EGY MEGJEGYZÉS K. S. GANGADHARAN „TWO CLASSICAL LATTICE POINT PROBLEMS" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

Írta: CORRÁDI KERESZTÉLY és KÁTAI IMRE

1. Legyen $r(n)$ az n természetes szám két négyzetszám összegeként való előállításainak száma, $d(n)$ az n osztóinak száma, és

$$R(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} r(n) = \pi x + P(x), \tag{1. 1}$$

$$D(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x), \tag{1. 2}$$

ahol γ az *Euler*-féle állandó. Így $P(x)$ a körre vonatkozó rácspontprobléma, $\Delta(x)$ pedig a *Dirichlet-féle* osztóprobléma hibatagja.

Ismeretes, hogy

$$P(x) = \Omega(x^{1/4} \log^{1/4} x), \tag{1. 3}$$

$$\Delta(x) = \Omega_{+}(x^{1/4} \log^{1/4} x \cdot \log \log x). \tag{1. 4}$$

(1. 4) bizonyítása HARDY [1], (1. 3) bizonyítása LANDAU [4] dolgozatában található. (1. 3) és (1. 4) bizonyítása mindkét esetben a diophantikus approximáció elméletben ismert *Dirichlet*-tételen és a *Phragmen—Lindelöf*-tétel egy változatán alapszik. A módszer, érdekes módon nem alkalmas mindkét irányú Ω-becslések levezetésére, ellentétben HARDY [1]-ben megfogalmazott hibás állításával, mely szerint módszerével

$$P(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/4} \log^{1/4} x), \quad \Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/4} \log^{1/4} x \cdot \log \log x)$$

nyerhető. Erre vonatkozóan hibás idézet szerepel még L. K. HUA [8] enciklopédiacikkében.

Ellenkező irányban a legutóbbi évekig csak az INGHAMtől származó

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{P(x)}{x^{1/4}} = +\infty, \qquad \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\Delta(x)}{x^{1/4}} = -\infty$$

becslések voltak ismeretesek [3]. 1961-ben K. S. GANGADHARAN [7] dolgozatában kimutatta, hogy

$$P(x) = \Omega_{+}(x^{1/4}(\log \log x)^{1/4}(\log \log \log x)^{1/4}), \quad x \to \infty, \tag{1. 5}$$

$$\Delta(x) = \Omega_{-}(x^{1/4}(\log \log x)^{1/4}(\log \log \log x)^{5/4}), \quad x \to \infty. \tag{1. 6}$$

Bizonyításában a *Fejér*-mag lényeges szerepet játszik. A *Fejér*-mag ilyen irányú felhasználása már előbb, H. BOHRnál és B. JESSENnél is szerepel a *Kronecker*-tételre adott bizonyításukban [9].

Jelen dolgozat célja az (1. 5) és (1. 6) Ω-becslések javítása. Bizonyításunkban GANGADHARAN ideáit használjuk. A javítást a később definiálandó $q_1, q_2, \ldots, q_N$ halmaz jó megválasztása teszi lehetővé.

A továbbiakban $c, c_1, c_2, \ldots, d, d_1, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ numerikusan meghatározható állandókat jelölnek. Esetleges más állandóktól való függésüket külön jelöljük.

Alkalmazni fogjuk továbbá a $\log_2 x = \log\log x$, $\log_3 x = \log(\log_2 x)$, $e_1(x) = e^x$ jelöléseket.

Megfogalmazzuk állításunkat.

$$P(x) = \Omega_+(x^{1/4} e_1(c(\log_2 x)^{1/4}(\log_3 x)^{-3/4})) \qquad x \to \infty, \tag{1. 7}$$

$$\Delta(x) = \Omega_-(x^{1/4} e_1(c(\log_2 x)^{1/4}(\log_3 x)^{-3/4})) \qquad x \to \infty, \tag{1. 8}$$

ahol $c > 0$ numerikus állandó.

2. A bizonyításhoz szükségünk lesz néhány segédtételre. Azokat a segédtételeket, amelyek bizonyítása [7]-ben megtalálható, vagy kis módosítással alkalmazhatók, bizonyítás nélkül átvesszük.

