; utalunk itt jelen dolgozatunk *20. „A háromszög szögösszegére vonatkozó tétel bizonyíthatatlansága"* c. paragrafusára, valamint a *23. „ A párhuzamosak problémája a IV. század második felében"* c. paragrafus (f) pontjára.

[35] Lásd fentebb a (b) pontot.

[36] Lásd Pappus, *La Collection Mathematique* (franciára ford. P. Ver Eecke) Paris 1933, vol. II. 507; van der Waerden, *i. m.* 180—181.

tandó tétellel itt a következő állítás van, mint ellenkező hipotézis, szembehelyezve: *ha az AB és CD egyenesek párhuzamosak, akkor egy közös EF szelővel ennek egyik oldalán alkotott két belső szög BGH és GHD összege kisebb mint 2R*; *de ez nem más, mint éppen a hegyesszög hipotézise*, és a továbbiakban ezt az ellenhipotézist azért veti el a szerző, mert az V. posztulátummal összeegyeztethetetlen. Ezek szerint tehát az *V. posztulátum az Elemekben éppen arra szolgál, hogy megdöntse a hegyesszög hipotézisét, annak itt adott megfogalmazásában*; és ez éppen a (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyen szereplő tompaszög hipotézis tükörképe!

Különösen figyelemreméltó azonban, hogy az *Elem. I 29* tételnek az *Elemekben* adott bizonyítása teljesen hibás, hiszen *csak a fele* van bizonyítva annak amit bizonyítani kellene! Az indirekt bizonyítási eljárás megköveteli u. i., hogy az *Elem. I 29* tételnek formálisan ellentmondó *általános* kontra-euklideszi hipotézis hamis volta nyerjen szigorú bizonyítást. Ezt az általános kontra-euklideszi hipotézist EUKLIDES *explicite* be is vezeti, azzal a *kimondott szándékkal*, hogy önellentmondó voltát kimutassa. Sajnos a továbbiakban ennek az általános hipotézisnek *csak* az egyik *fele* — igaz, hogy a fontosabbik, — nevezetesen a *hegyesszög* hipotézise semmisül meg és pedig éppen a párhuzamosak posztulatumával való összeférhetetlensége miatt. *Hátra maradt* volna még a *tompaszög* hipotézisének a megdöntése és elhárítása is. Ez azonban az *Elemekben nem szerepel*. De éppen ez, az *Elemek* szövegéből hiányzó bizonyítás az amelyik az általam fentebb idézett (2) sz. töredék *Anal. Prior. 66. a 13—14* tartalmát alkotja! A *Corpus* és az *Elemek* szövegei így logikailag kiegészítik egymást és csak együttesen alkotnak szerves egészet. A két szöveg, nyilvánvaló módon történelmileg is szorosan összefügg egymással: egyazon történelmi egésznek a sors által elválasztott de a szellemnek ugyanabban a geológiai rétegében híven megőrzött két része ez.

(Szembeötlő, hogy az *Elem. I 29* tétel bizonyításának ez az igen súlyos fogyatékossága az olykor különösen igényes kommentátorok szinte végeláthatatlan sokaságának a figyelmét — PROKLOS-tól egészen HEATH-ig — teljesen elkerülte, holott mindezek éppen ennek a kulcspoziciót betöltő, alapvető fontosságú tételnek szentelték általában a legtöbb és a legmegkülönböztetettebb figyelmet).

Ezekután könnyen érthetővé válik, miért fordul elő a tompaszög hipotézisének *két (Anal. Prior. 66a 13—14, és 66a 14—15)* variánsa a *Corpus*ban: az eredeti cél a háromszög szögeinek összegére vonatkozó, *Elem. I 32. 2* tétel szigorú (azaz *abszolút*) bizonyítása volt; ez a bizonyítás azonban az *Elem. I 29* tételtől függött, márpedig ezt a tételt nem sikerült, még indirekt úton sem, szigorú, *abszolút* eljárásokkal bizonyítani; ilyen körülmények között természetesen felmerült az az ötlet, hogy ha már indirekt eljárást alakalmaznak, akkor a bizonyítás menetének nagyfokú egyszerűsítését lehet elérni, ha ezt az eljárást minden segédtétel közvetítése nélkül közvetlenül magára a bizonyítás végcélját képező eredeti *(Elem. I 32. 2)* állításra alkalmazzák — (hiszen az *Elem. I 29* segédtétel csak egy *direkt* bizonyítási eljárás esetén létjogosult). Így aztán, ebben az indirekt bizonyítási kísérletben, az eredeti *Elem. I 32.2* tétellel a következő általános hipotézist állították szembe: (T) *a háromszög szögeinek összege nem 2R*, majd — amint az (1) *Anal. Prior. 66a 14—15* töredék bizonyítja — ezt a másik megfogalmazású, (P), iker-hipotézishez hasonlóan, ismét két diszjunkt részre bontották: (T 1) *a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R* (a tompaszög hipotézise, *Anal. Prior. 66a 14—15*), illetve (T 2) *a háromszög szögeinek összege kisebb mint 2R* (a hegyesszög hipotézise).

A hegyesszög hipotézisének nyoma az arisztoteleszi Corpus-ban

(Anal. Poster. 90a 33—34)

11. A P 2 formában történt megfogalmazástól eltérően — a hegyesszög hipotézise ez utóbbi T 2 megfogalmazásban nyomot hagyott a *Corpus* szövegében is. Meg kell jegyeznünk ehelyütt, hogy a *Corpus*ban előforduló, és a kontra-euklideszi rendszer megléte mellett tanúskodó töredékek túlnyomó többségében mindig az *Elem. I 32. 2* tétellel formálisan szembenálló általános T hipotézis formájában jelenik meg. *A tompaszög hipotézise* a fenti két töredéken kívül még három helyen fordul elő;[37] *a hegyesszög* hipotézise csupán *egyetlen egyszer* van megemlítve és akkor sem önállóan, hanem egy sorban a tompaszög, valamint a derékszög hipotéziseivel. Az *Analytica Posteriora II 2* fejezetében Aristoteles az egyszerű *meglét* (*εἰ ἔστιν ἁπλῶς*; an sit simpliciter; *89b 39*) és a sajátos, *kvalifikált létezés* (*... ἐπὶ μέρους*; in parte; *90a 2*) közötti különbséget taglalja. Valamilyen szubjektumról, mint egy konkrét minőségi tulajdonság hordozójáról, szubsztrátumáról (*ὑποκείμενον*; insum subjectum; 90 a 12), mint amilyen például a *hold*, vagy a *háromszög* fogalma (*σελήνην ... ἢ τρίγωνον*; *90a* 12, 13) mindenekelőtt tudnunk kell, hogy *egyáltalán létezik-e, vagy nem létezik*, — hogy egyszerűen van-e vagy nincsen (*εἰ ἔστιν ἢ μὴ σελήνη*; an sit necne luna; *90a 4—5*). A specifikus, kvalifikált létezés esetében azonban azt kérdezzük, hogy *egy tulajdonság mint predikátum vajon hozzátartozik-e a szubjektumhoz vagy sem:*

(3) Így például a háromszöghöz, mint egyszerűen létező szubjektumhoz hozzátartozhat mind *az egyenlőség* — mind a *nem-egyenlőség* (*ἰσότητα ἀνισότητα*; aequalitatem inequalitatem; *90a 13*).

Ez, az eredetiben rendkívül elliptikusan megfogalmazott példa, önmagába szintén úgy tekinthető, mint egy az általános kontra-euklideszi hipotézisre tett célzás: nyilvánvaló ugyanis, hogy amikor Aristoteles az *egyenlőséget* vagy a *nem-egyenlőséget* említi, mint a háromszög egyik tulajdonságát — akkor a *háromszögre* a szó eredeti etimológiai értelmében vett jelentésre gondol, tehát mint *három szög* oszthatatlan egységére és így kézenfekvő ennek az elliptikus kifejezésnek a következő értelmezése: *„háromszög”*-höz — három szögnek egyetlen, bonthatatlan geometriai alakzatban megvalósuló fogalmi egységéhez, — mint egyszerű egzisztenciával bíró szubjektumhoz, hozzárendelhető a következő két predikátum egyike: *„egyenlő 2R-rel”* vagy pedig *„nem-egyenlő 2R-rel”*.

A továbbiakban Aristoteles a *lényeg* kérdését tárgyalja: mi az, ami pl. egy bizonyos tulajdonsággal rendelkező dolgot, *mint olyat* meghatároz; a *lényegnek* ez a definíciója egyben a dolog *létalapja* is, létezésének, — valamilyen konkrét minőséggel rendelkező létének meghatározó oka.[38] Ennek példázására a fejezet végén ismét a háromszög — a három szöge egységeként felfogott *háromszög* jelenik meg. Bár a szöveg meglehetősen kusza és a szokottnál is jóval zárkózottabb, az mégis világosan kiderül belőle, hogy Aristoteles a három szögének egységeként felfogott *háromszöget* úgy tekinti mint aminek meghatározó lényege, létének okát

[37] Lásd alább a következő töredékeket: *4. Anal. Poster. 90a 33—34; 5. Eth. Eudem. 1222b 35—36; 13. Anal. Poster. 77b 22—24.*

[38] *τὸ τί ἐστιν εἰδέναι ταὐτό ἐστι καὶ διὰ τί ἔστιν.* (nosse quid sit, idem est atque nosse cur it; *90a 31—32*).

definiáló alapja a *három szög* egy idomba foglalt összességének egy *meghatározott értéke* és — ami a mi szempontunkból a legfontosabb — szerinte:

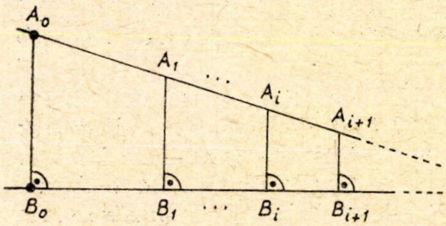
(4). Ehhez *a háromszöghöz* mint szubjektumhoz egyaránt hozzátartozhat mint meghatározó lényeges attributum a következő három érték egyike: vagy *két derékszög*, vagy *nagyobb*, vagy pedig *kisebb mint derékszög*;[39] *(90a 33—34)*.

Számunkra ebben a (4) *Anal. Poster. 90a 33—34* töredékben pillanatnyilag a legfontosabb a hegyesszög hipotéziséről szolgáltatott tudósítás: ez ugyanis *az egyetlen hitelesen eredeti, írásbeli nyoma annak, hogy a hegyesszög hipotézise a* T2 *megfogalmazásban explicite és önálló formában is szerepelt az* ARISTOTELES *kora*!*eli matematikai kutatásban*. A *hegyesszög* hipotéziséről ezekután immár állíthatjuk, hogy a *Corpus*ban róla említés történik — de ennél többet sajnos nem, míg a *tompaszög* hipotézisét a *Corpus* nem csupán megemlíti, hanem néhány abból következő, alapvető tételt is ismertet.

A hegyesszög hipotézise Proklos kommentárjaiban

12. Itt kell azonban megjegyeznünk, hogy az ókorból származó matematikai irodalomban a hegyesszög hipotézise előfordul a *Corpus* idézett (4) *Anal. Poster. 90a 33—34* fragmentumán (és, természetesen az *Elemek I* 29 tételének bizonyításán) kívül még egy nevezetes helyen, éspedig a PROKLOS által az *Elemek I* könyvéhez írott kommentárokban; (i. m. 368, 26—370, 10). A párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek tárgyalása alkalmából, PROKLOS említést tesz egy önmagában is igen érdekes gondolatmenetről; eszerint: *két koplanáris egyenes, amelyik egy metsző egyenessel, ennek egyik oldalán, két belső szöget alkot úgy, hogy ezek összege együttesen két derékszögnél kisebb* — *nem metszi egymást*.

E tétel *bizonyítása* ugyanazzal az eljárással történik, mint amelyiket eleai ZENON az „AKHILLEUS" elnevezésű *aporiában* alkalmazott; a PROKLOS által közölt paradox állítás is lényegében egy az AKHILLEUShoz hasonló *aporia*, és éppoly hibátlan és önmagában cáfolhatatlan, mint amaz.



$A_iB_i = A_iA_{i+1}$.

8. ábra

Meg kell itt jegyeznünk, hogy a PROKLOS által említett aporia az EUKLIDES-féle V. posztulátum puszta formális negációjánál *jóval többet nyújt*.[40] Az V. posztulátum ugyanis azt állítja, hogy az említett feltételek mellett („két belső szög összege kisebb mint $2R$") a két eredeti egyenes *mindig* metszi egymást. A *hegyesszög* hipotézise ezzel szemben azt állítja, hogy azonos feltételek mellett, a két egyenes *nem mindig* metszi egymást. A PROKLOS által idézett aporia ezzel szemben még a hegyes-

[39] *τῶν ὑπαρχόντων οἷον ὅτι δύο ὀρθαί, ἢ ὅτι μεῖζον ἢ ἔλαττον*. (. . . eorum quippiam insunt, cuiusmodi sunt habere duos angulos rectos, aut esse maius vel minus; *90a 33—34*)

[40] Erre már Proklos is felhívja a figyelmet (*i. m.* 371, 2—10); ehelyett egy olyan megfogalmazást tart elegendőnek, amely már éppen a hegyesszög hipotézisével azonos.

szög hipotézisén is *túlmenve* azt állítja, hogy a kérdéses két egyenes *soha nem metszi egymást.* A PROKLOS által közölt bizonyítás természetesen abszolút jellegű. Éppen ezért ennek végkövetkeztetését a következőképpen lehet megfogalmazni: *akár biztosítva van valamilyen módon két egymásnak dűlő koplanáris egyenes metszése* (pl. az euklideszi párhuzamosak posztulátuma segítségével, vagy ennek híján egyszerűen egy kategorikus — természetesen az euklideszi posztulátummal ekvivalens — bizonyítás nélküli állítással) *akár nem, — minden esetben szigorúan bizonyítható a metszéspont non-egzisztenciája.* Ennek alapján az euklideszi geometriában (ahol a metszéspont egzisztenciáját az V. posztulátum biztosítja) állandó belső ellentmondás állana fenn a metszéspont egzisztenciája tekintetében. A helyzet azonban korántsem ennyire tragikus, és a PROKLOS által idézett aporia, lényegében semmivel sem nyújt többet mint az AKHILLEUS, csakhogy azt más formába öntve mondja el: ha a gyorslábú AKHILLEUS mindig egy *a* egyenes A_i pontjában van *(8. ábra)* és ez az *a* egyenes egy olyan *b* egyenes felé *közeledik*, amelyen a nála lassabban mozgó teknősbéka mindig az A_i pontból a *b* egyenesre bocsátott $A_i B_i$ merőleges B_i talppontjában van, — és ha a verseny alapkonvenciója kimondja, hogy $A_iA_{i+1} = A_iB_i$ (tehát a teknősbéka által befutott intervallum B_iB_{i+1} mindig az azonos időintervallum alatt az *A* által befutott A_iA_{i+1} intervallum vetülete; az A_iA_{i+1} intervallumnál tehát rövidebb) — akkor *A* és *B* soha *nem találkoznak* (még akkor sem, ha a két egyenes metszéspontjának egzisztenciája egyébként valamilyen úton biztosítva van). Az aporia tehát csak azt bizonyítja, hogy a metszéspont — ha egzisztenciája valamilyenképpen bizonyos is — egy a fentihez hasonló végtelen konvergens szakaszsorral effektíve *elérhetetlen.* Ha pedig a metszéspont egzisztenciája *nincsen* előre — sem az euklideszi párhuzamossági posztulátum, sem valamilyen más kijelentés által biztosítva —, akkor könnyen előfordulhat, hogy miközben az A_iB_i szegmentum a nulla felé tart (ami egyáltalán nem szükségszerű, hiszen ha a párhuzamosak posztulátuma *nem érvényes,* akkor az *a* és *b* egyenesek közötti távolság *csökkenhet,* majd elérve egy *minimális* értéket ismét növekedhet), az $\sum\limits_0^n (A_iA_{i+1})$ összeg *divergál* és akkor, természetesen, az aporia csak a reális tényállapotot fejezi ki; de előfordulhat az is, hogy — miközben az A_iB_i intervallumok minden határon túl zsugorodnak — az $\sum\limits_0^n (A_iA_{i+1})$ összeg (annak ellenére, hogy *n* minden előre megadott értéknél nagyobb értékeket vesz fel) — mégis, egy véges értéket soha nem halad meg; ebben az esetben az aporia azt állítja, hogy metszéspont egzisztenciájáról nemcsak hogy *nem beszélhetünk,* de azt *kategorikusan vissza is kell utasítanunk,* mert ez annak az axiómának az *elfogadását* jelentené, amelynek értelmében *minden korlátos, konvergens sorozatnak van határértéke,* és ezt a határértéket — ha más mód nincs rá — *éppen maga ez a konvergens végtelen sorozat definiálja*; azt jelentené ez tehát, hogy ezt a metszéspontot magát éppen ez a végtelen sorozat *hozza létre*; így ez a pont nem volna ezek szerint egyéb, mint maga ez a *végnélküli* sorozat befejezettségében, tehát maga az *aktuális végtelen*! Az aporia tehát azt bizonyítja, hogy ha két egymáshoz közeledő egyenes metszéspontjának a meghatározására nem áll rendelkezésre más mód, mint egy végtelen konvergens sorozat — és *ha az aktuális végtelen fogalmát* (illetve, ami ezzel egyenértékű: a CANTOR—DEDEKIND-féle folytonossági axiómát) *kategorikusan visszautasítjuk — akkor kategorikusan vissza kell utasítanunk a metszéspont létezését* is; ez azonban semmilyen belső ellentmondást nem eredményez abban a geometriában, amely a metszéspont létezését nem képes valamilyen véges úton biztosítani; ha ellenben a metszéspont egzisztenciája *véges* úton már előre biztosítva van — akkor az aporia csupán azt állítja, hogy a kilőtt nyíl ide soha nem érkezik meg, vagy pedig hogy — ha a fenti megegyezés alapján haladnak a két egymáshoz tartó egyenesen — AKHILLEUS és a teknősbéka effektíve mégsem találkoznak soha ebben a pontban.

