VÉLETLEN ELEMSZÁMÚ RENDEZETT MINTA MAXIMÁLIS TAGJÁNAK HATÁRELOSZLÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

Tekintsünk független, azonos eloszlású valószínűségi változókból álló $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozatot és vezessük be a következő jelöléseket:

$$W_n = \operatorname{Max}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \quad W_{k,n} = \operatorname{Max}(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n), \qquad (k<n).$$

B. V. GNYEGYENKOtól származik [1] a W_n sorozat $(n=1, 2, \ldots)$ határeloszlására vonatkozó következő állítás:

Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ számsorozatok olyanok, hogy $a_n>0$ és az

$$\eta_n = \frac{W_n - b_n}{a_n}$$

talószínűségi változókból álló sorozatnak van határeloszlása, akkor ez csak a következő három eloszlásfüggvény által meghatározott eloszlástípus valamelyikébe tartozhat:[1]

1° $$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

2° $$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & \text{ha } x \leqq 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

3° $$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}),$$

ahol $\alpha>0$ szám.

GNYEGYENKO [1] dolgozatában megadja annak szükséges és elegendő feltételét' hogy a ξ_n valószínűségi változók $F(x)$ eleoszlásfüggvénye mikor tartozik az 1°, 2° és 3° függvényekkel jellemzett eloszlástípusok vonzási tartományába.

RÉNYI [2], BARNDORFF—NIELSEN [3] és RICHTER [4] dolgozatának eredményei rávilágítanak arra, hogy GNYEGYENKO tételét erősebben is meg lehet fogalmazni. Nevezetesen, ha az η_n sorozatnak van határeloszlása, akkor erősen keverő is, azaz η_n határeloszlása tetszőleges P^* valószínűségi mértékre nézve ugyanaz, mint a P valószínűségi mérték esetén, hacsak P^* a P mértékre nézve abszolút folytonos. Az erős keverés fogalma RÉNYI ALFRÉDtól származik. BARNDORFF—NIELSEN [3] az η_n sorozat erősen keverő voltát nem mondja ki explicite, dolgozatának céljai érdekében egy eltérő jellegű lemmát használ, amelyből e tulajdonság levezethető lenne. W. RICHTER ezt a tulajdonságot bebizonyítja. Bizonyításának alapgondolata az, hogy a W_n sorozat ergodikus *Markov*-lánc. Dolgozatunk itt kapcsolódik a fenti

[1] Az $F(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvények egyazon típusba tartoznak, ha bizonyos $a>0$ és b állandók mellett minden x esetén fennáll az $F(x) = G(ax+b)$ reláció.

dolgozatokhoz. Az η_n sorozat erősen keverő voltát direkt úton, igen egyszerűen szeretnénk bizonyítani. Dolgozatunk másik célja, hogy élesítse a [3] dolgozat következő eredményét:

Legyen ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy ν_n/n sztochasztikusan a ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál. $(P(\nu > 0) = 1)$. Jelöljön továbbá $G(x)$ az 1°, 2° és 3° függvények típusába tartozó eloszlásfüggvényt. Ekkor a következő három állítás ekvivalens:

a) $$\lim_{n \to +\infty} P(\eta_n < x) = G(x),$$

b) $$\lim_{n \to +\infty} P(\eta_{\nu_n} < x) = G(x),$$

c) $$\lim_{n \to +\infty} P(W_{\nu_n} < a_n x + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x)]^y \, dP(\nu < y)$$

és ezek a limeszrelációk a $G(x)$ minden x folytonossági pontjában fennállnak.

Ez az eredmény megfogalmazható egyetlen állítás formájában, sőt ennél általánosabb tény is kimondható, ha használjuk a stabilitás fogalmát, amely ugyancsak RÉNYI ALFRÉD nevéhez fűződik. Nevezetesen, megmutatható, hogy ha az η_n sorozatnak van határeloszlása, akkor a

$$(W_{\nu_n} - b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$$

sorozat stabilis. E sorozatban jelentsen μ_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozatot, amelyre teljesül, hogy μ_n/n sztochasztikusan a pozitív μ valószínűségi változóhoz konvergál. E dolgozatban ezt az eredményt szeretnénk bebizonyítani. Rámutatunk arra is, hogy ez a megfogalmazás általánosabb, mint a [3] dolgozaté.