Legyen $X \geqq 2$ valós szám,

$$(1 \leqq) q_1 < q_2 < \ldots < q_N \leqq X$$

a négyzetmentes számok valamely $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ halmaza. A továbbiakban $N = N(X)$ jelöli ezen $\mathcal{P}$ halmaz elemei számát.

Legyen S_X azon η számok összessége, amelyek

$$\eta = \left|\sqrt{n} + \sum_{\lambda=1}^{N} r_\lambda \sqrt{q_\lambda}\right| \tag{2. 1}$$

alakba írhatók, ahol $n, r_1, \ldots, r_N$ a következő feltételt kielégítő egészek:

$$n \geqq 0; \quad |r_\lambda| \leqq 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, N); \quad \sum_{\lambda=1}^{N} |r_\lambda| \geqq 2. \tag{2. 2}$$

BESICOVITCH kimutatta [5], hogy ha $\{q\}$ különböző négyzetmentes számok valamely véges halmaza, akkor a $\sqrt{q}$ számok lineárisan függetlenek a racionális számok teste felett. Mivel a (2. 1) jobb oldalán álló kifejezésben legalább két r_λ nullától különböző, így az S_X halmaz elemei között a nulla nem szerepel.

Vezessük be az

$$\tilde{\eta}(X) = \min_{\eta \in S_X} \eta, \quad q(X) = -\log \tilde{\eta}(X)$$

jelöléseket. A [7] dolgozat 701—704 lapjain szereplő gondolat segítségével belátható az alábbi lemma.

Legyenek $p_1 < p_2 < \ldots < p_M$ a $q_1 < q_2 < \ldots < q_N (\leqq X)$ négyzetmentes számok összes különböző prímosztói. Ekkor

1. LEMMA:

$$q(X) < (2^{M+2} - 1) \log(1 + 2x^{1/2} N).$$

Megválasztjuk a $\mathcal{P}$ halmazt. Legyen $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tetszőleges pozitív állandó,

$$M = [(1 - \delta) \log X \cdot (\log_2 X)^{-1}].$$

Jelölje $p_1 < p_2 < \ldots < p_M$ az első M számú $4k+1$ alakú primet, továbbá $(1=)q_1 < q_2 < \ldots < q_N$ az ezekből szorzással képezhető $N=2^M$ számú négyzetmentes számot. A számtani sorokra vonatkozó prímszámtétel alkalmazásával

$$(\log q_N =) \sum_{j=1}^{M} \log p_j = \frac{p_M}{2} + o(p_M) = M \log M + o(M \log M) < \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \log x,$$

ha $X > c_1$.

Az 1. lemmából közvetlenül adódik a következő

2. LEMMA:

$$q(X) < Q(X), \quad Q(X) \overset{\text{def}}{=} c_2 \log X \cdot 2^{(1-\delta)\log X \cdot (\log_2 X)^{-1}},$$

ha $X > c_1$, $c_2 > 0$ *alkalmas állandó.*

3. LEMMA.

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} > c_3 e_1 \left(d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X}\right),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} > \frac{1}{4} c_3 e_1 \left(d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X}\right),$$

ha $X > c_1$, $c_3 > 0$, $d > 0$ *alkalmas numerikus állandók.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy a fenti $\mathcal{P}$ halmazon $r(q_\lambda) = 4d(q_\lambda)$, ezért elég az első egyenlőtlenséget belátni.

Mivel

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} = 4 \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \frac{1}{p_j^{3/4}}\right) > 4e_1 \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}} - \sum \frac{1}{p_j^3}\right) > c_4 e_1 \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}}\right),$$

továbbá a prímszámtételből kifolyólag $p_M \geqq \log X$ és

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}} \geqq c_5 \frac{p_M^{1/4}}{\log p_M} \geqq c_5 \frac{(\log X)^{1/4}}{\log_2 X},$$

így állításunk érvényes, ha $X > c_1$.