Történelmi szempontból vizsgálva a PROKLOS által idézett aporia szerepét a párhuzamosak problémájának genezisében, nyilvánvaló, hogy az a *hegyesszög* hipotézisével van összefüggésben.[41]

A PROKLOS-féle szöveg alapján az aporia keletkezésének kora sajnos nem állapítható meg. Van azonban két tényező, amely némi *valószínűséget* látszik adni annak a *feltevésnek*, hogy az aporia jóval előbbi keletű.

Mindenekelőtt ugyanis PROKLOS mindenütt, ahol a párhuzamosak problémájával kapcsolatos kísérletekről van szó, *pontosan említi a szerzők nevét*, — sőt olyanokra is céloz (pl. POSEIDONOS), akiknek a kísérletét nem is ismerteti; az aporia esetében azonban *szerzőről nem beszél*, hanem csak általánosságban céloz „azokra",[42] akik ezt az ellenvetést felhozták; ebből talán nem túlzott arra következtetni, hogy itt egy a hagyomány által továbbított és POSEIDONOS-t is megelőző ellenvetésről van szó.

De az is az aporia régisége mellett látszik szólni, hogy ilyen zenoni típusú argumentumok divatjának kora éppen *az V. század második és a IV. század első fele.* De amennyiben az aporia régiségét elfogadjuk, úgy azt — véleményem szerint —, mindenképp az *Elemek* megjelenése előtti időpontra kell tennünk, mivel az EUKLIDES által bevezetett posztulátum tulajdonképpen úgy is tekinthető, mint érvényesítése annak a belátásnak, amelynek értelmében az (önmagában korrekt) aporia végkövetkeztetése (metszéspont *soha* nem egzisztál) — az aporiában alkalmazott gondolatmenet formális korrektsége miatt — csak úgy hárítható el, ha erre egy a metszéspont egzisztenciáját biztosító kategorikus állítást posztulálunk. A legplauzilisebbnek azt tartom, hogy ez az aporia a IV. század második felében jött létre: a hegyesszög hipotézisét megdönteni szándékozó, valószínűleg ismételt kísérletek gyakorlati kudarca szinte természetszerűleg vetette fel — abban a korban, amelyikben a zenoni aporiák még élénken foglalkozatták a közvéleményt — az ötletet, hogy ha a szigorú levezetés képtelen a két egymás felé konvergáló egyenes metszését bizonyítani, akkor a logika talán képes lesz arra, hogy ennek az intuitive igazolt ténynek *éppen az ellenkezőjét* bizonyítsa!

Ezt az aporiát már úgy kell értékelnünk, mint önmagában annak a derengő gondolatnak a talán öntudatlan érvényrejuttatását, hogy a hegyesszög hipotézisének gyakorlati cáfolhatatlansága talán annak tulajdonítható, hogy hamissága *elvileg* is *bizonyíthatatlan* volna, hiszen szigorúan bizonyítani éppen az bizonyítható, hogy az egymás felé konvergáló egyenesek *soha* nem metszik egymást!

[41] Proklos szövegének az előbbi (40. sz.) megjegyzésben idézett részletével kapcsolatban (*i. m.* 371, 2—10) Heath megjegyzi, hogy ebben már „we have the germ of such an idea as that worked out by Lobatchewsky" (*The Thirteen Books* etc. vol. I., 207). Hasonlóképpen, O. Becker is úgy említi a Proklos kommentárjából idézett kérdéses helyet, mint „eine erste Vorahnung der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie von Gauss, Bolyai, Lobatschewskij". (*Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg—München, II-ik kiadás, 1964, 169).

[42] *κἀκείνους* (268, 26).

A fejlődés lényegesebb csomópontjai ebben a vonatkozásban a következők lehettek:

(a) a *direkt* eljárások gyakorlati kudarca arra vezetett, hogy a bizonyítandó tétellel szembeállítsák a *tompaszög* és a *hegyesszög* hipotéziseit és hogy megkíséreljék ezeket *megdönteni*;

(b) a hegyesszög hipotézisének megdöntésére irányuló kísérletek gyakorlati sikertelensége arra vezetett, hogy e hipotézis *hamis voltát állító*, és senki által kétségbe nem vont meggyőződéssel szemben felvegyék, hogy a *hegyesszög hipotézise nem hamis*, és — ebben a vonatkozásban az a valóban fölötte meglepő eredmény adódott, hogy szigorúan bizonyítható[43] egy a hegyesszög hipotézisénél még sokkal *többet* állító tétel.

A tompaszög rendszerének szinguláris alakzatai

(Eth. Eudem. 1222b 35—36)

13. Ime, végül a negyedik — az (1) és (2) ikertöredéken kívül kétségtelenül a legjelentősebb szöveg —, amelyben egy a *tompaszög* hipotéziséből eredő tételre történik célzás. Nevezetesen, az *Eudemoszi Etika II* 6 fejezetében olvassuk a következő példát *(1222b 35—36)*:

(5) *ha a háromszög átváltozik* (*μεταβάλλοι*) — *akkor szükségszerűen átváltozik* (*μεταβάλλειν*) *a négyszög is, így például ha* (a háromszög szögeinek összege) *három* (derékszöggel válik egyenlővé, akkor a négyszög szögeinek összege) *hat* (derékszöggel lesz egyenlő), *ha pedig* (a háromszög szögeinek összege) *négy* (derékszöggel válik egyenlővé — akkor a négyszög szögeinek összege) *nyolc* (derékszög lesz).

Az eredeti szöveg ismét rendkívül elliptikus;[44] semmi nehézségbe nem ütközik azonban a hiányzó szövegrészeket (a fenti fordításban *zárójelek* között) helyreállítani.

Világos, hogy itt a *μεταβαλλεῖν* ige nem egy meghatározott konkrét háromszögnek valami más háromszögbe való *átváltozását* jelenti, hanem *magának a háromszögnek, mint olyannak*, — a háromszög lényegének a teljes megváltozását, amelynek következtében ez az alakzat elveszti euklideszi jellegét és átváltozik kontra-euklideszi háromszöggé.

Fölötte érdekes azonban az ezt a lényeges jellegbeli átváltozást illusztráló két példa: a második ugyanis a $8R$ *szögösszeggel rendelkező négyszög — a tompaszög* hipotézisére épülő geometriának (pozitív értelemben, a sík RIEMANN-geometriájának) egy szinguláris alakzata: ez a RIEMANN-geometria *maximális négyszöge*, amelynek mind szögösszege, mind területi mértéke az ebben a síkban négyzetek által realizálható *maximális* érték; és, amint ismeretes, e szinguláris alakzat tk. egy, egyetlen önmagában zárt, véges hosszúságú egyenessé degenerálódott négyzet, amelynek kerülete szintén az ebben a síkban realizálható maximális hosszúságú egyenesdarabbal egyenlő.

Kézenfekvő a feltevés: vajon a *tompaszög* hipotézisével foglalkozó görög geométerek felismerték volna, hogy *a gömb felszínén megvalósul a tompaszög hipotézise*

[43] Nem lehet azonban teljesen kizárni azt a feltevést sem, hogy a Proklos által idézett aporia már az eleai Zénonnak tulajdonított cca. 40 aporiát tartalmazó lajstromban is szerepelt volna. Ezt azonban semmi nem támasztja alá és önmagában nagyon kevéssé valószínű.

[44] *εἰ δέ γε μεταβάλλοι τὸ τρίγωνον, ἀναγκη καὶ τὸ τετράγωνον μεταβάλλειν, οἷον εἰ τρεῖς, ἕξ, εἰ δέ τέτταρες, ὀκτώ.* (verum si quid in trigono mutaris, necessario est et in tetragono mutes, ut si tres habuerint, sex, et si quattour, octo; 1222b 35—36).

— ha a nagyköröket egyeneseknek tekinti? Hiszen ha ezt az analógiát felismerik és elfogadják, akkor az ARISTOTELES által fent idézett konfigurációk szinte minden további nélkül szembeötlenek: a $3R$ szögösszegű háromszög a gömbfelületen a szabályos *gömbi oktaédernek* egyik lapja; a $6R$ szögösszegű négyzet két egymásra merőleges fél nagykörív által határolt degenerált négyszög; ugyanez a kétoldalú gömbi idom azonban felfogható úgy is, mint egy $4R$ szögösszeggel rendelkező degenerálódott háromszög; végül pedig $8R$ szögösszeggel rendelkező négyszög — maga az egyik nagykör, mint kerület által határolt teljes félgömb. Sajnos azonban, bármilyen egyszerű és tetszetős is ez az értelmezés, a mai olvasó számára — *semmiféle történelmi bizonyítékkal nem rendelkezünk*, ami ezt valószínűvé tenné. Még az *Elemek* előtt megjelent ugyan AUTOLYKOS munkája a gömbről[45] — de ennek tartalma még rendkívül primitív és hiányzik belőle minden lényeges elem, ami a fenti értelmezéshez elengedhetetlenül szükséges; így például hiányzik belőle az az egyszerű konvenció, hogy a nagykörök közötti szögek a síkgeometriában egyenesek között előálló szögek mértékszámával mérhetők; és egyáltalán hiányzik a gömbfelületi-szög, valamint a gömbháromszög fogalma. Csupán az i. u. I. században MENELAOS gömbtanában jelennek meg első ízben azok a fogalmak[46] és tételek, amelyek elengedhetetlenül szükségesek ahhoz, hogy a tompaszög hipotéziséből eredő és a fenti (5) *Eth. ad Eudem. 1222b 35—36* töredékben megjelenő degenerált, különleges szinguláris alakzatok definiálhatók legyenek; itt jelenik meg első ízben a két nagykör által alkotott szög és mértéke fogalma, itt jelenik meg először a gömbháromszögnek, mint három *nagykörív* által határolt gömbfelszíni alakzatnak a precíz fogalma, valamint az alapvető tétel is, amelyik kimondja, hogy a *gömbháromszög szögeinek összege nagyobb mint* $2R$; MENELAOS *Sfairiká*jával kapcsolatosan meg kell még jegyeznem, hogy annak első könyvében a szerző nyilvánvaló módon az EUKLIDES-féle *Elemek* első könyvének az előadásmódját követi, amennyiben az *Elemek* abszolút tételeit megfelelő módon átviszi és bebizonyítja a gömbfelszín geometriájában is. Valószínű, hogy ő már észrevette a gömbfelszín és a sík geometriája közötti analógiát, amelynek alapja nyilván az, hogy a nagykör — egyenesnek tekinthető. Semmi nyoma sincsen azonban annak, hogy azt az alapvető analógiát előtte már felismerték volna. Sőt, határozottan állíthatjuk, hogy egy *ilyen megállapítás teljesen ellentétben áll az egész görög matematika és az egyetemes görög tudományos gondolkodás szellemével.* A görög matematika számára mindörökre elfogadhatatlan lett volna, hogy egy nagykört tudatosan az *egyenes analogonjának* fogjanak fel és hogy ennek alapján a gömbfelszín geometriáját úgy kezeljék, mint egy sík geometriát. A mai értelemben vett *modell* fogalma teljesen idegen volt a görögök számára.

Ennek ellenére nem lehet teljesen elvetni azt a feltevést, hogy ezt az analógiát mégis egyáltalán *észrevették*. Ehhez a feltevéshez némi alapot szolgáltat az a történelmi értesülés, amely szerint már az ARISTOTELES előtti generáció matematikusai foglalkoztak a szabályos poliéderek szerkesztésével, valamint ezeknek a gömbbe való beírásával[47] — tehát *implicite* a gömbfelszín szabályos felosztásával is.

[45] *Autolyci de Sphaera quae movetur;* edidit. lat. interpr. et. comment. instruxit F. Hultsch, Lipsiae 1885.

[46] M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. I., 293, Leipzig 1907; van der Waerden, i. m. 321.

[47] Egy az *Elemek* XIII. könyvéhez írott Scholion szerint Theiatetos lett volna az első, aki az oktaedert a gömbbe írta (*Scholia in Elementa*, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1888; lásd. *Euclidis Opera Omnia* edid. I. L. Heiberg et H. Menge, vol. V; 654, 5).

A gömbfelszín oktaedrális felosztását a *Corpus* is megemlíti *(De Caelo III 4, 303*b *1)*. Egy ilyen gömboktaéder szemlélésénél azonnal feltűnnek a fenti analógiák — és nem zárhatjuk ki teljesen, hogy abban az időben, amikor EUDOXOS már egészen bonyolult kombinációkat végzett a csillagászati gömbökkel — egy ilyen gondolat nem merült volna fel *ötletszerűen*. Mégis, amint már említettem, ennek a feltételezésére semmilyen konkrét anyagi bizonyíték nem áll rendelkezésünkre. És, amint később még rátérünk — a fenti sajátságos alakzatok létrejöttére lehetséges más magyarázatot is találni.

Az euklideszi és az általános kontra-euklideszi hipotézis

(Anal. Poster. 93 a 33—35; Eth. Nicom. 1140 b 15—16)

14. — A *Corpus*ban előforduló, általam ismert, töredékek — a fentieken kívül még egy kivételével[48] mind az *Elem. I. 32.2* tétellel szembeállított általános kontra-euklideszi, *T* hipotézissel kapcsolatosak. Ilyen volt már a fentebb említett *(3) Anal. Poster. 90 a 13* önmagában rendkívül elliptikus (az összes között talán legkevésbé jelentős) töredék is. Rendkívül világos, explicit és éles módon van megfogalmazva a *két egymásnak formálisan ellentmondó* állítás szembenállása egy a következő, az *Anal. Poster. II 8* fejezetében, szereplő töredékben:

(6) *ῆ ποτέρας τῆς ἀντιφάσεώς ἐστιν ὁ λόγος, πότερον τοῦ ἔχειν δυο ὀρθας ῆ τοῦ μὴ ἔχειν*; Querimus utrius contradictionis ratio sit, utrum habendi duos angulos rectos an non habendi; *93 a 33—35.*

A szöveg valóban egészen világos — de mint majdnem mindig ha ez megjelenik valahol — a *λόγος* kifejezés többféleképpen is értelmezhető, bár a jelen esetben lehetséges értelmezések lényegében mind szinte azonos jelentésűek. Ezek szerint a következő *parafrázis* segítségével fordíthatjuk az idézett szöveget:

vajon a két egymásnak ellentmondó állítás közül melyik *bír értelemmel,* vagy: melyik képviseli a háromszög *logoszát, létalapját,* (a francia *raison d'être* értelmében)[49], sajátos három-szög összességeként való egzisztenciájának *lényegét, okát, fogalmát, definícióját — az-e vajon amelyik azt állítja, hogy a háromszög szögeinek összege 2R, vagy pedig ellenkezőleg az, amelyik azt állítja, hogy szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel?*

Talán a leghelyesebb volna a *λόγος* szót egyáltalán le sem fordítani és görög eredetiben meghagyni: a „*háromszög logosza*" kifejezés ebben az esetben, mint egy zenei akkord, tartalmazza ennek a szónak összes, ebben az esetben tekintetbe vehető értelmét.

Az idézett töredékben azonban különösen az vonja magára a modern olvasó figyelmét, hogy ebben az *alternativa* két végletét ARISTOTELES mint *a priori* teljesen egyformán jogosult, logikai szempontból teljesen egyenrangú *feltevéseket* kezeli; ez különben az összes töredékek közös jellemvonása: sehol nem tapasztalható semmilyen eleve kifejezett részrehajlás vagy preferencia az euklideszi variánsért; sehol egy szóval sincs ezekben a töredékekben még csak említve sem, hogy az euklideszi *Elem. I. 32.2* állítás biztosan *igaz* és méghozzá bizonyított tétel volna, szemben

[48] Lásd lejjebb a 13. *Anal. Poster. 77 b 22—24* töredéket.
[49] Lásd e kifejezés értelmezését az *Anal. Poster. 93 a* alatt.

a neki formálisan ellentmondó tézissel, amely egy önkényesen felállított pusztán hipotetikus jellegű vagy egyenesen *hamis* állítás volna csupán.

A két szembenálló állítást ARISTOTELES nyilván éppen csak *a priori,* mint *hipotéziseket,* mint egy nyílt probléma két egyaránt kérdéses lehetőségét tekinti egyformán jogosultnak, de ebben a vonatkozásban a kizárt harmadik elvét kategorikusan érvényesnek tartotta. Véleménye — amint az az idézett (6) *Anal. Poster 93 a 33—35* fragmentumból teljes világossággal és határozottsággal kiderül — ebben a kérdésben a következő volt: *a két egymásnak ellentmondó állítás közül csak az egyiket illeti meg a logikai igazságérték,* (és ha az egyik igaz, akkor a másik szükségszerűen hamis), illetve, hogy az alternatíva két pólusa közül csak az egyik lehet a háromszög attribútuma; illetve, hogy a két *a priori* lehetséges állítás közül csak az egyik képezheti a háromszög *logoszát, létalapját, lényegbeli definícióját.* Így hát a két egymásnak ellentmondó állítás csupán a mérkőzésre indulás szempontjából bír, a vita *fair play* szabályai szerint, egyenlő jogokkal; de ARISTOTELES számára nem kétséges, hogy a mérkőzésben döntés érhető el, és ez csak az egyik fél győzelmét hozhatja maga után; és bár az sem kérdéses, hogy ARISTOTELES abban is biztos volt, hogy a kettő közül a koszorú csak a klasszikus *Elem. I 32.2* tételt illetheti, nagyfokú sportszerűségre vall, hogy ezt a véleményét a mérkőzés előtt semmiképp sem nyilvánítja, és megelégszik annak a hangoztatásával, hogy a két fél közül az egyiknek és csak az egyiknek — biztosan győznie kell.