Emlékeztetünk néhány definícióra és néhány belőlük következő ismert eredményre.

Legyen $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ *Kolmogorov*-féle valószínűségi mező. Az $\mathcal{A}$ elemeit eseményeknek nevezzük, az Ω alaptéren értelmezett és az $\mathcal{A}$-ra nézve mérhető függvényeket pedig valószínűségi változóknak.

1. Definíció. (RÉNYI) *A ζ_n valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy erősen keverő $G(x)$ határeloszlással, ha bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett fennáll, hogy*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\zeta_n < x | B) = G(x).$$

2. Definíció. (RÉNYI) *A $\{\zeta_n\}$ valószínűségi változó sorozatról azt mondjuk, hogy stabilis, ha bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett fennáll a*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\zeta_n < x | B) = F_B(x)$$

limeszreláció, ahol $F_B(x)$ csak B-től függő eloszlásfüggvény.

Nyilvánvaló, hogy minden erősen keverő valószínűségi változó sorozat stabilis is.

Megmutatható, hogy az $F_B(x)$ eloszlásfüggvény szakadási pontjainak halmaza, bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett, részhalmaza az $F_\Omega(x)$ eloszlásfüggvény szakadási pontjai halmazának, és hogy ily módon legfeljebb megszámlálható sok x érték kivételével, minden rögzített x értékre a

$$Q(x, B) = \lim_{n\to+\infty} P(\zeta_n < x, B)$$

kifejezés, mint a B esemény függvénye, mérték, amely abszolút folytonos a P valószínűségi mértékre nézve. A $Q(x, B)$ mérték P szerinti *Radon—Nikodym*-deriváltja ily módon modulo P egyértelműen meg van határozva, ha x rögzített érték. Ezt $\alpha_x(\omega)$-val jelölve, teljesül, hogy $0 \leqq \alpha_x(\omega) \leqq 1$ és

$$Q(x, B) = \int_B \alpha_x(\omega)\, dP.$$

Az erős keverés esetét nyilván akkor kapjuk, mikor $\alpha_x(\omega)$ 1 valószínűséggel állandó. Az $\alpha_x(\omega)$ függvényt a $\{\zeta_n\}$ stabilis sorozat x helyen vett lokális sűrűségének nevezzük.

A stabilitás tulajdonságának ellenőrzésére szolgál a következő kritérium:

Ha tetszőleges rögzített k esetén

$$\lim_{n\to+\infty} P(\zeta_n < x | \zeta_k < x) = F_B(x)$$

létezik, ahol $B = \{\omega : \zeta_k < x\}$, akkor a $\{\zeta_n\}$ sorozat a 2. Definíció értelmében stabilis [2].

Ugyancsak ez a kritérium szolgál az erős keverés tulajdonságának ellenőrzésére; ekkor a jobb oldalon álló határeloszlásfüggvény a $B = \{\omega : \zeta_k < x\}$ eseménytől nem függ [2].

Megemlítjük, hogy ha P^* a P valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, akkor a P mértékre nézve stabilis valószínűségi változó sorozat a P^* mértékre nézve is stabilis és lokális sűrűsége mindkét esetben ugyanaz.

E definíciók és állítások RÉNYI [2] dolgozatában megtalálhatók. Fel fogjuk használni még a következő tételt is:

1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változókból álló sorozat erősen keverő $F(x)$ határeloszlással, és az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változókból álló sorozat sztochasztikusan az η valószínűségi változóhoz konvergál. Legyen $g(x, y)$ kétváltozós folytonos függvény. Ekkor a $g(\xi_n, \eta_n)$ valószínűségi változók sorozata stabilis és lokális sűrűsége*

$$\int_{\{g(y,\eta)<x\}} dF(y).$$

E tétel bizonyítása az [5] dolgozatban található, így itt azt mellőzzük. Tételünket abban a formában használjuk fel, hogy az η_n valószínűségi változó sorozatot l-dimenziós vektor-változónak fogjuk fel, amely komponensenként sztochasztikusan az l-dimenziós valószínűségi változóhoz konvergál. Nyilván tételünk állítása és bizonyítása szó szerint átvihető erre az esetre is.