3. A $\sum r(n) e^{-s\sqrt{n}}$ *Dirichlet*-sor konvergál minden $s = \sigma + it$-re a $\sigma > 0$ félsíkban. Legyen

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-s\sqrt{n}}, \quad g(s) = \frac{f(s)}{s} - \frac{2\pi}{s^3} \qquad (\sigma > 0).$$

4. LEMMA:

$$\sigma^{3/2} g\left(\sigma \pm 2\pi i \sqrt{m}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{r(m)}{m^{3/4}} e^{\mp \frac{3}{4}\pi i} + 0(\sigma Y^{3/2})$$

$(0 < \sigma < 1;\ Y \geqq 1,\ 1 \leqq m \leqq Y,$ *m egész*$)$.

5. LEMMA: *Jelölje* $R(k,\omega)$ *azon* $s=\sigma+it$ *pontok összességét, amelyekre*

$$\sigma>0,\ |s|\leqq k,\ |s\pm 2\pi i\sqrt{n}|\geqq\omega\quad(n\geqq 1).$$

Ekkor $|g(s)|=0(\omega^{-\frac{3}{2}}k^2)$, $(k\geqq 2\pi, 0<\omega<1, s\in R(k,\omega))$.

Vezessük be a

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}d(n)e^{-s\sqrt{n}},\quad G(s)=\frac{F(s)}{s}+\frac{4}{s^3}(\log s-1)-\frac{1}{4s}$$

jelöléseket. $F(s)$ *Dirichlet*-sora konvergál a $\sigma>0$ félsíkban, továbbá érvényes a következő két lemma.

6. LEMMA:

$$\sigma^{3/2}G(\sigma\pm 4\pi i\sqrt{m})=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\frac{d(m)}{m^{3/4}}e^{\mp\frac{1}{4}\pi i}+O(\sigma^{1/2}Y^2\log^3 Y).$$

$(0<\sigma<1;\ Y\geqq 2;\ 1\leqq m\leqq Y, m$ *egész*).

7. LEMMA: *Jelölje* $D(k,\omega)$ *azon* $s=\sigma+it$ *pontok összességét, amelyekre*

$$\sigma>0,\ |s|\leqq k,\ |s\pm 4\pi i\sqrt{n}|\geqq\omega\quad(n\geqq 1).$$

Ekkor $|G(s)|=0(\sigma^{-1}\omega^{-\frac{3}{2}}k^{5/2}\log^3 k)$, $(k\geqq 2\pi, 0<\omega<1, s\in D(k,\omega))$.

Fenti lemmák bizonyítva vannak [7]-ben (704—710).

4. Legyen

$$K(\xi)=\tfrac{1}{2}e^{-i\xi}+1+\tfrac{1}{2}e^{i\xi}=2\cos^2\tfrac{1}{2}\xi$$

az úgynevezett másodrendű *Fejér*-mag, legyen továbbá

$$T_X(u)=\prod_{\lambda=1}^{N}K\left(2\pi\sqrt{q_\lambda}u-\frac{3}{4}\pi\right),\quad \mathcal{T}_X(u)=\prod_{\lambda=1}^{N}K\left(4\pi\sqrt{q_\lambda}u+\frac{3}{4}\pi\right).$$

$K(\xi)$ második alakjából világos, hogy $T_X(u)\geqq 0$, $\mathcal{T}_X(u)\geqq 0$ minden valós u és $X\geqq 1$ esetén. Továbbá $T_X(u)$ és $\mathcal{T}_X(u)$ általánosított trigonometrikus polinomok u-ban, 3^N számú különböző

$$2\pi\sum_{\lambda=1}^{N}t_\lambda\sqrt{q_\lambda},\quad \text{illetve}\quad 4\pi\sum_{\lambda=1}^{N}t_\lambda\sqrt{q_\lambda}\qquad (t_\lambda\text{-k egészek, } |t_\lambda|\leqq 1)$$

alakú kitevővel. (Általánosított trigonometrikus polinomon a $T(u)=\sum_\gamma a_\gamma e^{-i\alpha_\gamma u}$ alakú kifejezést értjük, kitevői az α_γ számok.)