Nevralgikus pontjához érkeztünk itt el annak a szellemi fejlődésnek, amely a nem-euklideszi geometria megjelenésével zárul le: nevezetesen, az a lényeges különbség jelenik itt meg szemünk előtt, ami a szorosabb értelemben vett *nem-euklideszi* geometriát az általunk itt *kontra-euklideszi* rendszernek nevezett elmélettől megkülönbözteti. A kontra-euklideszi geometria korszakára, amint már láttuk, az a megrögzött felfogás jellemző, hogy *az euklideszi posztulátum és a neki formálisan ellentmondó kontra-euklideszi állítás közül csak az egyik lehet igaz, és ha az egyik igaz, akkor a másik föltétlenül hamis;* (a párhuzamosak problémája ehhez még azt a *feltevést* is hozzáfűzi, hogy a *kettő közül az igazság logikai értéke a párhuzamosak euklideszi állítását illeti meg).* A kontra-euklideszi rendszer képében a nem-euklideszi geometria *már jelen van* ugyan a tudatban, de egyelőre még kategorikusan negatív, visszautasított, *megtagadott* formában. A nem-euklideszi geometria *önmagában* már megvan — de egyelőre még csak az euklideszi geometria méhében; egyelőre még szervesen ehhez tartozik — de mégis tőle idegen; hiszen a még napvilágra meg nem érkezett nem-euklideszi geometriának már euklideszi szülője által hordozott embriója. A szellem ezzel már birtokában van a nem-euklideszi geometriának, de azt még *nem ismeri el magáénak,* magától azt még idegennek, magából kivetendőnek tartja és onnan kitagadja; de miután ez egyszer megjelent, mintha varázs alatt állana — magából kivetni mégsem tudja: *a szellem fenomenológiája szempontjából a kontra-euklideszi rendszer a nem-euklideszi geometria szerencsétlen tudata,* benne a nem-euklideszi geometria mint valami nem létezőt, hamisat tudja önmagát. A kontra-euklideszi rendszer elfogadása ekvivalens a következő állítással: *nem-euklideszi geometria nem létezhet.* Ámde ennek a kimondásával a nem-euklideszi geometria — ha tagadott formában is —, kétségkívül már meg is jelent és belépett a létezésbe: gyászjelentése volt a születési bizonyítványa.[50]

[50] I. Tóth, *La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée* (Études d'histoire et de philosophie des sciences, Bucarest 1962, 53—70).

A fentebb idézett *(6) Anal. Poster. 93 a 33—35* fragmentum jelentősége már most nemcsak abban áll, hogy a benne szereplő kontra-euklideszi hipotézis rendkívül pregnáns és világos megfogalmazása folytán egy az euklideszivel szemben álló hipotézis eldöntési problémájának a puszta meglétét tanúsítja történelmileg—hanem elsősorban abban, hogy általa ARISTOTELES *kinyilvánítja, hogy elfogadja a kontra-euklideszi felfogás alapján álló meggyőződést,* miszerint a két szemben álló hipotézis közül csak az egyik lehet igaz.

Az euklideszi tétel és a vele szemben álló általános kontra-euklideszi hipotézis ismét megjelenik a *Nikomachosi Etika VI. 5* fejezetében is. Ebben az etikai jellegű ítélőképességről van szó, amelyet, természetesen az érzelmi indulatok általában befolyásolnak. Ítélőképességünket (*ὑπολῆψιν* — existimationem, *1140 b 13)* nem minden téren rontja le vagy zavarja meg a kellemes élvezete vagy a kellemetlen eltűrése — hanem, nyilván csak az erkölcsi-gyakorlati jellegű cselekvés *(τὰς περὶ τὸ πρακτόν* — id quod sub actionem venit; *1140 b 15—16)* terén. Más téren azonban ítélőképességünk érzelmeinktől, a kellemes és kellemetlen benyomásoktól független. Mert

(7) *például, az, hogy a háromszög két derékszöggel* (egyenlő szögösszeggel) *rendelkezik, vagy hogy nem rendelkezik* (két derékszöggel egyenlő szögösszeggel) nyilván ilyen érzelmektől és indulatoktól mentes állítások.[51]

Ismét figyelemre méltó ebben a szövegtöredékben az a tény, hogy a két egymással szemben álló hipotézist a szerző *à priori* teljesen egyenrangú állításokként kezeli. Sőt, ezt az *à priori* megengedett egyenrangúságot az idézett szöveg még egy etikai jellegű tényező hozzáadásával csak jobban kidomborítja: a két egymással logikailag szemben álló tétel nemcsak, hogy logikailag egyenjogú, de még ahhoz sincs jogunk, hogy érzelmi, indulati alapon egyiket a másikkal szemben valamilyen *à priori* előnyben részesítsük.

A kontra-euklideszi hipotézis és a négyzet átlójának kommenzurabilitása

(De Caelo 281 b 5—7)

15. — Az általános kontra-euklideszi hipotézist tartalmazó legérdekesebb szövegtöredék kétségtelenül az *Égről* írott munka *I 12* fejezetében fordul elő. Ebben ARISTOTELES a lehetetlenség fogalmát tárgyalja és miután megállapítja, hogy kétféle lehetetlen van, az egyszerű (*ἁπλῶς*; simpliciter; *281 b 4—5*) vagy abszolút *lehetetlen,* és valamilyen *lehetetlen feltevésből származó (ἐξ ὑποθέσεως*; ex hypothesi, ex suppositione, sub conditione; *281 b 4—5)* — ez utóbbi fajtájára a lehetetlenségnek egy matematikai példát idéz:

[51] "Which is the cause, that the doctrine of right and wrong is perpetually disputed, both by the pen and the word: whereas the doctrine of lines, and figures, is not so; because men care not, in that subject, what be truth, as a thing that crosses no man's ambition, profit or lust. For I doubt not, but if it had been a thing contrary to any man's right of dominion, or the interest of man that have dominion, *that the three angles of a triangle, should be equal to two angles of a square;* that doctrine should have been, if not disputed, yet by the burning of all books of geometry, suppressed, as far as be whom it concerned was able". (Th. Hobbes, *Leviathan or the Matter, Form and Power* etc. 1651; lásd *Thomae Hobbes Malmesburiensis Opera Philosophica,* ed G. Molesworth, vol. III. 91; London 1839).

(8) *mert például, ha a háromszög szögösszegének lehetetlen két derékszöggel egyenlőnek lennie, ha ez így van* (ha ez fennáll), *úgyszintén* (*καὶ*) *a négyzet átlója összemérhető az odalával.*[52] *(281 b 5—7).*

A szöveg értelmezése semmi különös nehézségbe nem ütközik.[53] Mindenekelőtt, figyelemre méltó benne az, hogy a *lehetetlenség modalitását a klasszikus euklideszi szögösszeg tételnek tulajdonítja* — feltevésszerűen; ez azért különösen érdekes, mert sehol az aristotelesi szövegekben a *lehetetlen* kifejezés *nem* fordul elő a kontraeuklideszi hipotézissel kapcsolatosan, mint ahogy elvárható és természetes volna. Ez a tétel, valószínűleg, úgy jött létre, hogy a kontraeu-klideszi hipotézisnek olyan következményeit kutatták, amelyek lehetetlen volta nyilvánvaló. Egyike az ilyen ARISTOTELES korában jól ismert *lehetetlenségeknek* volt az az állítás is, amelynek értelmében a *négyzet átlója és oldala összemérhető;* ha tehát a kontra-euklidesi hipotézis ezt a lehetetlen következményt implikálja, akkor ebből következne magának a kiinduló, kontra-euklideszi premisszának a hamis volta is.

A kiinduló kontra-euklideszi premissza megfogalmazása ebben a példában, valószínűleg híven tükrözi a valóságban is követett dialektikus gondolatmenetet: bebizonyítandó, miszerint nem lehetséges, hogy a háromszög szögeinek összege ne legyen 2R; mert *tegyük fel az ellenkezőjét;* hogy, tehát *éppen az nem lehetséges, hogy a háromszög szögeinek összege 2R legyen;* ha ez így volna, akkor ebből következne, hogy a négyzet átlójának és oldalának aránya *racionális* (értéket is felvehet). Erről a konklúzióról már régen, és ettől függetlenül, szigorúan bizonyítást nyert, hogy *lehetetlen.* Sajnos azonban, ebből nem következik az eredetileg *igaznak feltételezett* premissza („*lehetetlen,* hogy a háromszög szögeinek összege 2R") hamis volta — mert (és ezt már a korabeli geométerek bizonyára jól tudták) *csak akkor* lehetetlen, hogy a négyzet oldala az átlóval kommenzurabilis legyen, *ha az euklideszi tétel igaz!* Ezek szerint a négyzet átlójának inkommenzurabilitása egy *euklideszi tétel,* és így, ebből a kontra-euklideszi hipotézis lehetetlensége *nem következik.*

Az idézett tétel igen lényeges és egyáltalában nem triviális; *felderítéséhez alapos*

[52] A szöveg — túlságos szűkszavúsága miatt — pongyola: nyilván a kontra-euklideszi hipotézis esetében a négyzet átlója és oldala közötti viszony értéke *nem mindig* racionális — de — az euklideszi esettől eltérően, amikor ez teljességgel lehetetlen — racionális értékeket is felvesz.

[53] *λέγω δὲ, οἷον τὸ τρίγωνον ἀδύνατον δύο ὀρθὰς ἔχειν, εἰ τάδε, καὶ ἡ διάμετρος συμμετρος,* [*εἰ τάδε*]. (Veluti triangulum impossibile est suos angulos duobus rectis aequales habere: si haec sint, et diameter commensurabilis est; 281 b 5—7). — A BEKKER-féle kiadás alapjainál álló öszszesen öt kódex közül a másodszor fellépő, és általunk itt szögletes zárójelek közé helyezett [*εἰ τάδε*] kifejezés csak egyetlenegyben „*L*" *Codex Vaticanus 253* szerepel; a többi négy kódexben „*E*" *Cod. Parisiensis Regius 1853;* „*F*" *Cod. Laurentianus 87,7*; „*H*" *Cod. Vaticanus 1027*; „*M*" *Cod. Urbinas 37)* ez a kifejezés nem szerepel. A *De Caelo* latin fordítója, Ioannes ARGYROPYLOS, ugyancsak elhagyja a másodszor fellépő [*εἰ τάδε*] kifejezést; ezzel szemben, a Firmin DIDOT-féle kiadás ezt a kifejezést mindkétszer felveszi és latin fordításában is feltünteti, megváltoztatván, a BEKKER-féle kiadáshoz viszonyítva, a szöveg pontozását is: „Veluti triangulum impossibile est suos tres angulos duobus rectis aequales habere, si haec sint; et diameter commen surabilis est, si hoc sit". A Firmin DIDOT-féle kiadásban szereplő *pontosvessző* két, egymástól független tételre bontja az egyetlen implikációt képező, összefüggő állítást, — nem beszélve arról, hogy a kétszer ismétlődő *εἰ τάδε* kifejezésben foglalt célzás így teljesen érthetetlenné válik: valóban, vajon *milyen premisszát* kell felvenni ahhoz, hogy a háromszög szögösszegének lehetetlen legyen két derékszöggel egyenlőnek lennie? és *milyen premisszát* kell felvenni, — minek kell egy bizonyos módon lennie ahhoz, hogy a négyzet átlója és oldala egymással összemérhető legyen? Ez utóbbi esetben, világos, hogy ez a premissza csak az lehet, hogy *a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel!* Tehát ismét oda jutunk így, ahol az első, és sokkal világosabb ARGYROPYLOS-féle értelmezéssel már eredetileg is voltunk!

vizsgálatokat kellett folytatni és a korhoz viszonyítva igen fejlett és aránylag bonyolult bizonyítási eljárásokat kellett igénybe venni. Mindazonáltal az implikáció premisszáját és konklúzióját összekötő gondolati láncolat rekonstrukcióját sikerül teljesen a korban használatos módszerekkel elvégezni.

Kontra-euklideszi princípiumokból — kontraeuklideszi tételek következnek

(Magna Moral. 1187 a 36—38, b 1—4; Phys. 200 a 29—30)

16. — A többi szövegek — amellett, hogy önmagukban az általános kontra-euklideszi T hipotézis puszta megléte mellett tanúskodnak — a töredékeknek egy olyan jelentős csoportját tartalmazzák, amelyik a következő alapvető fontosságú és önmagában már igen modernül hangzó *meta-matematikai* tétel illusztrálásának van szentelve: *a matematikai bizonyítások kiindulópontját képező be nem bizonyított állítások* (*ἀρχαί* — principia; ezt a szót, ebben az esetben, abban az értelemben ahogy azt ARISTOTELES az említett helyeken használja — nyugodtan fordíthatjuk az *axióma* szóval, abban az értelemben, ahogy ezt a kifejezést a mai matematikában használják) *változatlanul átviszik saját* (tehát pl. euklideszi vagy ellenkezőleg kontra-euklideszi) *tartalmukat, lényegüket — a belőlük bizonyítással származtatott tételekre.*

Tulajdonképpen ebbe a csoportba tartozik a már idézett (5) *Eth. ad Eud. 1222 b 35—36* töredék is, amelyik az említett meta-matematikai tétel illusztrálására azonban az euklideszi variáns mellett egy a *tompaszög* hipotéziséből (ill. későbbi formájában: a sík Riemann-féle geometriájából) fakadó példát idéz; ezt a szöveget is tekintetbe véve, az említett csoport összesen 7 töredéket tartalmaz — és, ami ismét feltűnő, és véleményünk szerint nem tulajdonítható a véletlen puszta játékának: ezek közül 6 — méghozzá azok, amelyekben az említett meta-matematikai tétel a legélesebb formában van megfogalmazva — a *Corpus etikai írásaiban található.*[54] Vegyük sorra ezeket.

A *Magna Moralia I 9* fejezete a *jó* és a *rossz* cselekedet kérdésével foglalkozik és azt a jelentős etikai tételt mondja ki, hogy az ember szabadon választhat (*ἑκουσίως*; *1187 b 19)* a jó *(σπουδαῖα; 1187 a 22; b 19)* és a rossz *(φαῦλα; 1187 a 23 b 20)*, cselekvése között.[55] A következő két fejezet *(Magna Moral. I. 10* és *I. 11)*, részletesebben elemzi ezt az etikai tételt. (Ezek a fejtegetések lényegében változatlanul megtalálhatatók az *Ethica ad Eudem. II. 6, 10, 11* valamint az *Ethica Nicom. III 4, 5* fejezeteiben.) ARISTOTELESnek a fenti szövegekben kifejtett álláspontja, röviden a következőkben foglalható össze: az emberi cselekvés meghatározott akarati jellegű elhatározásokból *(προαίρεσις; 1189 b 6)* ered; ezek az előzetes döntések képezik kiindulási pontját, *principiumát* (*ἀρχή*) a társadalmi-erkölcsi cselekvésnek (*πρᾶξις*), amelyet teljes egészében meghatároz,[56] nevezetesen úgy, hogy az eredeti elhatározás jó vagy rosszjellegét a cselekedetre is változatlanul átviszi; a tettek maguk úgy tekintendők, mint ezeknek a *princípiumszerű elhatározásoknak a szük-*

[54] *5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36*; *9. Magna Moral. 1187 a 36—38*; *10. Physica 200 a 29—30*; *11—12. Magna Moralia 1187 b 1—4*; *15. Eth. Eudem. 1222 b 25—26*; 16. *Eth. Eudem. 1222 b 41—42.*

[55] Manifestum igitur hoc modo in nostro arbitrio esse bona malaqua facere; *1187 a 22—23.*

[56] *εἰσὶ δὲ αἱ πράξεις γεγημέναι ἔκ τινων ἀρχῶν.* — (suntque actiones ex aliquibus progenitae principibus; *1187 b 11—12*)

ségszerű következményei. ARISTOTELES azonban ismételten hangsúlyozza, hogy elhatározásoknak és döntéseknek természetesen csak ott van értelme, ahol a követett célok az ember hatalmában vannak és általa valóban megvalósíthatók.

A *Magna Moralia* szerzője szerint itt egy egészen általános érvényű természeti jelenséggel állunk szemben: *mindenütt ahol bármilyen generáció folytán jön létre valami — van egy olyan minőségi határozmány, amely a változásban is változatlan marad, nevezetesen éppen a dolog lényege.*[57] Ez már önmagában is egy figyelemre méltó, de sajnos eddig még a megérdemelt módon kellőképpen figyelemre nem méltatott, általános tétel: *a minőségi lényeg megmaradásának a tétele,* — annak a kimondása, hogy *a dolgok tartalmaznak egy olyan minőségi határozmányt, amelyik bizonyos transzformációkkal szemben invariáns.*

Ezt az általános tételt a szerző azonnal egy — általa igen kedvelt — biológiai példával illusztrálja: *az élővilágban a leszármazott, az őt generáló szülő faji jellegét, lényegét változatlanul megtartja; („... Csak sast nemzenek a sasok, és nem szül gyáva nyúlat Núbia párduca");* és az, amiből, például a fa létrejön — a mag (*σπέρμα*) — úgy tekintendő, mint a létrejött dolognak, a fának a princípiuma.[58] Ami pedig általában magukat a princípiumokat illeti — folytatja a szerző — ezekre vonatkozólag áll a tétel: *amilyenek maguk a kezdetben adott princípiumok — olyan mindaz is ami ezekből a princípiumokból ered.*[59] És ebben az eszmei környezetben jelenik meg ezek után egy *geometriai* példa, mert — a szerző véleménye szerint — az említett tétel a geometriában sokkal világosabban, sokkal kézzelfoghatóbban (*ἐναργέστερον*) szemléltethető és belátható (*κατιδεῖν*; intueri; *1187 a 35—36*):[60] mert itt, a geometriában,

(9) *ha egyszer felveszünk valamilyen* (bizonyítatlan kiinduló tételeket) *princípiumokat,* (akkor) *bármilyenek is legyenek ezek a princípiumok, olyanok lesznek azok* (a következmények, tételek) *is, amelyek a princípiumokból erednek* (mint maguk a princípiumok). — *(1187 a 36—39)*

A princípium és a következmények közötti összefüggésnek ugyanez a gondolata jelenik meg — az előbbieknek reciprok formájában — a *Fizika II 9* fejezetében, ahol a következő szöveget olvashatjuk:

(10) *Ha a háromszög* (szögeinek összege) *nem egyenlő két derékszöggel — úgy a principiumok sem állanak fenn*[61] *(200 a 29—30).*

E szöveg értelmezése szintén nem ütközik semmi nehézségbe: ha a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel, akkor azok a geometriai princípiumok, amelyekre ez a tétel alapszik, szintén nem állhatnak fenn többé; ezek nem lehetnek ugyanazok, mint abban az esetben, ha a háromszög szögeinek összege két derékszöggel egyenlő.