Térjünk vissza eredeti célunkra. Nyilván $P(\eta_n < x) = F^n(a_n x + b_n)$, ahol $F(x)$ a ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók eloszlásfüggvénye. Legyen x_0 az a szám, amelyre $F(x_0) = 1$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $F(x_0 - \varepsilon) < 1$. Ha ilyen véges x_0 szám nincs, akkor minden véges x esetén $F(x) < 1$; legyen ez esetben $x_0 = +\infty$. Ha az $a_n > 0$, b_n sorozatokkal képzett $\{\eta_n\}$ sorozatnak létezik határeloszlása, akkor minden olyan x véges szám esetén, amelyre a határeloszlás nem zérus és nem 1,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n x+b_n)=x_0$. Valóban, ha $x_0<+\infty$, $\varepsilon>0$ és végtelen sok n esetén $a_n x+b_n<$ $<x_0-\varepsilon$ akkor végtelen sok n esetén $F(a_n x+b_n)\leqq F(x_0-\varepsilon)<1$ és így $\lim\limits_{n\to+\infty}P(\eta_n<x)$ nem létezik. Ha pedig végtelen sok n esetén $a_n x+b_n>x_0+\varepsilon$, akkor ezekre az indexekre $F(a_n x+b_n)=1$ és így ismét $\lim\limits_{n\to+\infty}P(\eta_n<x)$ nem létezik. Hasonlóan okoskodhatunk, mikor $x_0=+\infty$.

Bebizonyítjuk most a következő állítást:

2. TÉTEL. *Ha az $a_n>0$ és a b_n számsorozatok segítségével képzett $\{\eta_n\}$ sorozatra $G(x)$ minden folytonossági helyén fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty}P(\eta_n<x)=G(x),$$

ahol $G(x)$ eloszlásfüggvény, akkor az η_n sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással.

Bizonyítás. Nyilván elegendő csak olyan x értékekre bizonyítani az állítást, amelyekre $G(x)\neq 0$ és $G(x)\neq 1$. Ekkor bizonyos k_0 indextől kezdve $P(\eta_n<x)\neq 0$ és $P(\eta_n<x)\neq 1$, ha $n\geqq k_0$. Ekkor $k\geqq k_0$ esetén

$$P(\eta_n<x|\eta_k<x)=P\left(\frac{W_k-b_n}{a_n}<x\,\middle|\,\eta_k<x\right)P\left(\frac{W_{k,n}-b_n}{a_n}<x\right),$$

mert $W_n=\max(W_k,W_{k,n})$ és W_k továbbá $W_{k,n}$ egymástól függetlenek. A jobb oldal második tényezője az $F^{n-k}(a_n x+b_n)$ kifejezéssel egyenlő és $n\to+\infty$ esetén határértéke $G(x)$. Az első tényező határértéke 1, mert a $W_k<a_n x+b_n$ esemény valószínűsége $F^k(a_n x+b_n)$ és $a_n x+b_n\to x_0$, k pedig rögzített.