Bontsuk fel a $T_X(u)$, $\mathcal{T}_X(u)$ polinomokat

$$T_X(u)=T_X^{(0)}(u)+T_X^{(1)}(u)+\overline{T_X^{(1)}(u)}+T_X^{(2)}(u),$$

$$\mathcal{T}_X(u)=\mathcal{T}_X^{(0)}(u)+\mathcal{T}_X^{(1)}(u)+\overline{\mathcal{T}_X^{(1)}(u)}+\mathcal{T}_X^{(2)}(u)$$

összegekre, ahol

$$T_X^{(0)}(u) \equiv 1; \qquad \mathcal{T}_X^{(0)}(u) \equiv 1,$$

$$T_X^{(1)}(u) \equiv \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}\pi i} e^{-2\pi i\sqrt{q_\lambda}u}; \qquad \mathcal{T}_X^{(1)}(u) \equiv \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{-4\pi i\sqrt{q_\lambda}u},$$

$$T_X^{(2)}(u) \equiv \sum_{\tau=1}^{T} b_\tau e^{-2\pi i\beta_\tau u}; \qquad \mathcal{T}_X^{(2)}(u) \equiv \sum_{\tau=1}^{T} \bar{b}_\tau e^{-4\pi i\beta_\tau u},$$

és β_τ-k az összes különböző $\sum r_\lambda\sqrt{q_\lambda}$ (r_λ-k egészek, $|r_\lambda| \leqq 1$, $\sum |r_\lambda| \geqq 2$) alakú számokat jelentik, számuk $T = 3^N - 2N - 1 < 3^N$, $|b_\tau| \leqq \frac{1}{4}$, $1 \leqq \tau \leqq T$.

Bevezetjük a következő jelölést. Tetszőleges $T(u) = \sum a_\gamma e^{-i\alpha_\gamma u}$ trigonometrikus polinom és $H(s)$ komplex változós függvény esetén legyen

$$T \wedge H(s) = \sum_\gamma a_\gamma H(s + i\alpha_\gamma).$$

Legyen $I_\theta(s) = s^{-\theta}$ $(s = \sigma + it)$, ekkor $1 \leqq \theta \leqq 2$, $x \geqq 2$ esetén

$$|T_X \wedge I_\theta(\sigma) - \sigma^{-\theta}| = O(e^{2q(x)} \cdot 3^N + N). \tag{4. 1}$$

$$|\mathcal{T}_X \wedge I_\theta(\sigma) - \sigma^{-\theta}| = O(e^{2q(x)} \cdot 3^N + N). \tag{4. 2}$$

Csupán az első egyenlőtlenséget bizonyítjuk, (4. 2) bizonyítása hasonló.

$$T_X^{(0)} \wedge I_\theta(\sigma) = \sigma^{-\theta}, \quad |T_X^{(1)} \wedge I_\theta(\sigma)| \leqq \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{N} |\sigma + 2\pi i\sqrt{q_\lambda}|^{-\theta} < \frac{1}{2} \frac{N}{(2\pi)^\theta} \leqq \frac{N}{4\pi},$$

$$|T_X^{(2)} \wedge I_\theta(\sigma)| = \left| \sum_{\tau=1}^{T} b_\tau(\sigma + 2\pi i\beta_\tau)^{-\theta} \right| \leqq \frac{1}{4} \sum_{\tau=1}^{T} |\beta_\tau|^{-\theta} < \frac{1}{4} e^{2q(X)} \cdot 3^N.$$

Legyen $\sigma_X = e^{-AQ(X)}$, $\theta_X = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{Q(X)}$, ahol $A \geqq 6$ állandó. Érvényesek a következő relációk.

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge g(\sigma_X)\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1), \tag{R}$$

$$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge G(\sigma_x)\} = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1), \tag{D}$$

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\} = e^A + o(1), \tag{I$_R$}$$

$$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge I_{\theta X+1}(\sigma_X)\} = e^A + o(1), \tag{I$_D$}$$

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_1(\sigma_X)\} = o(1), \tag{(I$_1$)$_R$}$$

$$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge I_1(\sigma_X)\} = o(1), \tag{(I$_1$)$_D$}$$

ha $X \to \infty$.

(R) bizonyítása.

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(0)} \wedge g(\sigma_X)\} = \sigma_X^{3/2} g(\sigma_X) = \sigma_X^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{(\sigma_X^2 + 4\pi^2 n)^{3/2}} = o(1),$$

mivel $\sigma_X = o(1)$.