Ezekben a töredékekben — különösen a *(9) Magna Moral. 1187 a 36—38* szövegben — a legfeltűnőbb mindenekelőtt az, hogy a szerző szinte természetesnek

[57] *πᾶσα γὰρ φύσις γεννητική ἐστιν οὐσίας τοιαύτης οἷα ἐστίν.* — (quod omnis natura eiusdem essentiae est procreatrix atque ipsa est; *1187 a 30—31*); lásd még *De Gener. Animal. 742 b 29.*

[58] *αὕτη γάρ τις ἀρχή.* (ıd namque principium est; *1187 a 33*).

[59] *ὡς γὰρ ἂν ἔχωσιν αἱ ἀρχαί, οὕτως καὶ τὰ ἐκ τῶν ἀρχῶν ἔχει.* — (ut enim habuerint principia, ita quae a principis ortum ducunt; *1187 a 34—35*).

[60] *καὶ γὰρ ἐκεῖ ἐπειδή τινες λαμβανονται ἀρχαί, ὡς ἄν αἱ ἀρχαὶ ἔχωσιν, οὕτω καὶ τὰ μετὰ τὰς ἀρχάς.* (...ubi cum ponatur principia quaedam, qualia fuerint ipsa, talia erunt quae ipsa consequentur; *1187 a 36—38*).

[61] *οὐδὲ γὰρ ἐκεῖ αἱ ἀρχαί, εἰ μὴ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς.* (neque enim ibi principia sunt, si non triangulus tres habeat angulos duobus rectis aequales; *200 a 29—30*).

tartja, hogy a geometriában szabadon, minden gátlás, minden akadály nélkül fel lehet venni, a további bizonyítások kiindulópontjául, egymástól geometriai lényegükben nemcsak különböző, de egymásnak formálisan ellentmondó „*bármilyen*" princípiumokat, és — ami talán még ennél is feltűnőbb —, hogy a szerző ezt a geometriára vonatkozó meta-matematikai tételt *sokkal alkalmasabbnak tartja etikai tételének illusztrálására,* mint az ezt megelőző biológiai tételt: nyilván, véleménye szerint, ebben a tekintetben sokkal pontosabb analógia áll fenn a geometria és az etika között. Valóban a biológiában csupán az egyes fajok közötti különbségről van szó, és ezek a különbségek természeti adottságok — addig míg az etikában a jó és a rossz irreducibilis ellentétéről van szó, amelyek között az ember *szabadon választhat.*

Az idézett (9) *Magna Moralia 1187 a 36—38* töredékben felmerülő állítás további részletezése alátámasztja a fenti értelmezést: *mert ha például a háromszög* (szögeinek összege) — olvassuk — *két derékszöggel egyenlő, úgy a négyszög* (szögeinek összege) *négy* (derékszög) *(1187 a 38—39).*

Ebben a példában mindenekelőtt az feltűnő, hogy ARISTOTELES itt (és ez az etikai munkákban általános) mindenekelőtt a háromszög szögösszegének konkrét értékét kimondó állítást, a további bizonyítások kiindulását képező, bizonyítatlan princípiumaként (*ἀρχή*) kezeli — tehát, mint egy mai értelemben vett *axiómát.* Ennek az alapvető tételnek az axiómaként való kezelése nem valami, ARISTOTELES hiányosnak feltételezett matematikai képzettségéből eredő, véletlenszerű botlásból ered, hanem — következetesen végigvonul az összes etikai íráson.

A háromszög szögösszegére vonatkozó állításnak princípiumként, axiómaként való kezelése nem csupán azért feltűnő, mert ez a tétel az *Elemek*ben szigorúan bizonyítva van — hanem főleg azért, mert a tétel bizonyítását ARISTOTELES maga jól ismerte és mert éppen ez a tétel a kedvenc, folyton visszatérő példája az általános érvényű, szigorúan bizonyított és szükségszerű jelleggel bíró igazság példázására.[62]

Két, nemcsak hogy eltérő, de egymásnak némileg ellentmondó felfogás van itt jelen:

(a) a régebbi korokból fennmaradt és általánosan elterjedt klasszikus felfogás szigorúan bizonyítottnak tekinti a tételt, amely szerint a háromszög szögeinek összege $2R$ — és egy másik felfogás, amelyik,

(b) — a szögek összegére vonatkozó állítást mindenekelőtt más tételek szigorú levezetésére szolgáló bizonyítatlan kiindulási tételnek tekinti, a bizonyítási láncolat princípiumának (*ἀρχή*); sőt, ezen túlmenőleg, ezt a már önmagában heterodox magatartást még azzal is súlyosbítja, hogy ehhez a kezdeti bizonyítatlan állításhoz még csak nem is rendel semmiféle logikai értéket, nem állítja róla sem azt, hogy igaz, sem azt, hogy hamis, tehát a szó mai értelmében vett hipotézisnek tekinti — és végül, az egészet következetesen azzal tetézi, hogy (amint a nyomban következő és általában az összes általunk elemzett töredékekből kitűnik) vele egyenrangú kiindulási hipotézisként fogadja el a neki formálisan ellentmondó állítást is.

Nyilvánvaló, hogy ez utóbbi felfogás csak azoknak a matematikusoknak a körében alakulhatott ki, akik nem tartották kielégítőnek az *Elem. I. 32.2* tétel klasszikus bizonyítását és akik az általuk megkísérelt indirekt bizonyítási kísérlet keretében azt tapasztalták, hogy az *Elem. I. 32.2* tétellel szembeállított T hipotézist

[62] Lásd erre vonatkozólag Bonitz *Index*ét a megfelelő kifejezésnél. (H. Bonitz, *Index Aristotelicus,* Berolini 1870; megjl. mint a Bekker-féle Aristoteles kiadás V-ik kötete).

nem sikerül megdönteniök és ebből azt a következtetést vonták le, hogy, tehát, az *Elem. I. 32.2* állítás igaz volta a valóságban effektíve épp úgy híján van a bizonyításnak, mint ahogy bizonyítatlan a vele szemben álló T állítás hamis volta is; ezért tehát, szigorú tudományos szemmel nézve — egyelőre mindkettő egyformán úgy kezelendő, mint egy-egy bizonyítási láncolat kiindulópontja, princípiuma, *ἀρχή*-je, azaz mint egy-egy puszta hipotézis — de nem a szónak a mai természettudományokban, hanem az ókori és a mai matematikában egyaránt érvényes dialektikai értelmében: a bizonyítások láncolatának *megegyezés* alapján elfogadott kiinduló tézise.

Valóban a *(9) Magna Moral. 1187 a 36—38* töredékben kimondott metamatematikai tétel illusztrálására a szerző az előbbire következő sorokban mindjárt be is vezeti a következő további két példát:

(11) *ha azonban a háromszög átváltozik* (azaz ha megváltoztatja geometriai lényegét) — *úgy vele együtt átváltozik a négyszög* (lényege) *is;*[63]

(12) *mert* (az előző — *1187 a 38—39* sorokban kimondott implikáció) *kontrapozíció segítségével megfordítható: ha a négyszög* (szögeinek összege) *nem egyenlő négy derékszöggel, úgy a háromszög* (szögeinek összege) *sem egyenlő két derékszöggel.*[64]

Most már egészen világossá vált, hogy mi az a lényeg, mi az a faji jelleg, amit az *ἀρχή* logikai nemzés, deduktív generáció közvetítésével és a szükségszerűség erejével átszármaztat a belőle mint egy magból kisarjadó geometriai tétel-utódokra: ez, magának az illető princípiumon alapuló deduktív rendszernek a faji jellege, a geometriai lényege, — az amit egyik esetben az *euklideszi,* a másik esetben pedig a deduktív rendszer *kontra-euklideszi* jellegének, vagy egy szóval, *euklidesziségnek,* illetve *kontra-euklidesziességnek,* vagy *euklideszellenességnek* nevezhetnénk. Ez, a fentebb kimondott meta-matematikai tétel — (9) *Magna Moral, 1187 a 36—38* — ezek szerint már tartalmazza önmagában annak a jelentős ténynek is a spontán elismerését, hogy az *aequivalenciákat létrehozó formál-logikai transzformációkkal szemben, a deduktív rendszer sajátos jellemző lényege, faji jellege invariáns marad.*

Etika és geometria

17. — Ezek után érthetővé válik, miért tartja a szerző alkalmasabbnak a geometriai analógiát etikai tételének illusztrálására, mint a biológiából merített példát: a biológiában nem függ tőlünk a választás a fennálló lehetőségek között — míg a geometriában szabad választásunkon múlik, hogy a két ellentétes *ἀρχή* mint *à priori* egyenrangú és egyenlő jogú lehetőség közül melyik mellett döntünk, melyiket tesszük meg logikai, *dianoetikai* cselekvésünk kiindulási tézisévé; de miután ezek bármelyikét egyszer elfogadtuk, ez, a szükségszerűség erejével meghatározza a belőle folyó következmények, dianoetikai cselekedetek jellegét, és saját lényegét ezekre változatlanul átszármaztatja; és valamint etikai téren a választásnak és a döntésnek csak ott van értelme, ahol az embernek hatalmában áll a megvalósítás —

[63] *ὡς ἄν μεταβαλλῃ τὸ τετράγωνον συμμετβάλλει.* (et si in triangulo sit secus, etiam in quadrato secus erit; *1187 b 1—2*).

[64] *ἀντιστρέφει γὰρ καὶ εἄν τὸ τετράγωνον μὴ ἔχῃ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας, σὐδέ τὸ τρίγωνον ἕξει δυσίν ὀρθαῖς ἴσας,* — (nam haec convertuntur; et si quadratum quattuor angulis aequales non habuerit angulos, ne triangulo quidem duobus rectis habebit aequales; *1187 b 2—4*).

úgy geometriai téren is; mert a gondolkodás univerzumában valóban az embernek módjában és hatalmában áll mindkét geometriai variáns effektív megvalósítása, ami itt, a deduktív láncolatok létrehozásában nyilvánul meg.

Természetesen, még csak nem is gondolhatunk arra, hogy ARISTOTELES, vagy geométer kortársai, a kontra-euklideszi rendszert a mai értelemben véve tartotta volna az euklideszi geometriával egyenlően jogosultnak; hanem ellenkezőleg — ugyanabban az értelemben gondolhatta őket egyformán *megvalósíthatóknak*, mint ahogy az etikai cselekvés terén a jó és a rossz megvalósítása egyenlőképpen az ember hatalmában van; sőt: ez csak egyedül az embernek van hatalmában, mert az ember kizárólagos privilégiuma a rosszat cselekedni — hiszen ARISTOTELES felfogásában a *természet* önmagában mindig csak *jó* lehet[65]; és amint a további töredékek erre még több fényt derítenek — ő (és valószínűleg ez lehetett a geométerek véleménye is) ezt a kontra-euklideszi geometriát egy rossz, degenerált, elfajzott geometriának tartotta.

Jellemző például, hogy az *Analytica Posteriora I 12* fejezetében ezt a kontra-euklideszi rendszert (bár ott ennek csak egyik, a tompaszög hipotézisére épülő variánsáról van szó) ugyanazzal a *φαῦλος* kifejezéssel illeti, mint az imént idézett etikai szövegekben (1187 a 2—23) a rosszat: e kifejezés jelentése többárnyalatú: *rossz, romlott, megromlott, elromlott, elfajzott, degenerálódott, kisebb értékű, silány* stb.

Az *Anal Poster I. 12* fejezetében azt az ismét nagyon modern hangzású metamatematikai tézist fejti ki, hogy nem minden tetszés szerinti, önkényesen megfogalmazott állítás igaz voltának a bizonyítását jogosult megkövetelni és elvárni egy meghatározott tudományágtól. Valamely deduktív rendszertől csak akkor követelhetjük meg joggal, hogy egy állítást bebizonyítson — ha ez az állítás a rendszer fogalmai és relációi segítségével, tehát a rendszeren belül, megfogalmazható; csak az ilyen állítások interrogatív megfogalmazása bír értelemmel és nevezhető egy valóban tudományos kérdésnek (*ἐρώτημα ἐπιστημονικόν*; interrogatio scientialis, *77 a 38—39*). Bár a kérdés formájában megfogalmazott állítás még nélkülözi a logikai értéket (sem igaz, sem hamis), figyelemre méltó, hogy ennek ellenére ARISTOTELES már felfigyelt arra, hogy ezek is két osztályba sorolhatók aszerint, hogy hozzá tartoznak egy meghatározott deduktív rendszerhez vagy sem, hogy megfogalmazhatók-e, hogy értelemmel bírnak-e benne vagy sem. (Természetesen ARISTOTELES még csak nem is gondolhatott arra, hogy egy deduktív rendszeren belül meg lehet fogalmazni olyan állításokat is, amelyek azon belül egyáltalán el nem dönthetők).

A geométer tehát köteles számot adni már az általa felvetett puszta kérdésről is: *értelemmel bír-e az a geometriában* vagy sem. Azonban ARISTOTELES e helyütt is kifejezetten hangsúlyozza, hogy *ami viszont a princípiumokat illeti, ezekről a geométer nem köteles* (és nem is képes) *számot adni*, ezeket megindokolni *(77 b 5—6)*. Már most, egy kérdés formájában megfogalmazott tétel, egy megoldandó feladat, kétféle értelemben is lehet *nemgeometriai* jellegű *(ἐρωτήματα ἀγεωμέτρητα*; interrogationes non geometricae; *77 b 16—17)*. Ilyen mindenekelőtt, természetesen, egy a geometria körébe egyáltalán nem tartozó, például zenei jellegű kérdés (ez a példa, ebben a szóhasználatban — *τὸ μουσικὸν ἐρώτημά* — PROKLOStól származik[66],

[65] Ezt a gondolatot hangsúlyozza és taglalja *Eth. Eudem. 1227 a 18*, valamint *Metaph. 1051 a 19—21*. De a természet is hibázhat: így jönnek létre az elvetélt, elhibázott szörnyek, *τέρατα ἁμαρτήματα*. (monstra peccata; *Phys. 199 b 4*); lásd még *De Gener,. Animal. IV. 3.*

[66] Proklos 58, 25.

aki az *Analytica Posteriora I 12* fejezetének a lényegét — a forrás megjelölése nélkül — az *Elemek I* könyvéhez írott kommentárjaiban röviden megismétli).

Vannak azonban teljesen geometriai fogalmakból összeállított tézisek is, amelyek *mégsem bírnak szorosabb értelemben vett geometriai jelleggel;* hogyan és mivel jellemezhető már most a tudatlanságnak (*ἄγνοια*) az a fajtája, *amelyik nyelvezetében geometriai ugyan — de mégis híján van annak az alapvető jellegnek, amely lehetővé tenné, hogy a geometriai tudomány körébe sorolható legyen? (77 b 17—18).*

A tudományosság jellegét akkor kell, természetszerűleg, mindenekelőtt megvonni egy a geometria principiumaiból származtatott állítástól, ha magában a levezetésben egy formális hiba rejtőzik; ebben az esetben azonban egy közönséges *paralogizmussal* van dolgunk és — amint ARISTOTELES hangsúlyozza — a matematikában, a közönséges disputációktól eltérően, ilyen paralogizmusok igen ritkán fordulnak elő *(77 b 27—28, 30—31).*

A tudománnyal azonban ellentétesek azok a levezetések is, amelyek megfogalmazásukban, nyelvezetükben teljesen geometriaiak ugyan — de a *geometria sajátos principiumaival ellentétes principiumokból erednek.*[67] Már ebből is világos, hogy Aristoteles nyilván a kontra-euklideszi rendszerre céloz — és nem kérdéses, hogy az egész problémakomplexumot ez idézte fel benne: rendkívül nyugtalaníthatta ezt a logikai elmét egy olyan geometriai rendszernek a látványa, amelyet nem lehet a szokványos módon hamisnak mondani, amelyet nem terhel semmilyen formális hiba, amely nem tartalmaz paralogizmusokat, amely látszatra mindenben teljesen geometriai jelleggel bír —, hiszen teljes egészében geometriai nyelvezeten kifejezhető — és ennek ellenére *mégsem fogadható el mint geometria.* Mi az akkor, ami arra késztethet, hogy visszautasítsuk? Nyilván csak az, hogy a geometria, *az igazi, a jó* geometria *principiumaival ellentétes*[68] *principiumokból* származik. És íme rögtön egy példa egy ilyen *ageometrikus* állításra:

(13) *Mert az a vélemény, hogy a párhuzamosak metszik egymást egyféleképpen geometriai másféleképpen nem-geometriai* (jelleggel bír)[69].

Ez az *ötödik* töredék,[70] amelyben említés történik a tompaszög hipotéziséről; a tompaszög hipotézis szempontjából ez nem hoz újat: nyilván, egy az (1) és (2) ikertöredékre *(Anal. Prior, 66 a 13—15)* történik itt rendkívül elliptikus, de félreérthetetlen célzás; ami új információt tartalmaz ez a *(13) Anal. Poster, 77 b 22—24* töredék, az azonban igen lényeges; megtudjuk belőle, hogy Aristoteles (ill. geométer kortársai) *a párhuzamosak* metszésére vonatkozó tételt nem tekintették közönséges paralogizmusnak, annak ellenére, hogy ez egy önmagában ellentmondó hamis végkövetkeztetésre jut; *(„a párhuzamos, a nem metsző egyenesek — metszik egymást")* de ez a végkövetkeztetés egy szigorú logikai észjárás eredménye, amely semmilyen formális hibát nem tartalmaz: ha elfogadjuk, hogy a háromszög szögösszege nagyobb mint $2R$ — akkor a konklúzió ebből hibamentesen következik.