E tételből adódik a következő:

KOROLLÁRIUM. *Legyen P^* a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték. Ekkor, ha az $a_n>0$ és b_n sorozatok estén $\lim\limits_{n\to\infty}P(\eta_n<x)=G(x)$ létezik, fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty}P^*(\eta_n<x)=G(x).$$

Bebizonyítjuk most a következő lemmákat:

1. LEMMA. *Ha valamilyen $a_n>0$ és b_n sorozatra teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty}P(\eta_n<x)=$ $=G(x)$ létezik, akkor, ha $p_n>0$ és $p_n\to p>0$ és $F(x)$ az 1° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik,*

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to p^{-1/\alpha},\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to 0;$$

ha $F(x)$ a 2° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik, akkor

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to p^{1/\alpha},\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to 0;$$

és végül, ha $F(x)$ a 3° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik, akkor

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to 1,\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to \log p.$$

Bizonyítás. Felhasználjuk HINCSINnek azt az eredményét, hogy ha $H(x)$ nem elfajult eloszlásfüggvény és az $F_n(x)$ eloszlásfüggvénysorozatra, továbbá az $a_n>0$, $\alpha_n>0$, b_n és β_n számsorozatokra teljesülnek a $H(x)$ eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában az

$$F_n(a_n x + b_n) \to H(x),$$

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \to H(x)$$

határértékrelációk, akkor

$$\frac{a_n}{\alpha_n} \to 1 \quad \text{és} \quad \frac{b_n - \beta_n}{a_n} \to 0,$$

ha $n \to +\infty$ [1]. Mutassuk meg például, hogy az állítás igaz a 3° eloszlástípusra. Ez esetben $\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = \Lambda(x)$, azaz $F^n(a_n x + b_n) \to \Lambda(x)$. Ebből következik, hogy $F^{[np_n]}(a_n x + b_n) \to \Lambda^p(x) = \Lambda(x - \log p)$. Az $x - \log p = z$ helyettesítést alkalmazva kapjuk

$$F^{[np_n]}(a_n z + a_n \log p + b_n) \to \Lambda(z).$$

Másrészt

$$F^{[np_n]}(a_{[np_n]} z + b_{[np_n]}) \to \Lambda(z).$$

E két utolsó relációból HINCSIN eredménye alapján következik állításunk. Hasonlóan bizonyítható lemmánk többi állítása is.

GNYEGYENKO [1] dolgozatában megtalálhatók e lemma állításai közül egyesek, bizonyításuk azonban bonyolult. A 3° eloszlástípus esetén pedig a limeszrelációk egyike sincs bizonyítva. Az itt adott bizonyítás természetesnek és egyszerűnek tűnik.

2. LEMMA. *Legyen ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat, és tegyük fel, hogy ν_n/n sztochasztikusan a ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $n \to +\infty$. Ekkor az* 1. *Lemmában $[np_n]$ helyett ν_n-et és p helyett ν-t helyettesítve, az ottani limeszrelációk a megfelelő sztochasztikus limeszrelációkba vihetők át.*

Bizonyítás. Az 1. Lemma állítását úgy fejezhetjük ki, hogy $c_n/d_{[np_n]}$ határértéke a pozitív p szám folytonos és monoton $f(p)$ függvénye, ahol c_n, ill. $d_{[np_n]}$ bármelyik limeszreláció bal oldalán a számlálót, ill. a nevezőt jelöli.

Legyen $0 < p_1 < p_2$ és tekintsük az m_n pozitív egész számoknak azt az összességét, amelyekre fennáll a $p_1 \leqq \frac{m_n}{n} \leqq p_2$ egyenlőtlenség. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$ számhoz található olyan $n_0 = n_0(\delta)$ egész szám, hogy $n \geqq n_0(\delta)$ esetén teljesül az $f(p_1) - \delta \leqq \frac{c_n}{d_{m_n}} \leqq f(p_1) + \delta$ egyenlőtlenség. Valóban, ha nem léteznék ilyen $n_0(\delta)$ szám, akkor végtelen sok n esetén fennállna a $c_n/d_{m_n} < f(p_1) - \delta$ (vagy pedig az $f(p_2) + \delta < c_n/d_{m_n}$) egyenlőtlenség. Legyen az ezen egyenlőtlenségnek megfelelő $m_{n'}/n'$ hányadosok limesz inferiorja (vagy, a második esetben, limesz szuperiorja) p. Nyilván, $p_1 \leqq p \leqq p_2$. A p számhoz konvergálni lehet az $m_{n'}/n'$ sorozat egy konvergens $m_{n''}/n''$ részsorozatával, azaz $m_{n''} = [n'' p_{n''}]$, ahol $p_{n''} \to p$. Ily módon $c_{n''}/d_{[n'' p_{n''}]} \to f(p) < f(p_1) - \delta$. Ez azonban ellentmond annak, hogy az $f(p)$ függvény folytonos és monoton.