Alkalmazzuk most a 4. lemmát $\sigma = \sigma_X$, $Y = X$ $(\geqq 2)$, $m = q_\lambda$ $(\lambda = 1, \dots, N)$ választással. Ekkor

$$\sigma_X^{3/2} g(\sigma_X + 2\pi i\sqrt{q_\lambda}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} + O(\sigma_X \cdot X^{\frac{3}{2}}) \qquad (X \geqq 2,\ 1 \leqq \lambda \leqq N).$$

Innen

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(1)} \wedge g(\sigma_X)\} = \sigma_X^{3/2} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}\pi i} g(\sigma_X + 2\pi i\sqrt{q_\lambda}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + O(N\sigma_X X^{3/2})$$

és $N\sigma_X X^{3/2} = o(1)$. Hasonlóan

$$\sigma_X^{3/2}\{\overline{T_X^{(1)}} \wedge g(\sigma_X)\} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1).$$

Mivel $|\sigma_X + 2\pi i\beta_\tau| \leqq 1 + 2\pi X^{3/2} < 3\pi X^{3/2}$ minden β_τ-ra, továbbá

$$|\sigma_X + 2\pi i\beta_\tau \pm 2\pi i\sqrt{n}| \geqq 2\pi|\beta_\tau \pm \sqrt{n}| \geqq 2\pi e^{-q(x)} \geqq 2\pi e^{-Q(x)}$$

minden n egészre, így az 5. lemmát $k = 3\pi X^{3/2}$, $\omega = e^{-Q(x)}$, $s = \sigma_X + 2\pi i\beta_\tau$ választással alkalmazva

$$|g(\sigma_X + 2\pi i\beta_\tau)| = O\left(e^{\frac{3}{2}Q(x)} \cdot X^3\right), \qquad X \geqq 2,\ 1 \leqq \tau \leqq T;$$

és így

$$|\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(2)} \wedge g(\sigma_X)\}| = |\sigma_X^{3/2} \sum b_\tau g(\sigma_X + 2\pi i\beta_\tau)| \leqq O(\sigma_X^{3/2} e^{3/2\, Q(x)} X^3 \cdot 3^N) = O(B).$$

Logaritmálással

$$\log B = -\frac{3}{2} AQ(X) + \frac{3}{2} Q(X) + 3\log X + N\log 3 \leqq$$

$$\leqq -\frac{3}{2}(A-1) C_2 \log X \cdot 2^{(1-\delta)\log X \cdot (\log_2 X)^{-1}} + 3\log X + 2^{(1-\delta)\frac{\log X}{\log_2 X}} \log 3 \to -\infty,$$

így $B = o(1)$.

Ezáltal (R) érvényességét kimutattuk.

(D) bizonyítása hasonló, ezért nem részletezzük.

$(\mathrm{I})_R$ bizonyítása.

Válasszuk X-et olyan nagyra, hogy $\theta_X < 1$ legyen. Alkalmazzuk (4. 1)-et $\sigma_X = \sigma$, $\theta = \theta_X$ választással. Az eredményt $\sigma_X^{3/2}$-el szorozva

$$|\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\} - \sigma_X^{-\frac{1}{Q(X)}}| = O(\sigma_X^{3/2}(3^N \cdot e^{2q(X)} + N)).$$

A jobb oldal $o(1)$, a bal oldalon $\sigma^{-\frac{1}{Q(o)}} = e^4$, így $(\mathrm{I})_R$ fennáll. $(\mathrm{I})_D$ bizonyítása hasonló. (4. 1)-et $\sigma = \sigma_X$, $\theta = 1$ választással alkalmazva

$$|\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_1(\sigma_X)\} - \sigma_X^{1/2}| = O(\sigma_X^{3/2}\{e^{2q(X)} 3^N + N\}) = o(1),$$

másrészt $\sigma_X^{1/2} \to 0$ és így $(\mathrm{I}_1)_R$ fennáll. $(\mathrm{I}_1)_D$ hasonlóan látható be.

5. tétel bizonyítása.