[67] *καὶ ἡ ἄγνοια αὕτη, ἡ ἐκ τῶν τοιούτων ἀρχῶν, ἐναντία.* (atque haec ignorantia, quae est ex huiusmodi principiis, est contraria scientiae; *77 b 26—27*)

[68] Proklos, — aki ezt az egész gondolatmenetet a forrás megjelölése nélkül közli, a geometria principiumainak inkorrekt (*διαστρόφως*) használatáról beszél (*i. m.* 58, 27—59, 1).

[69] *τὸ δὲ τὰς παραλλήλους συμπίπτειν οἴεσθαι γεωμετρικόν πως καὶ ἀγεωμέτρητον ἄλλον τρόπον.* (putare autem aequidistantes concurrere geometricum quodammodo, et non geometricum alio modo; *77 b 22—24*); lásd még *De Gener. Animal. II. 8.*

[70] A megelőző nagy fragmentum, amelyben a tompaszög hipotézise előfordul, a következő: *1—2. Anal. Prior. 66 a 11—15; 4. Anal. Poster. 90 a 33—34; 5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36.*

Ami különösen a jelen töredéket illeti — ez nyilván csak egy konkrét példa szerepét játssza, amely azonban az összes kontra-euklideszi tételeket reprezentálja — hiszen a geometria princípiumaival ellentétes princípiumokból nem csak önellentmondó következtetéseket *(„a nem-metszők metszik egymást”)* vonhatók le! Így hát ezek nem tekinthetők egyszerű paralogizmusoknak — de nem is tekinthetők a szó igazi értelmében vett jó geometriai tételnek, a *„geometria”* jelzőt mint pozítivumot, kénytelenek vagyunk megvonni ezektől.

ARISTOTELES érzi, hogy ennek az álláspontnak valamilyen megindoklásra, megalapozásra van szüksége és e célból egy nem kifejezetten tudományos fórumhoz — a köznapi ösztönös gondolkodás spontán termékeihez fordul. Nevezetesen, a köznapi életben két értelemben használnak bizonyos *negatív kifejezéseket:* így például a köznapi élet nyelvében is, kétféle értelemben használják a *„nem zenei”* kifejezést: egyszer olyasvalamire, ami egyáltalán nem tartozik a zenéhez vagy a költészethez; de főleg, és sajátos értelemben, ez a kifejezés a *zeneietlen* és a *költőietlen—zenei és költészeti munkákat jelöli: a ritmus nélküli és disszonáns melódiát, a költőiség híján levő verset, tehát a degenerált, rossz, anti-muzikális és anti-poétikus termékeket.* Hasonlóan használható az *„a-geometrikus”* jelző is:

(14) — *kétféleképpen, mint az a-ritmusos,* ritmustalan, zeneietlen (kifejezés); *egyféleképpen azt is jelenti az a-geometrikus* (kifejezés), *hogy az amiről szó van egyáltalán nem geometriai* (*μὴ ἔχειν*) nem tartozik a geometria körébe, (nem tartalmaz magában semmi geometriai jelleget) *hasonlóképpen mint az a-ritmusos* (egyik jelentése is az, hogy a dolog egyáltalán nem tartozik a költészet és a zene körébe), — *másik értelemben azonban hogy* (a geometriait, a geometriai jelleget) *romlottan, degeneráltan, rossz formában* (*φαύλως*) *tartalmazza.*[71]

Ez a kontra-euklideszi geometria tehát sem nem hamis (*ψεῦδος*) — sem nem abszurd (*ἄτοπος*), sem nem lehetetlen (*ἀδύνατος*) — hanem a szó erkölcsi értelmében véve (cf. *1187 a 23, b 20*) rossz, romlott, degenerált, elfajzott (*φαῦλος*)[72]. Csupán közbevetőleg jegyzem meg, hogy hasonló vélemény uralkodott a múlt század utolsó évtizedeiben is a már kész *nem euklideszi* geometriáról a matematikusok nagy részénél.

Ellentétes princípiumok a geometriában

18. — Az etikai könyvekben található többi töredékek is mind a fenti értelmezéseket támogatják. Íme, itt van mindjárt egy töredék az *Ethica ad Eudemum II 6* fejezetéből: a matematikaikban is (*ἐν ταῖς μαθηματικαῖς*; *1222 b 23—24*) is az a helyzet, hogy:

[71] *διττὸν γὰρ τοῦτο, ὥσπερ τὸ ἄρρυθμον, καὶ τὸ μὲν ἕτερον ἀγεωμέτρητον τῷ μὴ ἔχειν ὥσπερ τὸ ἄρρυθμον, τὸ δὲ ἕτερον τῷ φαύλως ἔχειν.* — (duplex enim hoc est quemadmodum arrhythmum; et alterum quidem est non geometricum, quia non habet sicut arrhytmum, alterum vero, quia prave habet; *77 b 24—26*).

[72] Az egyetlen hely, ahol az euklideszi és a kontra-euklideszi hipotézis, mint egy alternativa két egymással szemben álló pólusa jelenik meg, a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* töredék; figyelemre méltó azonban, hogy, valamint itt, a *14. Anal. Poster. 77 b 24—26* töredékben a kontra-euklideszi hipotézist nem a „hamis” logikai érték kifejezésével hárítja el, hanem a *φαῦλος* etikai jelzővel bélyegzi meg úgy ott, a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* töredékben viszont az alternatíva két pólusa közül egyetlen elfogadható (de egyelőre meghatározatlan) esetet sem az „igazi” logikai érték konvencionális terminusával (*ἀλήθης*) illeti — hanem a sokkal tágabb és több értelmet magával hordozó, talán kevésbé precíz, de sokkal mélyebb rezonanciájú *λόγος* kifejezéssel.

(15) *ha a princípum átváltozik,* (megdől), *akkor ugyancsak átváltozik mindaz ami bizonyítás útján ebből következik.*[73]

Ez a töredék ugyanazt tartalmazza lényegében, mint a *(9) Magna Moral. 1187 a 37—38)*, csakhogy itten a *(14) Eth. Eud. 1222 b 25—26* töredékben, immár nem csupán arról van szó, határozatlanul, hogy *„bármilyen princípiumokat veszünk fel...”* hanem kategorikus formában, az adott geometriai princípium átváltozásáról, megdőléséről: ARISTOTELES a *κινέω* igét használja ezzel kapcsolatban, amely itt nyilván nem jelenthet egy szokványos értelemben vett mechanikai elmozdulást, hanem valamilyen gyökeres átváltozást; ebben az értelemben fordította az INTERPRETUS INCERTUS is ezt a szót a latin *labefacere,* megdönteni, lerombolni igével, amit nagyon találónak tartok.

Majd kissé lejjebb ismét a már idézett *(5) Eth. Eud. 1222 b 35—36* szövegrész következik, ahol az imént *(15) Eth. Eud. 1222 b 25—26* kimondott általános metamatematikai tézis illusztrálására az eredeti, euklideszi, principiumot a tompaszög hipotézise helyettesíti.

Mindezeket a fejtegetéseket, amelyekben a geometriai példa taglalása foglalja el a központi helyet — a következő megjegyzés zárja le:

(16) *Ha valami valóságosan létező számára fennáll a lehetősége annak* (vagy: ha valami számára valóban, igazán fennáll a lehetősége annak), *hogy ellenkezőképpen is legyen, úgy szükségszerű módon ennek princípiumai is ugyanúgy vannak*[74] (azaz ezek is szükségszerűen ellenkezőjükbe változnak át).

Önmagában természetesen banális tény, hogy a konkrét egzisztenciával bíró dolgok (*εἶναι τὸ πρᾶγμα*; *14 b 19, 21*) egymással ellentétes határozmányokkal bírhatnak; ez azonban *nem* szükségszerű.[75] Teljesen újszerűen, sőt feltűnően hat azonban, hogy ARISTOTELES most az ellentétes princípiumok lehetőségét megengedi a geometriában is, nevezetesen a háromszög szögeinek összegére vonatkozólag. A *lehetőség* modalitását Aristoteles itten — *szükségszerűséggel* állítja szembe: ugyanis, közvetlenül a fent idézett szöveg után megjegyzi, hogy a szigorú szükségszerűség birodalmában nem áll fenn többé a lehetősége annak, hogy valami így és ellenkezőféleképpen is lehessen; majd hozzáteszi, hogy ezzel szemben minden, aminek eredete az emberi cselekvésben van, minden, aminek ura az ember és annak szabad akaratától függ — mindennek számára fennáll a lehetősége annak, hogy legyen vagy hogy ne legyen, hogy így vagy ellenkezőféleképpen legyen.

Változtathatatlan-e a háromszög szögeinek összege?

19. — A *Metafizika VII 7* fejezete ismét az emberi tevékenység kérdésével foglalkozik, de ezúttal nem etikai, hanem *ontológiai* szempontból. A mesterség útján létrehozott dolog — legyen az az építő által létrehozott ház vagy az orvos által létrehozott egészség — ős-formája, amely ezek lényegét képezi, e dolgok *eido-*

[73] *καὶ γὰρ ἐνταῦτα κινουμένης τῆς ἀρχῆς πάντα μάλιστὰ ἂν τὰ δεικνύμενα μεταβάλλοι.* — (hic enim ipso principio labefactato, labefieri omnes, quae sub illo principio fluxere, demonstrationes oportet; *1222 b 25—26*).

[74] *ὥστ' εἴπερ ἐστὶν ἔνια τῶν ὄντων ἐνδεχόμενα ἐναντίως ἔχειν, ἀνάγκη καὶ τὰς ἀρχὰς αὐτῶν εἶναι τοιαύτας.* — (quocirca si quaedam sunt eiusmodi ut etiam contra se habere possint, necessario etiam principia sunt eiusmodi; *1222 b 41—42*).

[75] *ἔτι ἐπὶ τῶν ἐναντίων οὐκ ἀναγκαῖον, εἂν θάτερον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν εἶναι.* — (praeterea non necesse est, si contrarium alterum sit, etiam reliquam esse; *14 a 7—8*).

sza (εἶδος) a lélekben van, és a mesterség útján létrejött dolog igazi oka éppen ennek anyagtalan *eidosza, fogalma, eszméje, formája, fajtája.* Ez a gondolati szubsztancia, ez a gondolati lényeg képezi a dolgot létrehozó tevékenység kiindulópontját, princípiumát és — ami igen lényeges — ez az *eidosz* maga, ugyanaz az *eidosz, egymással ellentétes határozmányokat nyerhet;* így pl. az egészség és a betegség — ugyanannak az egyetlen *eidosznak* a két egymással ellentétes határozmánya. *(1032 a 12—1032 b 16).* Ezek szerint — (mint ahogy az természetes) — nem csak az erkölcsi cselekvés, hanem a bármilyen dolgot létrehozó mű-tevékenység esetében is fennáll a két egymással ellentétes határozmány megvalósításának a lehetősége az emberi cselekvés számára. A *Metafizika* idézett szövegéből hiányzik a matematikai példára való hivatkozás. Az *Eudemoszi Etika II 11* fejezetében azonban ismét visszatér a szabad emberi döntés és cselekvés kérdése erkölcsi téren, és itt, most, ezt ARISTOTELES egyaránt a valamilyen dolgot létrehozó műszaki jellegű tevékenység, valamint, ismét ezzel párhuzamosan, a háromszög szögeinek összegére vonatkozó geometriai példával illusztrálja. Ez a hely önmagában elég homályos — ennek ellenére mégis könnyen értelmezhető, mivel a *Metafizika VII 7,* valamint az *Eudemoszi Etika II 6* fejezeteiből idézett szövegeknek a nyilvánvaló tartalmi ismétlése.

Lényegében ARISTOTELES itt a következőket mondja: A valamilyen dolgot létrehozó emberi tevékenységben a *cél* az, ami a cselekvést meghatározza: a megvalósítandó cél, a cselekvés valódi *princípiuma,* éppúgy, mint az elméleti (szemlélődő, teoretikai) tudományokban (pl. a geometriában) a levezetések kiindulópontját képező *feltevés;* miután az orvos mint megvalósítandó célt az egészséget tűzte ki maga elé, akkor ebből mint princípiumból, szükségszerűen következik, hogy ennek létrehozására *ezt és ezt* kell tenni; hasonlóképpen a geometriában, ha a kiinduló feltevés mint princípium: *„a háromszög szögeinek összege két derékszög”* — akkor ebből ismét szükségszerűen következik *ez és ez. (1227 b 28—32).* Ami a megvalósítandó célt illeti, ARISTOTELES szerint, ez természete szerint csak a *jó* lehet, a *rossz* mindig valami természetellenes *(1227 a 20—30).*

Ezek után, tekintetbe véve az *Eudemoszi Etika II 6, 11* valamint a *Metafizika VII 7* fejezeteiből vett, egymást kiegészítő részleteket — ARISTOTELES felfogása a következőképpen fogalmazható: a szükségszerűség birodalmában a létrejövő jelenségeket egyetlen ősprincípium teljesen meghatározza; itt, egy meghatározott fajtájú lényből mindig szükségszerű módon ugyanabba a fajtába tartozó lény jön létre; ebben a szükségszerű folyamatban az történik, hogy az ős-principium, — — (az élőlények esetében ez maga a nemző sejt; *1187 a 31—35*) — változtatás nélkül a szükségszerűség erejével származtatja át minőségi lényegét utódaira. De nemcsak a természetben zajlanak ilyen folyamatok — amelyekben egy meghatározott ős-princípium mint abszolút kezdet, minőségileg meghatározza az összes belőle sarjadó folyamatokat —, hanem az etikai és a mesterségbeli (technikai) tevékenység terén is, valamint a geometriában. Etikai téren ez a princípium a *jó* vagy a *rossz* princípiuma, a technikai tevékenység terén ez a princípium, mint a *tevékenység* végpontja, maga a célként megvalósítandó dolog (ellentétes határozmányokkal bíró) *eidosza,* a geometriában pedig a kiindulópontot képező, bizonyítás nélkül elfogadott állítások a princípiumok. Mindezeken a területeken azonban — a természeti folyamatoktól eltérően — emberi tevékenységgel van dolgunk, ahol fennáll a szabad választás lehetősége két egymással ellentétes princípium között. Az etikai cselekvés terén ez a két princípium a *jó* és a *rossz;* de a technikai tevékenység terén is minden *eidosz* két egymással ellentétes határozmányt nyerhet (így például az orvos szabadon választhat az egészség vagy a betegség realizálása között); ezekkel *párhuzamban* áll a geometriában a háromszögek szögeinek összegére vonatkozó állítás, amely mint princípium (vagy akár, mint szögeinek összességeként definiált három-szög határozmányok nélküli ősprincípiuma, eidosza) két egymással ellentétes határozmányt nyerhet: nevezetesen, a $2R$ vagy a $2R$-től eltérő konkrét értéket. A belőlük folyó következmények immár külön-külön szükségszerűen meg vannak határozva és nem lehetséges, hogy ugyanabból a princípiumból két egymásnak ellentmondó tétel következzék, hiszen ezek, ebben az esetben lerombolnák egymást; *(1222 b 26—28)*.

Meddig megy el ez a hasonlatosság? Vajon a geometriában is fennáll a lehetősége annak, hogy két szembenálló alternatíva megvalósítása között szabadon válaszszunk? És ha igen, akkor vajon ezek közül csak az egyik valósítható meg, avagy egyforma joggal mindkettő? Ilyesmit, természetesen, ARISTOTELES a geometriával kapcsolatosan sehol sem állít, sőt még a kérdést sem veti fel sehol, — mégis, elvitathatatlan, hogy az etikai írásokból idézett passzusok ilyesmit *sugalmaznak*, hiszen ezekben kategorikusan beszél a geometriai princípiumok *megváltozásáról, átváltozásáról*. Márpedig általában ARISTOTELES a geometriát és általában a matematikát a *változtathatatlanság*, a *merev mozdulatlanság*, *az örök igazság* birodalmának tekintette,[76] ahol minden *vagy* szükségszerű módon örökké igaz, *vagy* szükségszerű módon örökké hamis, lehetetlen és ahol nem lehetséges, hogy ugyanaz az állítás egyszer igaz legyen, másszor ismét hamis.

Némi fényt vet erre a sajátos — nem éppen egyértelmű helyzetre a *Metafizika IX 10* fejezetében szereplő következő szöveg, amelyben ismét a klasszikus *Elem. I. 32.2* euklideszi tétel áll szemben az általános kontra-euklideszi hipotézissel:

(17) *Ha úgy vélekedünk, hogy a háromszög nem változik, akkor nem vélekedhetünk úgy hogy szögeinek összege egyszer két derékszöggel egyenlő, máskor nem; hiszen akkor megváltozna*[77] *(1052 a 6—7)*.

Ebben a fragmentumban figyelemre méltó, hogy ARISTOTELES a háromszög *változtathatatlanságát* feltételes módban kezeli,[78] és azt mint egy *vélekedést* (*οἴησις*), és nem mint egy kétségbevonhatatlan, szilárd tudományos tényt prezentálja. Etikai írásaiban viszont már minden gátlás nélkül beszél a geometria princípiumainak átváltozásáról, és egyik princípiumnak a neki formálisan ellentmondó hipotézissel való helyettesítéséről. A *gondolkodás létrehozó tevékenysége*[79] eredményeként a szellem saját birodalmában szabadon megvalósíthatja —, mint ahogy meg is valósította — mindkét geometrai rendszert. A szabad választás nem azt jelenti, hogy a kettő közül csak az egyiket valósíthatja meg és ebben az esetben a másikat nem — hanem azt, hogy valamilyen módon, a két egyformán lehetséges és egyformán valóságos geometria közül szabadon, minden külső kényszer nélkül

[76] Entium enim quae mathematica sunt, sine motu sunt *(Metaph. 989 b 32)*; lásd még *De Gener. Animal. 742 b 26—29.*

[77] *οἷον τὸ τρίγωνον εἰ μὴ μεταβάλλειν οἴεται, οὐκ οἴησθαι ποτὲ μὲν δύο ὀρθὰς ἔχειν ποτὲ δ' οὔ, μεταβάλλοι γὰρ ἄν.* (utputa si triangulum non putet mutari, non opinabitur modo duos rectos habere modo non: mutaretur etenim; *1052 a 6—7*).