Válasszuk meg a p_1 és p_2 számokat úgy, hogy $P(p_1 \leqq \nu < p_2) > 1 - \varepsilon$ teljesüljön és vegyük a $[p_1, p_2]$ intervallumnak olyan $p_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = p_2$ felosztását, hogy $|f(x) - f(x_{i-1})| < \frac{\delta}{2}$ teljesüljön, ha $x_{i-1} \leqq x < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Az ilyen felosztás miatt nyilván

$$P\left(\left|\frac{c_n}{d_{\nu_n}} - f(\nu)\right| > \delta\right) \leqq \sum_{i=1}^{k} P\left(\left|\frac{c_n}{d_{\nu_n}} - f(\nu)\right| > \delta,\, x_{i-1} \leqq \nu < x_i,\, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} P\left(x_{i-1} \leqq \nu < x_i, \overline{x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i}\right) + \varepsilon.$$

Nyilvánvaló, hogy a jobb oldal második tagja tetszőlegesen kicsivé tehető, ha n elég nagy. Az első tagot pedig a következő módon becsüljük meg: minthogy $x_{i-1} \leqq \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i$, azért a ν_n sorozatra teljesül az m_n sorozatra kirótt egyenlőtlenség. Ennélfogva bizonyos $n_0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ indextől kezdve $f(x_{i-1}) - \frac{\delta}{2} \leqq \frac{c_n}{d\nu_n} \leqq f(x_i) + \frac{\delta}{2}$. Így az első egyenlőtlenség az $x_{i-1} \leqq \nu < x_i$ reláció és az $f(p)$ monotonitása miatt $n \geqq n_0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ esetén 0. Ily módon lemmánkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy ha az 1. Lemmában n helyett ν_n-et, $[np_n]$ helyett μ_n-et, és p helyett $\frac{\mu}{\nu}$-t írunk, ahol μ_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és μ_n/n sztochasztikusan a μ pozitív valószínűségi változóhoz konvergál, a 2. Lemma állítása továbbra is igaz marad. Ezt a tényt is fel fogjuk használni a következőkben.

O. Barndorff—Nielsen [3] jelen dolgozatban említett tételének bizonyítását végig elemezve, nemcsak az mutatható meg, hogy az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozatnak ugyanaz a határeloszlása, mint az $\{\eta_n\}$ sorozatnak, hanem az is, hogy az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő. Dolgozatunkban ezt az erősebb állítást szeretnénk kimondani és — meglátásunk szerint — egyszerű módon bebizonyítani.

3. Tétel. *Ha valamilyen $a_n > 0$ és b_n számsorozatok mellett az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változó sorozatnak létezik határeloszlása, akkor az $\{\eta_{\nu_n}\}$ valószínűségi változó sorozat erősen keverő ugyanazzal a határeloszlással.*

Bizonyítás. Határozzuk meg a $0 < p_1 < p_2$ számokat úgy, hogy $P(p_1 \leqq \nu < p_2) > > 1 - \varepsilon$ legyen, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Nyilvánvaló, hogy létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index, hogy $n \geqq n_0$ esetén a $P(p_1 \leqq \frac{\nu_n}{n} < p_2) > 1 - 2\varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül. Osszuk fel a $[p_1, p_2]$ intervallumot a $p_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = p_2$ osztópontokkal úgy, hogy azok a ν valószínűségi változó eloszlásfüggvényének folytonossági pontjai legyenek, a közelebbi meghatározásukról később intézkedünk. Legyen A tetszőleges esemény. Felhasználva, hogy $n<m$ esetén $W_n \leqq W_m$, felírható a