(1. 7) bizonyítása.

Legyen $\frac{1}{2}<\theta<2$, továbbá $P_\theta=\sup_{u>0} u^{-\theta}\{P(u^2)-1\}$. Nyilván feltehetjük, hogy P_θ véges minden $\frac{1}{2}<\theta<2$-re, mivel ellenkező esetben (1. 7) nyilvánvaló.

Legyen

$$\varrho_\theta(u)=P_\theta u^\theta-P(u^2)+1 \qquad (u\geqq 0,\ \tfrac{1}{2}<\theta\leqq 2).$$

P_θ definíciójából következik, hogy $\varrho_\theta(u)\geqq 0$. Továbbá minden $s=\sigma+it$, $\sigma>0$-ra

$$\int_0^\infty \varrho_\theta(u)e^{-su}\,du = P_\theta\int_0^\infty u^\theta e^{-su}\,du-\int_0^\infty \{R(u^2)-\pi u^2\}e^{-su}\,du+\int_0^\infty e^{-su}\,du =$$

$$= P_\theta\frac{\Gamma(\theta+1)}{s^{\theta+1}}-\frac{f(s)}{s}+\frac{2\pi}{s^3}+\frac{1}{s}.$$

Innen

$$\sigma_X^{3/2}\int_0^\infty \varrho_{\theta_X}(u)e^{-\sigma_X u}T_X(u)\,du = P_{\theta_X}\Gamma(\theta_X+1)\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\}-$$
$$-\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge g(\sigma_X)\}+\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge I_1(\sigma_X)\}.$$

Felhasználva a $\Gamma(\theta_X+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+o(1)$ formulát, továbbá az (R), $(\mathrm{I})_R$, $(\mathrm{I}_1)_R$ relációkat a

$$P_{\theta_X}\sqrt{\pi}e^{2A}-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}}>0$$

egyenlőtlenséget kapjuk elég nagy X-re. Innen a 3. Lemma segítségével

$$P_{\theta_X}>c_6e_1\left(d\frac{\log^{1/4}x}{\log_2 x}\right).$$

Fenti egyenlőtlenségünkből következik olyan $u_x>0$ érték létezése, amelyre

$$u_X^{-\theta_X}P(u_X^2)>c_6e_1\left(d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}\right). \tag{5. 1}$$

Világos, hogy $u_X\to\infty$, ha $X\to\infty$. (5. 1)-et írjuk

$$u_X^{-\frac{1}{2}}P(u_X^2)>c_6e_1\left(\frac{\log u_X}{Q(X)}+d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}\right) \tag{5. 2}$$

alakba. Kimutatjuk, hogy (5. 2) jobb oldala $>c_7e_1(c(\log_2 u_X)^{1/4}(\log_3 u_X)^{-\frac{3}{3}})$, s ezzel tételünk első része bizonyítva lesz.

Vizsgáljuk először a

$$\frac{\log u_X}{Q(X)}\leqq d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}$$

esetet. Az egyenlőtlenséget logaritmálva

$$\log_2 u_X \leqq (1-\delta)\log 2\cdot\frac{\log X}{\log_2 X}+\lg d+\frac{1}{4}\log_2 X-\log_3 X\leqq\frac{\log X}{\log_2 X}\log 2,$$

innen

$$\frac{(\log_2 u_X)^{1/4}}{(\log_3 u_X)^{3/4}}\leqq\frac{(\log X)^{1/4}}{\log_2 X}$$

következik, s ezzel ezt az esetet elintéztük. Legyen most

$$\frac{\log u_X}{Q(X)}\geqq d\frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X},$$

azaz

$$\log_2 u_X\geqq(1-\delta)\log 2\cdot\frac{\log X}{\log_2 X}+\frac{5}{4}\log_2 X+O(1).$$

Feltehető, hogy $\log_2 u_X<2\log g(X)$, mert ellenkező esetben

$$\frac{\log u_X}{g(X)}>\log u_X\cdot e_1\left(\frac{1}{2}(\log_2 u_X)\right),$$

s az állítás be lenne bizonyítva. Most viszont $\log_3 u_X=\log_2 X+O(1)$, s így

$$\frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X}>c_7\frac{(\log_2 u_X)^{1/4}}{(\log_3 u_X)^{3/4}}$$

miatt ugyancsak készen vagyunk.