[78] *εἴ τις ὑπολαμβάνει ἀκίνητα* (si quis immobilia putet; *1052 a 5*); az itt szereplő *ὑπολαμβάνω* ige jelentése: *vélekedni*, valamint feltevésként, hipotézisszerűen felvenni stb.

[79] Az ember létrehozhat valamit vagy a műtevékenység (technika), vagy valamilyen képesség (*δύναμις*) vagy pedig a gondolkodás segítségével (*ποιήσεις... ἀπὸ διανοίας*, — effectiones... ab intellectu; *Metaph. 1032 a 27—28*); *ὅτι νόησις ἡ ἐνέργεια.* — quia intellectio est actus; *(Metaph. 1051 a 29—31)*.

választhatja magáénak az egyiket és *visszautasíthatja* a másikat. A két geometria nem a valóság és a valótlanság, a lehetőség és lehetetlenség szempontjából különbözik egymástól, nem ezen az alapon *választhatjuk* magunkénak az egyiket a másikkal szemben — hanem egy a közöttük fennálló szinte etikai jellegű különbség kritériuma alapján. ARISTOTELES ezt a két egymásnak ellentmondó geometriai állításra épülő rendszert is az etikai, valamint a technikai tevékenység eredményeivel állította párhuzamba: valamint a technikai tevékenység terén minden *eidosz* két egymással ellentétes határozmánya közül az egyik, a természetnek megfelelő jó (pl. az egészség), a másik a természetellenes rossz (pl. a betegség) — hasonlóképpen a geometriában is a jó geometria a természetnek megfelelő geometria, az, amelyik (az egészséggel párhuzamosan) a klasszikus állításra alapszik, amelynek értelmében *a háromszög szögeinek összege két derékszög;* az a geometria, amelyik az ennek formálisan ellentmondó feltevésre épül mint princípiumra egy rossz, a természettel ellentétben álló *degenerált, megromlott* geometria (és ebben a tekintetben a betegséggel állítható párhuzamba). Ámde, valamint az orvostudománynak sem célja a betegség és a romlás megvalósítása *(Eth. Eudem. 1227 b 22—32)* — úgy kell, hogy legyen valószínűleg, — (tehetjük hozzá) — egy geometriai jellegű *hippokrateszi eskű* is, amelyik a megromlott, kontra-euklideszi geometria megvalósítását, illetve annak elfogadását *tiltja.*

De hogyan lehet a jót a rossztól megkülönböztetni? Ez a kérdés, valóban, igen élénken foglalkoztatta ARISTOTELESt; itt ismét párhuzam áll fenn a *geometria* és az *etika* között: mindkét téren maga a princípium, amely a következményeket szükségszerűség erejével meghatározza — logikai, dianoetikai úton teljességgel *bizonyíthatatlan.* Ilyen körülmények között hogyan szerezhet az ember mégis bizonyságot arról, mi a jó és mi a rossz, mi az igaz, — a jó és a hamis, — a rossz geometriai princípium?

Etikai téren az *erény* a jó valódi oka;[80] ez mondja meg nekünk, hogy a két lehetőség közül melyik a jó és melyik a rossz, bár ezután szabadon választhatunk egyik vagy másik megvalósítása között. Elméleti téren, így például a geometriában azonban az *értelem,* a *Núsz* (*νοῦς*) az, amelyik rávezet a princípiumok igaz vagy hamis voltára és nem valamilyen bizonyító eljárás, amely erre elvileg képtelen.[81] A *νοῦς*, a gondolkodás erénye — az igaz iránti helyes erkölcsi érzék: *geometria — — more ethico constructa.*

Ez az aristotelesi *νοῦς* nagymértékben hasonlít KANT *a priori szemléletéhez,* és annak valószínűleg történelmi őse; csakhogy ARISTOTELESnél, KANTtól eltérően, egy intellektuális és nem egy szemléleti intuícióról van szó. Mindkettő esetében azonban ez az intellektuális ill. szemléleti intuíció egyértelműen meghatározza az *egyetlen igaz* princípiumot; KANTnál ez még tovább is megy és meg sem engedi a vele ellentétes princípium szemléletes felfogását, bár KANTNnál is — akár ARISTOTELESnél, az egyetlen igazival szembenálló princípium *logikailag elgondolható,* de — mint az értelemmel (*νοῦς*), ill. a tér a priori intuíciójával ellenkező — elvetendő.

[80] *Eth. Nicom. 1151 a 17—19; Eth. Eudem. 1228 a 1.*

[81] *Anal. Poster. 100 b 7—13;* (ugyanaz a gondolat ismételten szerepel az etikai írásokban is; *Eth. Nicom., 1141 a 7, 1142 a 26* és különösen *Magna Moral. 1197 a 20—24;* lásd még *De Gener. Animal. 742 b 29.*

A háromszög szögösszegére vonatkozó tétel bizonyíthatatlansága

Ezek szerint tehát a fentiekből az derül ki, hogy ARISTOTELES már valamilyen módon belátta a háromszög szögeinek összegére kimondott állítás bizonyíthatatlanságát *és annak szükségességét, hogy ezt a tételt magát, mint egy bizonyítatlan geometriai princípiumot vegyék fel.*

Belátható, hogy a geometria további fejlődése szempontjából a legfontosabb éppen ez az utóbbi meta-matematikai következtetés: *a háromszög szögeinek összegére vonatkozó állítás bizonyíthatatlan.*

Hangsúlyoznom kell, hogy ARISTOTELESnél igen nagy számú szövegrész vall arra, hogy ezt a meta-matematikai felfogást ő valóban igen komolyan és mélyen magáévá tette. Ezzel kapcsolatban egyenesen jogunkban áll a háromszög szögeinek összegére vonatkozó tételre vonatkozó *aristotelesi koncepcióról* beszélni. Anélkül, hogy az összes idevágó szövegek részletes analízisébe bocsátkoznánk — ezt az aristotelesi felfogást a következőkben vázolhatjuk:

(a) Mint minden fogalom esetében — úgy a háromszög esetében is — megkülönböztethetjük a háromszög fogalmának is annak csupán *nominális* definícióját[82] attól a definíciótól, amely a háromszög fogalmának a *lényegét* definiálja; a nominális definíció csak arról szól, hogy milyen a kérdéses dolog, de egyáltalában semmit sem mond annak egzisztenciájáról: a definiált dolog éppúgy *létezhet,* mint *nem;* hiszen lehet *nem létező* vagy pedig egyenesen lehetetlen dolgokat is definiálni[83]; a lényeg definíciója azonban azt mondja meg, hogy *mi* a dolog egzisztenciájának *létalapja;* ez a dolog igazi *oka,* ez a *lényeg* az, amelynek következtében a dolog egzisztál.[84]

(b) A háromszög esetében a lényeg a *három* szög összegének konkrét értéke, amely elvileg lehet $2R$ vagy pedig $2R$-től különböző és ebben az esetben nagyobb vagy pedig kisebb mint $2R$[85]

(c) A szögösszeg (konkrét értéke) *minden* harmadik *közvetítő fogalom nélkül* — azaz: közvetlenül tartozik hozzá a háromszöghöz, mint annak lényegi attributuma[86]; bizonyítás azonban csak ott van, ahol szillogizmus van, tehát ahol három fogalom van, úgyhogy a két szélső fogalom között van egy harmadik, középső fogalom, amelyik a kettő között közvetít; ez az oka annak, amiért a két szélső fogalom közül az egyik a másiknak, mint alanynak, az állítmánya; ha azonban az állítmány minden harmadik forgalom közvetítése nélkül tartozik hozzá az alanyhoz, akkor egy bizonyíthatatlan princípiummal van dolgunk, ami a bizonyítási láncolatnak kiindulópontját képezi[87]; megfordítva: a princípium mindig egy ilyen állítás, amelyben harmadik, középső fogalomnak nincsen helye[88].

(d) Maga a *lényeg* tehát *bebizonyíthatatlan* valódi szillogizmusok segítségével, ellenben e szillogizmusok segítségével ez a lényeg valamilyen módon *megvilágítható,*

[82] A nominális definícióra vonatkozólag lásd. *Anal. Poster. 71 a 14—15, 92 b 15—16.*

[83] *Anal. Poster. 92 b 7; Phys. 208 a 30—31.*

[84] Erre vonatkozólag lásd *Anal. Poster. 71 a 9—13; 75 a 35; 90 a 31—32; 93 a 32—33; 93 b 2—12, 32.*

[85] Lásd fentebb a *3. Anal. Poster. 90 a 13 és 4. Anal. Poster. 90 a 33—34* fragmentumokat.

[86] Lásd erre vonatkozólag főleg az *Anal. Prior. I. 35* fejezetét, valamint a következő helyeket: *Anal. Prior. 67 a 24—25; Anal. Poster. 73 b 30—32, 74 a 1—2; Topica 110 b 22—23, 168 b 3; Eth. Eudem. 1222 b 39—41.*

[87] *Anal. Poster. 72 b 19—20.*

[88] *Anal. Poster. 72 a 7—8; 72 b 20—22; 84 b 20—27; 93 b 22.*

hozzáférhetővé tehető;[89] a lényegre vonatkozó szillogizmusok ezért csak *kvázibizonyítások;*[90] a háromszög szögeinek összegére vonatkozó ismert geometriai gondolatmenet ezek szerint nem is a szó igazi értelmében vett szigorú bizonyítás, hanem csupán egy olyan gondolati eljárás, ami valamit, nevezetesen a háromszög szögeinek konkrét összegét — *átviszi* egy segédszerkesztés közbevetésével a *potencialitás állapotából az aktualitásba:* az ún. bizonyításban alkalmazott szerkesztés tehát *nem bizonyítás,* hanem azt, ami a háromszög fogalmában, alakzatában már potenciálisan amúgy is benne foglaltatik — nevezetesen, hogy szögeinek összege $2R$ — átviszi az aktualitás állapotába, egy olyan állapotba, amelyben ez nyilvánvalóvá, effektívvé, szinte kézzel foghatóvá válik, a gondolkodás számára.[91] Igazi bizonyítás ezek szerint csak ottan lehetséges, ahol a három ítéletben szereplő három fogalom köre egymásnak *alája van rendelve, mint rész az egésznek;* ahol ez nem áll fenn, ahol tehát a fogalmak körei teljesen fedik egymást — ottan nem lehetséges valódi bizonyítás[92] — ezek mind *cirkuláris* bizonyítások, hiszen ilyen esetben a három ítélet közül bármelyik ugyanazzal a joggal lehet premissza és konklúzió vagy közvetítő középtétel; ebben az esetben *nem lehetséges előrehaladás,* nem lehetséges valami új ismeret, hanem csak puszta tautologikus ismételgetése ugyanannak a dolognak — hiszen az ilyen tételek egymással logikailag ekvivalensek; és minden olyan gondolatmenet, amely a lényegi definíciót gondolja bizonyítani, tk. *nem bizonyítás,* mert egy helyben topog és nem bizonyít semmit;[93] és azok, akik azt hiszik, hogy ezen az úton a lényegi definíciót bizonyítják, a valóságban a *petitio principii* hibájába esnek, hiszen egy ilyen gondolatmenetben a valódi princípium hiányzik, mert a végkövetkeztetés maga, egy kissé változott formában, a princípiumként felvett kiindulótétellel logikailag ekvivalens és így ez a gondolati láncolat önmagában zárt és *egy valódi princípiumot követel magának.*[94]

Ezzel kapcsolatban igen figyelemre méltónak tartom, hogy a *petitio principii* név alatt ismert logikai hiba illusztrálására ARISTOTELES ismét a geometriához, nevezetesen a párhuzamosok elméletéhez folyamodik.

Egy eléggé homályos szövegben arról van szó, hogy ezt a hibát követik el azok, akik azt hiszik, hogy „*a párhuzamosakat írják*". Anélkül, hogy a részletekre kitérnénk — más szövegekkel is összhangban — az „írni" (γράφειν) igét itten nem értelmezhetjük másképp, mint egy valami, talán nem egészen szigorúnak és ortodoxnak

[89] *Anal. Poster. 92 b 15—18.*
[90] *Anal. Poster. 93 b 38—94 a 2.*
[91] *Metaph. 1051 a 21—22, 29—31.*
[92] *Anal. Prior. 49 b 37—50 a 1.*
[93] *Anal. Poster. 72 b 25—27, 91 a 31, 35—37, 91 b 10—11.*
[94] *Anal. Prior. 64 b b 28—29.* — Ismeretes, hogy az αἴτημα (*követelmény, ami megköveteltetik)* kifejezés a geometria bizonyos princípiumainak a megjelölésére Euklides *Elemeiben* jelenik meg első ízben; vajon nem éppen a *petitio principii* (τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖσθαι. — *Anal. Prior. 64 b 28*; lásd még *Topica 162 b 31) terminus technicusa* képezte ennek az elnevezésnek az alapját? Aristotelesnél szerepel ugyanis először az a gondolat, hogy a geometria circulus-mentes felépítéséhez *megköveteltetik* egy új princípium és ez éppen a párhuzamosak euklideszi posztulátuma; feltehető, hogy éppen erre a kritikus állításra alkalmazták először matematikai körökben ezt, az egyelőre familiáris kifejezést: ez egy olyan princípium ami, ha nem is önmagában és önmagától, minden további meggondolás nélkül elfogadható — (*Topica 100 b 19—21*; Hero, *Opera.* ed. Heiberg, vol. IV. 112; Lipsiae 1912) — vagy ha nem is konstruktív jellegű — mégis, más okokból — (nevezetesen a hibamentes, szigorú logikai felépítés kedvéért) — *megköveteltetik,* hogy bizonyítás nélkül elfogadtassék és a geometria princípiumai közé felvétessék.

tekintett *bizonyító eljárásra* használt familiáris kifejezést.[95] Ebben az értelmezésében a kérdéses szöveg a következőképpen hangzik:

(18) *ezt teszik* (ti. a *petitio principii* hibáját követik el) *azok, akik azt hiszik, hogy a parallelákat írják* (bizonyítják) *ugyanis nem veszik észre* (elrejtik saját maguk előtt), *hogy olyasvalamit* (ti. valamilyen tételt) *vesznek fel* (ti. a bizonyítás kiinduló hipotéziseként), *ami ugyancsak nem bizonyítható, ha nem léteznek a paralellák.*[96] *(Anal. Prior. 56 a 4—7).*

Véleményem szerint, ebben az önmagában igen homályos szövegtöredékben a *párhuzamosak problémája direkt módszerrel történő bizonyítási kísérletére,* illetőleg az abban természetszerűleg és szükségszerűen felmerülő logikai hibára (ez szükségszerűen mindig egy *petitio principii*) *történik célzás.* A bizonyítandó tétel — minden valószínűség szerint — nem lehetett más mint az *Elem. I 29,* amelynek premisszája valóban a *párhuzamos egyenesek egzisztenciáját* mondja ki. Véleményem szerint, ezt a tételt — amelyből a háromszög szögeinek összegére vonatkozó *Elem. I. 32 2* tétel következik — a korabeli geométerek annak *reciprok* tételéből, nevezetesen az *I 27* és *I 28* állításokból gondolták szigorúan levezetni. Ez utóbbi két tétel azonban *abszolút* és így, ha ezekből az *Elem. I 29* mint reciprok tétel azonnal következne, akkor ennek abszolút jellege ismét bizonyítva volna, és a *párhuzamosak problémája* ezáltal meg lenne oldva.

Ahhoz, hogy az *Elem. I. 27* ill. *I. 28* állításokból ezek reciprokja, az *Elem. I .29* következzék elengedhetetlenül szükség van azonban annak a feltételezésére, hogy az adott egyeneshez (rajta kívül fekvő ponton át) megkonstruált párhuzamos (amelynek egzisztenciáját az *Elem. I 27* abszolút eljárással bizonyítja) az *egyetlen* olyan, amely az adott *egyenest nem metszi;* minden valószínűség szerint a konstruált párhuzamosnak ezt az *unicitását* a korabeli geométerek szinte öntudatlanul, mint egy bizonyításra nem is szoruló, talán figyelemre sem méltatott, evidens tényt vették fel; ARISTOTELES geométer kortársai pedig már kimutathatták az ebben a gondolatmenetben rejlő logikai fogyatékosságot, ti. hogy ez a rejtett feltevés maga is az *Elem. I. 29* állítás közvetlen következménye.

21. — Rá kell itt mutatnunk a *bizonyításra vonatkozó aristotelesi felfogásnak* egy kritikus pontjára. ARISTOTELES *csak a szillogizmust tekintette szigorú bizonyításnak;* mai kifejezéssel élve, tehát, csak az *implikációt* (és ennek is csak egy speciális fajtáját); ő maga egyrészt már egész világosan tudta, hogy az ilyen *implikáció* esetében a *hamis implikálja az igazat;*[97] egy ilyen implikációt azonban ő nem tartott tudományos eljárásnak;[98] ezért ehhez még egy igen fontos feltételt fűzött hozzá: *tudományos szillogizmus az, amelyikben a premissza igaz; és ha a premissza igaz, akkor szükségszerűen igaz a következmény is (modus ponens).* Másrészt ARISTOTELES a matematikát tekintette a deduktív tudomány mintaképének, de tudta azt is, hogy a *matematikai bizonyítások lényegében nem szillogizmusokból épülnek fel* és hogy

[95] A *γράφειν* terminus itt használt értelmezésére vonatkozólag lásd T. L. Heath, *On an allusion in Aristotle to a construction for parallels* (Abhdlg. zur Gesch. der Math. IX. 1899, 155—156); valamint Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géometrique des grecques*, Paris 1958, 107.

[96] *ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐδῶν τῶν παραλλήλων.* — (quod quidem faciunt qui lineas parallelas se describere putant; non enim intelligunt se talia sumere quae demonstrari nequeant, nisi sint parallelae; *Anal. Prior. 65 a 4—7*).