$$-2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}} \cdot \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} < x,\, A,\, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}} < x,\, A\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}} \cdot \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < x,\, A,\, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right) + 2\varepsilon$$

egyenlőtlenség. Az n indexet elég nagyra választva elérhető, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_n^{(i)} \circ A^{(i)}) < \varepsilon$$

legyen, ahol $A_n^{(i)}$ az $\left\{x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right\}$ és $A^{(i)}$ az $\{x_{i-1} \leqq \nu < x_i\}$ eseményeket, a $\circ$ jel pedig a szimmetrikus differencia műveletét jelöli. Ennélfogva elég nagy n esetén

$$-3\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}} \cdot \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_i]}}{a_{\nu n}} < x,\, A,\, x_{i-1} \leqq \nu < x_i\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}} < x,\, A\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}} \cdot \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < x,\, A,\, x_{i-1} \leqq \nu < x_i\right) + 3\varepsilon.$$

Válasszuk meg az x_i osztópontokat úgy, hogy $1-\delta \leqq f\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \leqq f\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) \leqq 1+\delta$ és $-\delta \leqq g\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \leqq g\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) \leqq \delta$ legyen, ahol $\delta > 0$ előre megadott tetszőleges szám, $f(p)$ és $g(p)$ pedig az 1. Lemmában bármelyik eloszlástípus esetén az első, ill. második határértékreláció jobb oldalát jelenti. Minthogy ν_n/n sztochasztikusan a ν valószínűségi változóhoz konvergál, a 2. Lemma értelmében és az x_i osztópontok megválasztása miatt fennáll

$$1-2\delta \leqq \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} \leqq 1+2\delta; \quad 1-2\delta \leqq \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < 1+2\delta;$$

$$-2\delta \leqq \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} < 2\delta; \quad -2\delta \leqq \frac{b_{\nu_n}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} \leqq 2\delta.$$

Ezért elég nagy n esetén

$$-3\varepsilon+\sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}}<\frac{x-2\delta}{1+2\delta},\, A,\, x_{i-1}\leqq \nu < x_i\right)\leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{h} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}}<\frac{x+2\delta}{1-2\delta},\, A,\, x_{i-1}\leqq \nu < x_i\right)+3\varepsilon.$$

Mármost a 2. Tétel értelmében a $\{(W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]})/a_{[nx_i]}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ sorozat erősen keverő valamilyen, a dolgozat elején említett három eloszlástípusba tartozó $G(x)$ határeloszlással. Ily módon

$$-3\varepsilon+G\left(\frac{x-2\delta}{1+2\delta}\right)P(A, p_1\leqq \nu < p_2)\leqq \liminf_{n\to+\infty} P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq$$

$$\leqq \limsup_{n\to+\infty} P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq G\left(\frac{x+2\delta}{1-2\delta}\right)P(A, p_1\leqq \nu < p_2)+3\varepsilon,$$

ami ε és δ tetszőleges volta miatt bizonyítandó állításunkat jelenti.

Belátjuk most a következő tételt:

4. TÉTEL. *Ha a μ_n és a ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozatokra teljesül, hogy μ_n/n, ill. ν_n/n sztochasztikusan a μ, ill. ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál és az $a_n>0$ és b_n számsorozatok segítségével képzett η_n valószínűségi változókból álló sorozatnak van határeloszlása, és ez $G(x)$, akkor a $(W_{\nu_n}-b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ sorozat stabilis és lokális sűrűsége $(G(x))^{\nu/\mu}$.*