(1.8) bizonyítása hasonlóan történik. Bevezetjük a $\Delta_\theta=\sup\limits_{u>0}\{-u^{-\theta}\Delta(u^2)\}$ jelölést és feltesszük, hogy Δ_θ véges minden $\frac{1}{2}<\theta<1$-re. Legyen $\delta_\theta(u)=\Delta_\theta u^\theta+\Delta(u^2)$ $(\geqq 0)$. Hasonlóan, mint az előbb érvényes az

$$\int_0^\infty \delta_\theta(u)e^{-su}\,du=\Delta_\theta\frac{\Gamma(\theta+1)}{s^{\theta+1}}+G(s)+\frac{1}{4s}$$

előállítás, ahonnan levezetjük a

$$\sigma_X^{3/2}\int_0^\infty \delta_{\theta_X}(u)e^{-\sigma_X u}\mathcal{T}_X(u)\,du=\Delta_{\theta_X}\Gamma(\theta_X+1)\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X\wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\}+$$
$$+\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X\wedge G(\sigma_X)\}+\frac{1}{4}\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_C\wedge I_1(\sigma_X)\}$$

formulát. A bal oldal nem-negativitását, továbbá a (D), $(\mathrm{I})_D$, $(\mathrm{I}_1)_D$ relációkat felhasználva

$$\Delta_{\theta_X}\sqrt{\pi}e^{2A}-\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}}>0\qquad(x\geqq x_4).$$

A 3. lemmát alkalmazva érvényes az

$$u_X^{-\frac{1}{2}} \quad \Delta(u_X'^2) < -c_8 e_1 \left(\frac{\log u_X'}{Q(X)} + d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X} \right)$$

egyenlőtlenség alkalmas u_X'-vel. Innen a fent látott módon következik (1. 8).

IRODALOMJEGYZÉK

[1] HARDY, G. H.: On Dirichlet's divisor problem *Proc. London Math. Soc.* **2** (1916), 1—25.
[2] HARDY, G. H.: On the expression of a number as the sum of two squares, *Quart. J. Math.* **46** (1915), 263—83.
[3] INGHAM, A. E.: On two classical lattice point problems, *Proc. Cambridge Philos Soc.* **36** (1940), 131—8.
[4] LANDAU, E.: *Vorlesungen über Zahlentheorie,* Bd 2., Leipzig, 1927.
[5] BESICOVITCH, A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers, *J. London Math. Soc.* **15** (1940), 3—6.
[6] CASSELS, J. W. S.: *An introduction to Diophantine approximation,* Cambridge, 1957.
[7] GANGADHARAN, K. S.: Two classical lattice point problems, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **57** (1961), 699—721.
[8] HUA, L. K.: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* B I. 1, H 13, T 1, 29, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Leipzig, 1959, 107.
[9] BOHR, H. and JESSEN, B.: One more proof of Kronecker's theorem, *J. London Math. Soc.* **7** (1932), 247—5.

(Beérkezett: 1966. VIII. 13.)

A NOTE ON A PAPER OF K. S. GANGADHARAN

by

K. A. CORRÁDI and I. KÁTAI

Summary

The aim of this paper is to prove an improvement of a theorem of Mr. K. S. GANGADHARAN [7].

Let $r(n)$ be the number of representations of n as a sum of two squares, $d(n)$ the number of divisors of n, and let

$$P(x) = \sum_{0 \leqq n \leqq x} r(n) - \pi x, \quad \Delta(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x,$$

where γ is EULER's constant.

We prove, that

$$P(x) = \Omega_+ \left(x^{1/4} \exp\left(c (\log\log x)^{1/4} (\log\log\log x)^{-\frac{3}{4}}\right)\right),$$

$$\Delta(x) = \Omega_- \left(x^{1/4} \exp\left(c (\log\log x)^{1/4} (\log\log\log x)^{-\frac{3}{4}}\right)\right)$$

és $x \to \infty$, where c is a positive absolute constant.