

EGY IRREGULARITÁSI JELENSÉG A SZÁMELMÉLETBEN

Írta: KÁTAI IMRE

Legyen $z_j, z_j = e^{2\pi i \varphi_j}$ ($j = 1, 2, \dots$) egységnyi abszolút értékű komplex számok végtelen sorozata,

$$(1) \quad A_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} |z_1^k + \dots + z_n^k|.$$

ERDŐS P. kérdezte [1], hogy igaz-e a

$$(2) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \infty$$

reláció?

Kimutatjuk a következő tételt.

TÉTEL: Legyen $A_k < \infty$, midőn $k > t$. Ekkor

$$(3) \quad A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2},$$

és $c_1 > 0$ abszolút állandó.

A bizonyítás K. F. ROTH [2] diszkrepanciára vonatkozó eredményén alapszik.

1. LEMMA: Legyen $P_j = (X_j, Y_j)$, $j = 1, \dots, N$ az egységnégyzeten fekvő N pont.

Bevezetve a

$$(4) \quad S(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{X_j < \alpha \\ Y_j < \beta}} 1$$

jelölést, fennáll az

$$(5) \quad \int_0^1 \int_0^1 (S(x, y) - Nxy - \varphi(y))^2 dx dy > c_2 \log N$$

egyenlőtlenség, ahol $\varphi(y) \in L^2(0, 1)$ tetszőleges valósértékű függvény, $c_2 > 0$ abszolút állandó.

ROTH $\varphi(y) \equiv 0$ választással mutatja ki az (5) egyenlőtlenséget, de a bizonyítás minden változtatás nélkül kiadja általánosan is (5)-öt.

Legyenek most $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ tetszőleges, a $[0, 1]$ intervallumba eső számok.

Alkalmazzuk lemmánkat arra az esetre, midőn $X_j = \left(\tau_j, \frac{j}{N} \right)$, $j = 1, 2, \dots, N$;

$$\varphi(y) = \int_0^1 (S(u, y) - Nuy) du.$$

Világos, hogy $\frac{j}{N} < y \leq \frac{j+1}{N}$ esetén $S(u, y) = S\left(u, \frac{j+1}{N}\right)$, $\varphi(y) = \varphi\left(\frac{j+1}{N}\right) + O(1)$, így $N > c_3$ -ra az alábbi egyenlőtlenség áll fenn:

$$\frac{c_2}{2} \log N < \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \left(S\left(x, \frac{j+1}{N}\right) - jx - \int_0^1 \left(S\left(u, \frac{j+1}{N}\right) - ju \right) du \right)^2 dx.$$

Innen a következő lemmát kapjuk.

2. LEMMA. Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ tetszőleges, a $(0, 1)$ intervallumba eső számok, s legyen $N > c_3$. Bevezetve a

$$(6) \quad S_l(x) = \sum_{\substack{\tau_j \leq x \\ j \leq l}} 1$$

jelölést, található olyan l , amelyre

$$(7) \quad \int_0^1 \left(S_l(x) - lx - \int_0^1 (S_l(u) - lu) du \right)^2 dx > \frac{c_2}{2} \log N, \quad (1 \leq l \leq N).$$

Legyen $s_l(k) = \sum_{j=1}^l e^{2\pi i \tau_j k}$, továbbá

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \alpha \\ 0, & \text{ha } \alpha < x < 1 \end{cases} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

$f_\alpha(x)$ Fourier-sora

$$f_\alpha(x) = \alpha + \sum_{n \neq 0} \frac{1 - e^{-2\pi i n \alpha}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n \alpha}{\pi n} - \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-2\pi i n \alpha}}{2\pi i n} \cdot e^{2\pi i n x}$$

alakú. Ismeretes, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \frac{1-2x}{2}$, ha $0 < x < 1$, így

$$S_l(x) - \alpha l - \sum_{j=1}^l \frac{1-2\tau_j}{2} = - \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-2\pi i n \alpha} \cdot s_l(n)}{2\pi i n},$$

s a Parseval-formulát alkalmazva

$$\int_0^1 \left(S_l(x) - \alpha l - \sum_{j=1}^l \frac{1-2\tau_j}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_l(n)|^2}{n^2}.$$

Egyszerű számolással látható, hogy

$$\sum_{j=1}^l \frac{1-2\tau_j}{2} = \int_0^1 (S_l(u) - lu) du.$$

Így érvényes a következő

3. LEMMA:

$$(8) \quad \int_0^1 \left(S_l(x) - \alpha l - \int_0^1 (S_l(u) - lu) du \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_l(n)|^2}{n^2}.$$

A 2. és 3. Lemma segítségével most már könnyen kapjuk tételünket.