Bizonyítás. Fennáll a

$$\frac{W_{\nu_n}-b_{\mu_n}}{a_{\mu_n}}=\eta_{\nu_n}\frac{a_{\nu_n}}{a_{\mu_n}}-\frac{b_{\mu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\mu_n}}$$

reláció. Az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással a 3. Tétel alapján. A 2. Lemma alapján az a_{ν_n}/a_{μ_n}, továbbá a $(b_{\mu_n}-b_{\nu_n})/a_{\mu_n}$ sorozatok sztochasztikusan a $G(x)$ típusának megfelelő valószínűségi változókhoz konvergálnak. Ily módon az 1. Tétel alapján mondható, hogy a $(W_{\nu_n}-b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ sorozat stabilis. Esetünkben az 1. tételben szereplő g függvény az x, y, z változók háromváltozós függvénye, nevezetesen

$$g(x, y, z)=x\cdot y-z.$$

Rövid számolás után nyerjük, hogy a lokális sűrűségek az egyes eloszlástípusok szerint rendre a következők

$$\Phi_\alpha\left(x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{-1/\alpha}\right),\quad \psi_\alpha\left(x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/\alpha}\right),\quad \Lambda\left(x-\log\frac{\nu}{\mu}\right),$$

illetőleg az ezek típusába tartozó kifejezések. Ez pedig megegyezik tételünk állításával.

2. KOROLLÁRIUM. *A [3] dolgozat tétele a 4. Tételből következik.*

Legyen $\mu_n \equiv n$. Ha valamilyen $a_n > 0$ és b_n számsorozat esetén $\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = G(x)$ létezik, akkor a 3. Tétel alapján az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással. Ezért a 4. Tétel alapján és mivel $\mu \equiv 1$, a $\{(W_{\nu_n} - b_n)/a_n\}$ sorozat stabilis és lokális sűrűsége $[G(x)]^\nu$. Ezért

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_{\nu_n} < a_n x + b_n) = \int_\Omega (G(x))^\nu \, dP = \int_0^{+\infty} (G(x))^s \, dP(\nu < s).$$

Ez utóbbiból viszont következik, hogy $\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = G(x)$. Ennek bizonyítása standard módszerekkel, ellentmondásra való visszavezetés útján történhetik.

IRODALOM

[1] B. V. GNYEGYENKO, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics*, **44** (1943), 423—453.

[2] A. RÉNYI, On stable sequences of events, *Sankhya*, **25** (1963), Series A.

[3] O. BARNDORFF—NIELSEN, On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964) 399—403.

[4] W. RICHTER, Das Null-Eins-Gesetz und ein Grenzwertsatz für zufällige Processe mit diskreter zufälliger Zeit, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden* **14** (1965) 497—504.

5] J. MOGYORÓDI, A theorem on stable sequences of random variables and a limit distribution theorem for the sums of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966) 401—409.

(Beérkezett: 1966. VIII. 3.)

ON THE LIMITING DISTRIBUTION OF THE MAXIMAL TERM OF A RANDOM SAMPLE OF RANDOM SIZE

By

J. MOGYORÓDI

Summary

We say, following A. RÉNYI, that a sequence $\{\zeta_n\}$ of random variables is stable, if, for any event B of positive probability, the conditional distribution function of ζ_n under the condition B converges as $n \to +\infty$ to a limiting distribution function $F_B(x)$. The sequence ζ_n is called strongly mixing, if $F_B(x)$ does not depend on B.

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables and let us consider $W_n = \mathrm{Max}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In this paper we give simple proofs of the following assertions:

1. If, for some constants $a_n > 0$ and b_n, the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution, then $(W_n - b_n)/a_n$ is strongly mixing.

2. Let $\{\nu_n\}$ be a sequence of positive integer-valued random variables. We suppose that ν_n/n converges inprobability as $n \to +\infty$ to a positive random variable ν. If the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution, then $(W\nu_n - b\nu_n)/a\nu_n$ is also strongly mixing with the same limiting distribution as that of $(W_n - b_n)/a_n$.

The first assertion is proved also in [4] with other methods. A part of the second assertion is proved in [3] and [4].

3. Let ν_n and μ_n be positive integer-valued random variables and let us suppose that ν_n/n and μ_n/n converge in probability measure to the positive random variables ν and μ, respectively. If the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution $G(x)$ as $n \to +\infty$, then the sequence $(W_{\nu_n} - b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ is stable and its local density is $(G(x))^{\nu/\mu}$.

This result is a generalization of that of the paper [3].