[97] Lásd erre vonatkozólag az *Anal. Prior. II 2–4* fejezeteit.

[98] *Anal. Poster. 72 a 6—8.*

a matematikában leggyakrabban megfordítható tételek, ekvivalenciák fordulnak elő a bizonyításokban[99] (amikor a tételt szükséges és elegendő feltételeiből vezetik le); az ilyen ekvivalenciákon alapuló matematikai bizonyítások tehát az aristotelesi bizonyítás-elmélet kritériumainak nem felelnek meg; ezzel szemben ez az aristotelesi felismerés, amely maga ARISTOTELES számára *pejoratív* jelleggel bír, igen közel áll már a *modern axiomatikus felfogáshoz,* amely azonban mint *pozitívumot* fogadja el, hogy az axiómákból levezetett, azokkal ekvivalens tételek lényegében az axiómákban benne foglalt tartalom *tautologikus* ismétlései.

ARISTOTELES tehát — minden valószínűség szerint — azt tartotta, hogy a háromszöget mint *három szög* összességét, a szögösszeg konkrét értéke definiálja —, hogy ez a konkrét érték jelenti magának a háromszögletű alakzatnak a lényegét, a létalapját és a létokát; elvileg ez a szögösszeg lehet két derékszöggel egyenlő, de lehet attól eltérő is, és bizonyítás útján nem győződhetünk meg arról, melyik ezek közül valóban a háromszög szögeinek összege.

Természetesen gondolni sem gondolhatunk arra, hogy ARISTOTELES a kontra-euklideszi hipotézist is az euklideszi tétellel egyenrangúan igaznak fogadta volna el.

A kontra-euklideszi alakzatok ellenkeznek az egyenes szemléletes grafikai képével

22. — Egy másik szövegcsoport, immár rávilágít ARISTOTELESnek erre a kontra-euklideszi hipotézisére vonatkozó felfogására is.

Ezt, röviden a következőkben foglalhatjuk össze: a *kontra-euklideszi hipotézis nem fogadható el mint egy jó (igaz, egészséges) geometria alapja, mert ha rajz útján akarjuk ábrázolni az egyenesvonalú alakzatokat,* mint amilyen pl. a háromszög, *akkor ott, ahol egyenest mondunk, a valóságban görbéket kell rajzolnunk.* Ehhez hozzáfűzhetjük, hogy ezek szerint (amit ARISTOTELES nem mond ki sehol) az értelem, a *νοῦς,* amelyik a két egymással szemben álló hipotézis közül a jót kiválasztja — *végül is a természetes térszemlélet diktátumát követi;* az ARISTOTELES-féle eredeti intellektuális szemlélet így ezen a téren a még érzéki térszemlélettel azonosul.

Ez a felfogás tükröződik mindenekelőtt a *Physica II 9* fejezetének egy helyén *(200 a 16—19),* ahol ARISTOTELES a következőket mondja:

(19) *ha az egyenes ez* (a *τοδί,* hoc — mutató névmás értelmezhető úgy is, mint gy az előadó által a homoktáblára éppen lerajzolt egyenesre mutató mozdulat kísérőszava, tehát: *„ez itt, ilyen"* — de értelmezhető mint egy egyszerű kifejezés, amely csupán célzásszerűen utal az egyenes ismert képzetére: *ha az egyenes ez és ez, (ilyen és ilyen) — akkor szükségszerű, hogy a háromszög szögeinek összege két derékszöggel legyen egyenlő;... ha azonban ez utóbbi nem áll* (tehát ha a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel) — *akkor egyenes sincsen*[100] (akár abban az értelemben, hogy ebben az esetben *az egyenes sem olyan, mint amilyennek ismerjük,* vagy hogy *ez a fajta egyenes sem létezik* többé, vagy egyszerűen, hogy a háromszög többé *nem egyenes* oldalú alakzat).

[99] *Anal. Poster. 78 a 10—11.*

[100] *ἐπεὶ γὰϱ τὸ εὐθὺ τοδί ἐστιν, ἀνάγκη τὸ τϱίγωνον δύο ὀϱθαῖς ἴσας ἔχειν. ... ἀλλ' εἴγε τοῦτο μὴ ἐστιν, οὐδὲ τὸ εὐθύ εστιν.* — (nam cum rectum hoc sit, necesse est triangulum tres angulos duobus rectis habere; ... sed si hoc non est, neque rectum est; 200 a 16—19).

Minden koncentráltsága ellenére is e szöveg értelme világos: *a háromszög szögeinek összege szükségszerűen következménye az egyenes ismert szemléletes grafikai ábrázolásának; és ha a háromszög szögeinek összege különbözik két derékszögtől, akkor az egyenes megszűnik a szokott intuitív értelmében,* vagy pedig — ami lényegében ugyanaz — *a háromszög nem egyenes-oldalú alakzat többé.*

Ez egy igen természetes felfogás és mindig felmerül a nem-euklideszi geometria értelmezésének kapcsán is: a nem-euklideszi alakzatok grafikai ábrázolását nem lehet többé a szokott módon a közönséges grafikai egyenesekkel végrehajtani; ezek az alakzatok a nem-euklideszi alakzatoknak immár csupán *művészi* értelemben vett ábrázolásai és viszonyuk az elvont fogalomhoz immár nem ugyanaz, mint az euklideszi geometriában — és ezért könnyen tért nyerhet az a felfogás, hogy a nem-euklideszi geometria éppen azért és csak úgy lehetséges, ha azt, amit mi egy kifejezéssel *egyenesnek* nevezünk, a grafikai valóságban egy *görbével* ábrázoljuk — tehát, ha valamilyen módon erőszakot követünk el a geometriai szemléleten. Ennek a felfogásnak a meglétére enged következtetni a következő két szöveg is:

(20) *Mert például, matematikai téren tudnunk kell mi az egyenes és mi a görbe, mi a vonal és mi a felület ahhoz, hogy felismerjük, (megtudjuk) hány derékszöggel egyenlő a háromszög szögeinek összege.*[101] *(De Anima I 1, 402 b 18—21).*

Világosan kiderül ebből a szövegből is, hogy ARISTOTELES felfogásában *a háromszög szögei által felvett konkrét érték attól függ, hogy a háromszög oldalai egyenesek-e vagy pedig görbék.*[102]

Igen érdekes ebben a tekintetben végül egy a *Szofisták Cáfolásá*nak 10. fejezetében olvasható szöveg is, amelyben ARISTOTELES a háromszög kifejezés *kétértelműségéről* beszél, abban az értelemben, hogy ennek az egy kifejezésnek a jelentése egyszer olyan alakzat, amelyben a *szögek összege két derékszög* — de amely gondolatban jelenthet másfajta alakzatot is (tehát nyilván olyat, amelyben a szögek összege *nem egyenlő két derékszöggel*).

(21). — *Vajon a matematikai bizonyítások a gondolatbeliekre vonatkoznak-e vagy sem? És ha a háromszög kifejezésnek több értelme van, és ha jelentése más mint az az alakzat, amelyre vonatkozólag következik, hogy szögeinek összege két derékszög, akkor a vita arra a gondolatbeli háromszögre vonatkozik-e vagy sem?*[103] *(De Sophisticis. 10, 171 a 12—16).*

[101] *ὥσπερ ἐν τοῖς μαθήμασι τί τὸ εὐθὺ καὶ καμπύλον ἢ τὶ γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς τὸ κατιδεῖν πόσαις ὀρθαῖς αἱ τοῦ τριγώνου γωνίαι ἴσαι.* — (ut in mathematicis confert quid est rectum et quid curvum, vel quid linea, quid superficies, ad cognoscendum quot rectis anguli trianguli sint aequales; *402 b 18—21*).

[102] Meg kell itt jegyeznünk azonban, hogy Aristotelesnél már több ízben világosan ki van mondva az, a modern geometria számára alapvető gondolat, amelynek értelmében a geometriai tételek függetlenek az őket illusztráló rajzok korrektségétől; („On a dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur les figures mal faites"; H. Poincaré, *Dernières pensées,* Paris 1926, 59—60); lásd erre vonatkozólag a következő helyeket: *Anal. Prior. 49 b 34—37*; *Anal. Poster. 76 b 39—77 a 3*; *Metaph. 1078 a 19—21, 1089 a 21–25.* — Ennek ellenére egyáltalán nem szükségszerű, hogy e nagyjelentőségű tény összes, messzemenő következményeit már átlátták volna a görög matematikusok, valamint Aristoteles is; igen valószínű, hogy ennek a tételnek csak egészen minoris, alárendelt, szűkkeblű értelmezést adtak.

[103] *πότερον οἱ ἐν τοῖς μαθήμασι λόγοι πρὸς τὴν διὰνοιὰν εἰσιν ἢ οὔ; καὶ εἴ τινι δοκεῖ πολλὰ σημαίνειν τὸ τρίγωνον, καὶ ἔδωκε μὴ ὡς τοῦτο τὸ σχῆμα ἐφ' οὗ συνεπεράνατο ὅτι δύο ὀρθαί, πότερον πρὸς τὴν διὰνοιαν οὗτος διείλεκται την ἐκείνου ἢ οὔ;* — (argumentationes mathematicae ad sententiamne pertinent an non? ac si cui triangulum multa videatur significare, ac de eo concesserit, non quatenus est figura, de qua concluditur, quod eius anguli sint duo recti, estne ad illius sententiam haec disputatio an non? *171 a 12—16*).

Véleményem szerint, ebből a szövegből arra következtethetünk, hogy az a kontra-euklideszi tételekkel szemben felhozott *elhárító érv*, amelynek értelmében ezek elfogadása implicite azt jelentené, hogy ugyanannak a *háromszög kifejezésnek két különböző értelmet* tulajdonítunk: ha tehát a háromszögnek mint *alanynak* egyszer azt az *állítmányt* tulajdonítjuk, hogy *„szögeinek összege 2R"*, másszor pedig az ezzel ellentétes állítmányt, tehát, hogy *„szögeinek összege nem 2R"*, akkor igen közönséges hibát követünk el, ha feltételezzük, hogy az alanyban szereplő *„háromszög"* kifejezés mindkét esetben ugyanazt az alakzatot jelenti.[104]

23. — Végezetül idézni szeretnék még egy érdekes kitételt, ami az *Eudemosi Etika II 6* fejezetében szerepel, abba a szövegrészbe iktatva, amelyben ARISTOTELES a kontra-euklideszi háromszögeket és négyszögeket idézi:

(22) *Mindezeket* — (és itt ARISTOTELES nyilván az előző sorokban bevezetett kontra-euklideszi tételekre céloz) *nem lehet elhallgatni, de pillanatnyilag ezekről valamivel pontosabbat sem lehet mondani;*[105] *(1222 b 38—39)*.

Véleményem szerint, ez a közbevetett szövegrész jól tükrözi nemcsak ARISTOTELESnek hanem geométer kortársainak is a kontra-euklideszi tételekkel szemben érzett *csodálkozását és zavarát*: a tény, hogy ilyen kontra-euklideszi tételek előállíthatók és szigorúan bizonyíthatók — önmagában rendkívül figyelemre méltó és érdekes jelenség; ugyanakkor azonban rendkívül zavaró is, hogy ez a nyilván szemléletellenes és lényegében rossz, romlott geometria egyáltalán lehetséges, elgondolható anélkül, hogy valami *paralogizmusra* épülne; ARISTOTELES és geométer kortársai valószínűleg mind úgy érezték, hogy ez a jelenség maga még további magyarázatra szorul, de ugyanakkor tisztában voltak azzal is, hogy erre még a kielégítő magyarázatot nem találták meg.[106]

[104] A *Topica I. 1* fejezetében (*101 a 15—17*) Aristoteles a paralogizmusoknak egy olyan fajtájáról beszél, amikor a hiba nem a gondolkodás formális szabályai ellen elkövetett vétségben keresendő, hanem a rossz rajzban; paralogizmus következhetik akkor is — írja — ha félköröket vagy egyenes vonalakat úgy szerkesztenek, ahogy nincsen megengedve; az ilyen rajzokat Aristoteles *pseudográfiáknak*, azokat, akik pedig ilyesmivel foglalkoznak, *pseudografoknak*, *ψευδογράφοι* — nevezi. Általában azt tartják, hogy Aristoteles ezzel azokra céloz, akik a kor négyszögösítésével foglalkoztak és a rajzon elkövetett erőszak útján akartak megoldást kicsikarni. Ez valószínű. Nincs azonban kizárva — tekintve, hogy a szövegben nemcsak körökről, hanem kifejezetten *egyenes vonalakról* is szó van — hogy Aristoteles ezzel egyben azokra is célzott volna, akik a kontra-euklideszi tételek vizsgálatával foglalkoztak és ezeket rajzok segítségével illusztrálták.

[105] *νῦν δ'οὔ μὴ λέγειν οὔ τε λέγειν ἀκριβῶς οἷόν τε, πλὴν τοσοῦτον.* (verum impresentiarum in tantillum neque dicere accurate neque non dicere convenit; *1222 b 38—39*).

[106] Semmi különöset nem látok abban, hogy az euklideszi posztulátum megjelenését immár megelőzte egy kontra-euklideszi rendszer. Meglepő azonban — és jogos elcsodálkozásra alkalmat adó — az, hogy ez mindeddig ismeretlen maradt — annak ellenére, hogy az aristotelesi *Corpus* ennek annyi beszédes — bár a bizonyító erő szempontjából *nem egyenlő súllyal rendelkező* — dokumentumát őrízte meg számunkra. Utóvégre Aristoteles soha nem tartozott az olvasatlan szerzők közé, és a XIX. század óta az érdeklődés még csak fokozódott irányában! Azt lehetne mondani, hogy a nem-euklideszi geometria megjelenése előtt a kontra-euklideszi fragmentumok iránt nem is nyilvánulhatott meg érdeklődés, azokat nem is lehetett volna helyesen értelmezni. De ha ez így is van, akkor is normálisnak tartanánk, hogy az olyan szorgalmas és gyakran olyan kitűnő matematikai felkészültséggel rendelkező kommentátorok felfigyeltek légyen e szövegeknek legalább a *szokatlan, az euklideszitól annyira eltérő fogalmazására* és legalább megkísérelték volna valamilyen magyarázatot találni ezek jelenlétére! — De ha ettől el is tekintünk, akkor viszont már szinte szükségszerűnek tűnik, hogy ezzel szemben a nem-euklideszi geometria megjelenése és ismertté válása után ezekre a szövegekre felfigyeljenek. De ez sem történt meg. 1904-ben jelent meg Heiberg alapvető munkája, *Mathematisches zu Aristoteles* címen (Abhandlungen zur Geschichte der Math. XVIII, 3—49), ahol az általunk idézett fragmentumok nagy része *még csak a lapszámmal sincsen*

A párhuzamosak problémája i. e. IV. század második felében

24. — A fentiekben röviden ismertetett szövegrészek alapján a következőképpen jellemezhetjük az euklideszi geometria alapjaira vonatkozó felfogás állását a IV. század második felében:

(a) A PLATÓN Akadémiájában, valamint az EUDOXOS körül csoportosuló athéni matematikusok — miután a logikai szigor szempontjából alapos vizsgálatnak kezdték alávetni az ismert geometriai tételek bizonyításait — felfedezték, hogy a háromszög szögeinek összegére vonatkozó klasszikus tétel bizonyítása nem kielégítő; ez ugyanis az *Elem. I. 29* tételre alapszik ennek bizonyítása *(Anal. Prior. 65 a 4—7)*, „a párhuzamosak írása" *pedig formális hibát (petitio principii)* rejt magában; *(18. sz. töredék)*.

(b) Megkísérelték ekkor a kérdést *indirekt* úton megoldani. Erre két egymástól eltérő tételt szemeltek ki: egyrészt megkísérelték egy az *Elem. I. 29* tétellel, másrészt pedig magával az *Elem. I. 32.2* tétellel szembenálló hipotézist. Ez a két, általános jellegű kontra-euklideszi hipotézis azonban két egymástól eltérő részre bontható, amelyet egy későbbi terminussal a *tompa-szög* és a *hegyes-szög* hipotézisének nevezhetünk. A *tompa-szög* hipotézisét sikerült is lerombolni, annak következményei

idézve — míg az idézett helyeket csak annak a történelmi ténynek a leszögezésére említi a szerző, hogy Aristoteles ismerte a háromszög szögeinek összegére vonatkozó klasszikus, *Elem. I. 32.2* tételt (*i. m.* 18—19). De hát ezek mind, nemcsak ezt a történelmileg triviális tényt — hanem mindenekelőtt és mindenekfölött azt bizonyítják, hogy Aristoteles már birtokában volt a klasszikus *Elem. I. 32. 2* tétellel formálisan *szemben álló* kontra-euklideszi hipotézisnek és az ebből levonható néhány fundamentális és bonyolult következménynek is! — E. Rufini, *La preistoria delle parallele e il postulato di Euclide* (Periodico di Matematiche, III. 1923, 11—17) teljesen a Heiberg-féle dolgozat szellemében mozog és ahhoz viszonyítva újat nem hoz. — Végül, 1949-ben látott napvilágot T. L. Heath, szinte exhausztív, munkája *Mathematics in Aristotle* (Oxford). Számos fragmentum teljesen hiányzik ebből a munkából is; (így pl. a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* fragmentum, amelyet különben Heiberg sem említ); más fragmentumok pedig minden kommentár nélkül jelennek meg, egészen eltérő és nem mindig releváns eszmetársítások kapcsán. Így pl. a *8. De Caelo 281 b 5—7* fragmentum fordítását minden kommentár nélkül közli a következő címszó illusztrálására: *Mathematical impossibility*" (*i. m.* 169); ismét a *19. Phys. 200 a 16—19* fragmentum csupán mint a „*Necessity in mathematics*" száraz illusztrációja szerepel (*i. m.* 100—101). Ez utóbbi fragmentumhoz fűzött rövid kommentárjában, a szerző egyszercsak felkiált: „It is as if had had a sort of prophetic idea of some geometry based on other than Euclidean principles, such as modern non-Euclidean geometries". Ez a hirtelen átvillanó gondolat azonban, valószínűleg teljesen hihetetlennek tűnhetett a szerzőnek — mert az előbbihez azonnal hozzáteszi: „It is not possible that Aristotle could consciously have conceived such an idea as Riemann's". — Aristoteles valóban nem lehetett tudatosan Riemann — de lehetett tudatosan Saccheri eszméinek birtokában! Amint a továbbiakból kiderül, Heath véleménye szerint ez a szöveg valami ötletszerű, esetleges jellegű dialektikus játszadozás eredményeként jelent meg a *Fizikában*; Aristoteles egy pillanatra felvetette magában a kérdést: „ha feltennénk, hogy a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel — vajon milyen következményekkel járna egy ilyen hipotézis?" — Sajnos, azonban, túl sokszor vetődik fel Aristotelesnél ez a kérdés, mintsem, hogy elfogadhassuk, hogy ezt puszta játszadozásból tette volna; meg aztán *puszta játszadozó kérdésfeltevéssel nem lehet* ebből a hipotézisből olyan következményeket levonni, mint amilyenek azok (1—2 fragmentum), hogy *a párhuzamos egyenesek metszik egymást ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R*, vagy hogy ebben az esetben *létezhet egy 8R szögösszeggel rendelkező négyszög* (5. fragmentum), vagy — végül — hogy a kontra-euklideszi hipotézis esetén *a négyzet átlója összemérhető az oldalával*! Ilyen tételek nem adódnak minden további nélkül a feltevésekből és azok levezetése a kor legmagasabb fokán álló matematikai felkészültséget igényelt. És ha Aristoteles csak dialektikus játszadozásból jutott volna ezek birtokába, akkor (saját nézetével ellentétben, amelynek értelmében a jó soha nem jön létre a vak szerencse játéka folytán; *Anal. Poster.* II. 11) — akkor őt kellene az ókor egyik legnagyobb matematikai zsenijének tekintenünk, között formális ellentmondást felfedezni, mindkét (P és T) kontra-euklideszi hipotézis esetében egyaránt. *(1 és 2 sz. töredék, Anal. Prior. 66 a 11—15)*. A tompa-szög hipotézisének más érdekes következményeinek is birtokába jutottak *(5 sz. töredék, Eth. Eudem. 1222 b 35—36)*.