Bizonyítás. Ha $A_k = \infty$ végtelen sok k -ra, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy A_k véges, ha $k \geq t$. Legyen továbbá $L (\geq t)$ tetszőleges nagy egész szám. Kimutatjuk, hogy létezik egy $k > L$, amelyre $A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2}$. Véges A_k -ra a $\sigma(k, m, r) = z_m^k + \dots + z_{m+r}^k$ jelöléssel

$$(9) \quad |\sigma(k, m, r)| < 2A_k + 1,$$

ha $m \geq m(k)$, $r \geq 1$. Legyen $m_0 = m_0(k)$ olyan állandó, hogy $m > m_0(L)$ esetén már minden m -re és minden $t \leq tk < Lt$ -re fennálljon (9).

Alkalmazzuk a 2. Lemmát a

$$(\tau_1, \dots, \tau_N) = (t\varphi_m, \dots, t\varphi_{m+N-1})$$

választással. A 3. Lemma miatt alkalmas $1 \leq l \leq N$ -re

$$\pi^2 \cdot c_2 \cdot \log N \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{k^2} = \sum_{k=1}^L + \sum_{k=L+1}^{N^2} + \sum_{k=N^2+1}^{\infty}.$$

Mivel $|\sigma(kt, m, l)|^2 \leq l^2 \leq N^2$, így a harmadik tag ≤ 1 . Másrészt

$$\sum_{k=1}^L \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{k^2} \leq \sum_{k \leq L} \frac{2A_{kt} + 1}{k^2} < \frac{c_2}{4} \log N,$$

ha N elég nagy, s innen

$$(10) \quad \max_{k=L+1, \dots, N^2} \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{kt} > \frac{c_2}{8t}.$$

Egyenlőtlenségünkéből következik, hogy valamely (tL, tN^2) intervallumbeli k -ra végtelen sok m értékre fennáll (10). Így erre a k -ra elég nagy m -mel

$$2A_k + 1 > |\sigma(k, m, l)| \geq c_4 \sqrt{\frac{k}{t}}, \quad \left(c_4 = \sqrt{\frac{c_2}{8}} \right),$$

s így a tétel valóban fennáll.

Megjegyezzük, hogy a 2. és 3. Lemmából közvetlenül levezethető a következő állítás.

Ha $w_1, w_2, \dots, w_N$ az egységkör kerületén fekvő komplex számok, akkor

$$(11) \quad \max_{\sqrt{c_2} \log N \leq l \leq N} \max_{1 \leq k \leq N^2} \frac{|w_1^k + \dots + w_l^k|}{\sqrt{k}} > c_5,$$

ahol c_5 abszolút állandó.

Érdekes lenne bebizonyítani ennek egy „Turán-típusú” általánosítását, pontosabban a (11) egyenlőtlenséget tetszőleges $|w_i| \geq 1$ ($i = 1, \dots, N$) esetén.*

* Szerző a dolgozat megírása után vette észre, hogy ERDŐS P. [3]-ban kimutatta, hogy $A_k > c \log k$ végtelen sok k -ra, továbbá ugyanott említi bizonyítás nélkül, hogy CLUNIE kimutatta az $A_k > ck^{1/2}$ egyenlőtlenséget végtelen sok k -ra.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] P. ERDŐS, Problems and results on diophantine approximations, *Compositio Math.*, **16** (1964), 52—65.
 [2] K. F. ROTH, On irregularities of distribution, *Mathematika*, **1** (1954), 73—79.
 [3] P. ERDŐS, Some remarks on number theory, *Israel Journal of Math.*, **3**, 1 (1965), 6—12.

(Beérkezett: 1966. VIII. 13.)

ON AN IRREGULARITY PHENOMENON IN THE NUMBER THEORY

by

IMRE KÁTAI

Summary

Let $z_j = e^{2\pi i \varphi_j}$ ($j=1, 2, \dots$) be an infinite sequence of numbers on the unit circle, and let

$$A_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=1}^n e^{2\pi i k \varphi_j} \right|.$$

P. ERDŐS asked in [1] the following: is it true, that $\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \infty$? Here we deduce from ROTH's theorem [2] the following: let $A_k < \infty$, if $k \geq t$, then

$$A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2}$$

holds for infinitely many k , where c_1 is a positive absolute constant.

P. ERDŐS mentioned in [3], without proof, that CLUNIE proved our inequality too.