(c) Sem a hegyes-szög, és ennélfogva természetesen az általános kontra-euklideszi hipotézis következményei között sem, — a várt ellentmondást felfedezni nem sikerült, habár ezen a téren igen figyelemreméltó eredményekre jutottak: (pl. már felfedezték, hogy ha az euklideszi tételt visszautasítják — akkor a négyzet átlója és oldala közötti arány racionális értékeket is felvehet: (lásd a *8 sz. töredéket, De Caelo 281 b 5—7*) és a különös geometriai jelenség valószínűleg csodálkozást és zavart keltett; (lásd a *22 sz. Eth. Eudem. 1222 b 38—39 töredéket*).

(d) A zavarra, valószínűleg az adott okot, hogy miután az euklideszi mellett a kontra-euklideszi tételek is megjelentek, ezzel együtt ugyanaz az alany — pl. „*háromszög*" két egymással ellentétes állítmányt kapott: „*szögösszeg 2R*" ill. „*szögösszeg* nem 2*R*". Az ebből folyó nehézség elhárítására felmerült a következő magyarázat: a két, egymással ellentétes állítmányban szereplő alanyt kifejező szó, „*háromszög*", a valóságban két egymástól eltérő fogalmat jelöl; *(21 sz. töredék, De Sophist.*

---

hiszen csupán játszadozva felfedezte ezeket a kontra-euklideszi tételeket és számos velük összefüggő matematikai tétel birtokába jutott! — Ez a Heath által vallott álláspont annál is különösebb, mert hiszen *ő volt az első, aki már figyelmeztetett arra, hogy Proklosnál szerepel a hegyesszög hipotézise* (lásd 41. sz. jegyzet). Ámde Proklosnál ez a hipotézis valóban csak egy pillanatnyi ötletként merül fel, ami a szöveg egészéből egész világosan kitűnik. Hogy lehet az, hogy az ennél sokkal konkrétabb, mélyebb és komolyabb aristotelesi kitételek ennyire elkerülték Heath figyelmét? — J. Lukasiewicz — a nem-aristotelesi logikáknak éppen a nem-euklideszi geometriák mintájára történő megalapítója — *Aristotle's syllogistic* (Oxford, ed. II, 1958) c. munkájában semmi említést nem tesz a kérdéses kontra-euklideszi fragmentumokról. — Úgyszintén semmi említés nem történik ezekről, I. M. Bochenski, *Ancient formal logic* (Amsterdam 1951), valamint W. Wieland, *Die aristotelische Physik*; *Untersuchungen über die Grundlegung der Naturwissenschaft und die sprachlichen Bedingungen der Prinzipforschung bei Aristoteles*; (Göttingen 1962) c. művében; ez utóbbi munka éppen a Principium (*ἀρχή*) aristotelesi fogalmának a tisztázása céljából íródott; ennek ellenére a *Fizikában* szereplő és éppen a principiumokra vonatkozó két fragmentum *(10. Phys. 200 a 29—30 és 19 Phys. 200 a 16—19)* szinte alig van megemlítve. — A. J. Tricot által fordított és kitűnő részletes kommentárokkal ellátott francia kiadás sem hívja fel semmiben a figyelmet a kérdéses fragmentumok heterodox jellegére. — Végül meg kell még említenem az *Eudemoszi Etika* F. Dirlmeier által fordított és részletesen kommentált, minden igényt kielégítő, kiváló német kiadását. A *15. Eth. Eudem. 1222 b 23—26* fragmentumhoz fűzött kommentárjában Dirlmeier megjegyzi, hogy a benne szereplő kontra-euklideszi hipotézis csupán „eine gewaltsame Fiktion", amelyet Arisztoteles *ad hoc* vezetett be az etikai cselekvés principiumait illető tézisének illusztrálására (*Aristoteles' Eudemische Ethik*, Berlin 1962, 267, 269). A kérdéses szöveg értékelésében és értelmezésében Dirlmeier teljesen egyetért R. Walzer, *Magna Moralia und aristotelische Ethik* (Berlin 1929) c. értekezésének egyik — *ad locum* fűzött megjegyzésével (*i. m.* 33), amely szerint „Dem Gedanken einer nicht euklidischen Geometrie ernstlich nachzugehen, liegt diesen Sätzen natürlich fern." („Hiermit nicht ernstlich an eine nicht-euklidische Geometrie gedecht sei" — jegyzi meg F. Dirlmeier). Így szó szerint ez a megjegyzés minden további nélkül el is fogadható. Fennáll azonban még a *kontra-euklideszi* geometria lehetősége is! Mindazonáltal Dirlmeier már felhívja a figyelmet, hogy legalábbis különös az a tény, hogy Aristoteles az etikai principiumok megváltozásának lehetőségével kapcsolatban épp a matematikára hivatkozik: „Immerhin ist es bedeutsam, dass Aristoteles für aussprechbar hält, dass auch im Bereich des schlechthin Unbewegten Änderung statfinden könnte" (i. m. 269). — Heath, Walzer es Dirlmeier már a kezükben tartottak a *Corpus* kontra-euklideszi geometriáját, de nem akartak hinni az evidenciának és ezért visszadobták azt a szarkofágba, mint értéktelen, figyelemre nem méltó lomot. Mi lehet ennek az oka? Talán éppen az, hogy mind az idézett szerzők csak az euklideszi és a nem-euklideszi alternatívát vették alapul, és *figyelmen kívül hagyták a kontra-euklideszi rendszer lehetőségét*?

171 a 12—16); nevezetesen: a kontra-euklideszi tételben szereplő „háromszög" kifejezés nem a közönséges egyenes oldalú, hanem egy görbe oldalú alakzatot jelent. *(19 sz. Phys. 200 a 16—19* és *20 sz. De Anima 402 b 18—21 töredék).*

Egy ennél valamivel mélyebb és finomabb — de az előbbivel teljesen kompatibilis — magyarázata az újonnan előállott helyzetnek lehetett az is, amely szerint a két geometriai rendszer viszonya elsősorban mint a *jó* (az euklideszi geometria) és a *rossz* (a kontra-euklideszi rendszer) szembenállása tekintendő; *(14 sz. töredék, Anal. Poster. 77 b 24—26)*; az alapjuknál álló princípiumok egyaránt bizonyíthatatlanok, ami azonban nem jelenti azt, hogy a logikai értéknek híján volnának; csakhogy nem a bizonyítás, hanem egyedül az intellektuális intuició, a *νοῦς* képes eldönteni, hogy a két princípium közül melyikhez kell az *igaz* és melyikhez a *hamis* értéket hozzá rendelni; *(6 sz. töredék, Anal. Poster. 93 a 33—35).*

(e) — Történelmi szempontból, az ebből a helyzetből adódó legfontosabb következmény annak a felismerése, hogy a háromszög szögeinek összegére vonatkozó állítás *bizonyíthatatlan* és ennél fogva ez, (vagy egy ezzel ekvivalens tétel), *úgy tekintendő, mint egy geometriai princípium;* ennek a felismerésnek a kialakulásában — a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek kudarca mellett — *szerepe lehetett a bizonyításra vonatkozó aristotelesi felfogásnak is:* ennek értelmében ugyanis a háromszög szögeinek összegére vonatkozó bizonyítás nem bizonyítás, mert a két derékszöggel egyenlő szögösszeg minden közvetítő elem nélkül, közvetlenül tartozik hozzá a háromszög fogalmához, mint annak lényeges attribútuma; az ennek bizonyítására bemutatott klasszikus érvelés nem egyéb közönséges *cirkuláris* gondolatmenetnél, közönséges tautológiánál, amelyben egy állítást a vele ekvivalens állítással helyettesítenek; ahhoz, hogy ez az *önmagában zárt kör* valódi bizonyítássá váljék, föltétlenül szükséges, hogy a kört megszakítsuk és egyik láncszemét megtegyük abszolút kezdetnek, a geometriai levezetések princípiumának, amelynek bizonyításáról tudatosan lemondunk és így *mint egy új geometriai princípiumot tekintsük.*[107]

(f) — Ezt a gondolatot váltotta valóra EUKLIDES, amikor az általa írt *Elemek* alapjaihoz felvett egy új geometriai princípiumot,[108] amelyikből az *Elem. I. 29 ill. Elem. I. 32.2* valóban szigorúan következik. Megfogalmazásában ez a posztulátum azonos azzal a konklúzióval, amelynek a *hegyes-szög* hipotézise abszurd voltát kellett volna kimondania.

*

[107] Mi volt Aristoteles személyes szerepe ennek az új történelmi helyzetnek a létrehozásában? Lehetetlen erre a kérdésre kielégítő választ adni. Tény azonban, hogy a mélyreható matematikai eseményeket figyelemmel követte, azokban szellemileg participiált és jelentőségüket felfogta. Nem zárhatjuk ki azonban, hogy előadásaival és munkáival legalább ösztönző és közvetítő szerepet is játszott volna. Mindenesetre, a matematikai szempontból Aristotelesről kialakult pejoratív véleményt — úgy látszik kénytelenek leszünk némileg módosítani.

[108] Ezzel, lényegében le is zárul a görög geometria axiomatizálásának másfél évszázada tartó folyamata. A geometriának, egy alárendelt, gyakorlati jellegű eljárások gyűjteményéből — deduktív rendszerré történő átváltozása — egyike az emberi szellem leglényegesebb és legdöntőbb jelentőségű eseményeinek. Erre az egyedülálló szellemi metamorfózisra vetnek új fényt Szabó Árpád dolgozatai: *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden*? (Acta Antiqua IV 1956, 109—152); *Anfänge des euklidischen Axiomensystems* (Archive for History of Exact Sciences I 1960, 37—106); *A matematika alapjainak euklideszi terminusai*, I—II (A MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei X 1960, 441—468; XI 1961, 1—46).

Az eszmék fejlődése szempontjából fölötte figyelemre méltó, hogy *a szorosabb értelemben vett euklideszi geometria megjelenését ugyanaz a felismerés előzte meg, mint a nem-euklideszi geometria felállítását;* nevezetesen, *hogy a párhuzamosak posztulátuma valóban bizonyíthatatlan princípium és nem egy abszolút geometriai tétel.* Ez a felismerés *szükséges feltétele* mind az euklideszi mind a nem-euklideszi geometriának. EUKLIDES tételének jogos voltát — paradox módon — csupán a nem-euklideszi geometria megjelenése igazolta és igazolhatta! Történelmileg azonban — az elterjedt felfogással szemben — önmagában ez a felismerés még *nem elegendő* a nem-euklideszi geometria megalapításához (hiszen ebből — a görögöknél éppen az euklideszi geometria jött létre!). *Ehhez még szükség van annak az elfogadására is, hogy a két egymásnak formálisan ellentmondó geometriai princípium egyforma joggal tehető meg egy-egy geometriai rendszer axiómájának, hogy továbbá e két rendszer közül egyik sem rossz és hogy önmagában mindkettő alapjainál álló axiómát egyforma joggal felruházhatjuk* — és egyidejűleg! — *az igaz logikai értékével;* e két egymásnak ellentmondó állítás számára csak egyazon geometriai rendszeren belül tilos egyidejűleg az igaz logikai értéket felvennie.

És éppen ennek az utóbbi szempontnak a tudatos el- és befogadása képezi a szellem fejlődésében azt a döntő jelentőségű *ugrópontot,* amely az euklideszi geometria korszakát — tehát ARISTOTELES és geométer kortársainak meglepően mély és messzemenő kontra-euklideszi konstrukcióit is — a szorosabb értelemben vett nem-euklideszi geometria korszakától élesen elválasztja. Itt van, lényegében, *a matematikára vonatkozó filozófiai felfogásban* is az a döntő jelentőségű diszkontinuitási pont, amely a klasszikus antik korszakot a modern kortól — immár a mi korunktól — elhatárolja.

(Beérkezett: 1966. IV. 15.)

VESTIGIES OF A CONTRA EUCLIDIAN SACCHERI GEOMETRY IN ARISTOTLE' S WORKS

(Historical antecedents of the EUCLIDIAN Postulate of Parallels)

by

I. TÓTH*

Summary

To illustrate some topics in logic, philosophy and ethics, ARISTOTLE often invoked heterodox geometrical examples, which are also to be found in the Non-Euclidean Geometries of our days. They belong in fact to Contra-Euclidian Systems analogous to those constructed by SACCHERIUS in the 18th century. The purpose of the Greek geometers was beyond doubt the same as SACCHERI' S: through the reduction to absurd of these Contra-Euclidian Systems (by means of the Absolute Geometry of BOLYAI) to demonstrate that the Absolute Geometry is complete, permitting the rigorous demonstration of all the Euclidian, and refutation of all the Contra Euclidian propositions. The hypothesis (named by SACCHERI) of the Obtuse Angle, is explicitely mentioned several times in the Corpus (in *Anal. Prior. 66 a 11—15* in two different formulations). We also find the fundamental theorem which demonstrates that in the case of the Obtuse Angle Hypothesis, two lines supposed to be parallel intersect each other *(66 a 11—15)*, a theorem which reduces to absurd the Obtuse Angle Hypothesis and which is to be found in an almost indentical form of SACCHERIUS. — Al-

* *Universitatea Bucuresti* Catedra de Fundamentele Matematicii.

so mentioned in the Corpus is the figure of a quadrilateral having the sum of its angles equal to 8R *(Eth. Eud. 1222 b 35—36)*; as known, this is the maximal quadrangle of the RIEMANN plane Geometry, a figure degenerated into a straight line closed upon itself. — The Acute Angle Hypothesis is mentioned just once in the Corpus (Anal. Poster. 90 a 33—34). But it is included in the demonstration of the fundamental theorem Elem. I 29, in fact in a perfect symmetric formulation with that given to the Obtuse Angle Hypothesis in the Corpus (66 a 11—13). — Most of the texts contain the undifferentiated general Contra-Euclidian Hypothesis and some of its immediate consequences *(e. g. 77 b 22—26; 90 a 33—34; 200 a 16—18, 29—30; 1052 a 6—7 etc.)*, of which the most remarquable is the following: if it is impossible to the triangle to have the sum of its angles equal to 2R, then the ratio between the diagonal and the side of the square can also take rational values *(De Caelo 281 b 4—7)* — These Contra-Euclidian Hypotheses or theorems are nowhere qualified by ARISTOTLE as false or impossible. — But a remarkable text proves ARISTOTLE' s conviction that one, and only one of the two Hypotheses a priori equally possible, the Euclidian vs. the Contra-Euclidian, can be right *(Anal. Poster. 93 a 33—35; Eth. Nicom. 1140 b 14—15)*, remaining to decided which of them; a decision that can be effectued only by the *νοῦς*. But the Contra-Euclidian as well as the Non-Euclidian Geometry, are systems of anti-Euclidian propositions; the same system is called Non-Euclidian Geometry if, and only if, it is embedded in a meta-mathematical conception with regard to both the Euclidian as well as the Non-Euclidian systems, as based upon postulates possessing the logical value of Right in itselves. On the contrary, the terminus Contra-Euclidian System is applied by us in the case of a mathematical philosophy which does not admit that the logical value of Rigth may belong simultaneously to the postulats of both opposite systems. The fragment *93 a 33—35* clearly proves that ARISTOTLE regarded this anti-Euclidian system of proposition as a Contra-Euclidian one. — Frequent invocations of Contra-Euclidian examples are made in the ethical books as a parallel to the liberty of choice between Good and Evil in human actions *(Magna Moral. 1187 b 1—4; Eth. Eudem. b 25—26, 41—42)*: these texts suggest that there also exists such a liberty to chose between the two opposite geometrical systems, but the Contra-Euclidian System — although a priori possible, is nevertheless a bad, a degenerated geometry *(Anal. Poster. 77 b 22—26)*. — The failure of attempts to distroy the Contra-Euclidian Hypothesis — expecially that of the Acute Angle — has determined EUCLID to the introduction of the new Postulate of Parallels at the basis of Geometry.