

A CSOPORTOK JELLEMZÉSÉRŐL

Írta: LAJOS SÁNDOR

F legyen félcsoport, vagyis elemeknek olyan halmaza, amely zárt egy kétváltozós asszociatív műveletre vonatkozólag. Ebben a cikkben multiplikatív írásmódot alkalmazunk, vagyis szorzásnak nevezzük az iménti műveletet.

SZÁSZ GÁBOR [8] nyomán az F félcsoportot balról egyszerűsíthető félcsoportnak nevezzük, ha elemeire érvényes a baloldali egyszerűsítési szabály, azaz

$$ax = ay$$

fennállásából $x = y$ következik tetszőleges F -hez tartozó a, x, y elemekre. Analóg módon értelmezhető a jobbról egyszerűsíthető félcsoport. F -et egyszerűsíthető félcsoportnak nevezzük, ha mind balról, mind jobbról egyszerűsíthető.

Regulárisnak nevezzük az F félcsoportot, ha bármely a eleméhez létezik legalább egy olyan $x \in F$ elem, amelyre

$$(*) \quad axa = a.$$

Mint ismert, egy félcsoportot csoportnak nevezünk, ha van kétoldali egységeleme és mindegyik elemének van kétoldali inverze (lásd [2]). Egy véges, egyszerűsíthető félcsoport szükségképpen csoport (lásd [7]). Általában azonban az egyszerűsíthetőség nem elegendő ahhoz, hogy egy félcsoport csoport legyen.

Bebizonyítjuk a következő tételt, amely négy (egymással ekvivalens) szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy tetszőleges félcsoport csoport legyen.

TÉTEL. *Egy tetszőleges F félcsoportra vonatkozólag az alábbi állítások egymással ekvivalensek:*

- (1) F csoport;
- (2) F egyszerűsíthető és reguláris;
- (3) F -nek mindegyik a elemére az $axa = a$ egyenlet F -ben egyértelműen megoldható;
- (4) F reguláris és az $exe = e$ egyenletnek F mindegyik e idempotens elemére csak egy megoldása van;
- (5) F reguláris és csak egy idempotens eleme van.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2), mivel bármely csoportban érvényes mind a bal, mind a jobb oldali egyszerűsítési szabály, s az a elem inverze kielégíti a $(*)$ egyenletet.

(2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy az F félcsoport egyszerűsíthető és reguláris. Akkor az F bármelyik a eleméhez létezik olyan x elem, amelyre $(*)$ fennáll. Ha még egy y elem is kielégítené a $(*)$ egyenletet, akkor $axa = aya$ következne,

s ebből az egyszerűsíthetőség következtében $x=y$ adódik. Így az $axa=a$ egyenletnek csak egy megoldása van, vagyis fennáll (3).

Az, hogy (3)-ból (4) következik, nyilvánvaló.

(4)-ből következik (5). Először megmutatjuk, hogy a (4) feltételt kielégítő F félcsoporth idempotens elemei egymással felcserélhetők. Legyen e és f az F -nek két különböző idempotens eleme. Ha $a=ef$ és $\bar{a}=xax$, ahol x a $(*)$ egyenlet megoldása, akkor könnyű belátni, hogy

$$axax=(ax)e(ax)=ax,$$

és hasonló módon

$$xaxa=(xa)f(xa)=xa.$$

Innen a (4) feltétel alapján következik, hogy $ax=e$ és $xa=f$. Így

$$\bar{a}=xe=fx.$$

Ebből azonban adódik, hogy

$$\bar{a}e=\bar{a}=f\bar{a}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\bar{a}=\bar{a}a\bar{a}=\bar{a}ef\bar{a}=\bar{a}\bar{a},$$

vagyis az $\bar{a}$ elem idempotens eleme az F félcsoporthnak. Azonban az $\bar{a}a\bar{a}=\bar{a}$ és $\bar{a}\bar{a}\bar{a}=\bar{a}$ összefüggésekből (4) alapján $a=\bar{a}$ következik. Így azt nyertük, hogy

$$ae=a=fa,$$

vagyis

$$efe=ef=fef.$$

A $b=fe$ elemből kiindulva, a fentivel analóg meg gondolás mutatja, hogy

$$eb=b=bf,$$

azaz

$$efe=fe=fef.$$

Így azt nyertük, hogy

$$ef=fe,$$

tehát az F félcsoporth idempotens elemei felcserélhetők egymással.

Most megmutatjuk, hogy F -nek csak egyetlen idempotens eleme van. Legyen ismét $a=ef$, ahol e, f az F -nek idempotens elemei. Akkor az idempotens elemek felcserélhetősége miatt $aea=a$ és $afa=a$. A (4) feltétel alapján innen adódik, hogy $e=f$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (4) feltételt kielégítő F félcsoporth (5)-öt is kielégíti.

(5)-ből következik (1). Legyen F reguláris félcsoporth és e az F -nek egyetlen idempotens eleme. Ha a az F -nek tetszőleges eleme, akkor létezik a $(*)$ egyenletet kielégítő $x \in F$ elem: $axa=a$. Innen következik, hogy

$$(ax)(ax)=ax,$$

vagyis

$$ax=e.$$

Hasonló módon igazolható, hogy

$$xa=e.$$

is fennáll. Az x elem tehát kétoldali inverze a -nak, ha e egységeleme F -nek. e azonban egységelem, mert

$$ae = a(xa) = a$$

és

$$ea = (ax)a = a.$$

F tehát csakugyan csoport.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy az (1) és (2) feltételek ekvivalenciáját már THIERRIN [10] igazolta, s az, hogy (5)-ből (1) következik, CLIFFORD és PRESTON [1] könyvében bizonyítás nélkül ki van mondva. Arra, hogy egy félcsoport reguláris legyen, a [3, 4] dolgozataimban adtam szükséges és elégséges feltételeket. Ha az F félcsoport reguláris és ezenkívül csupán balról egyszerűsíthető, akkor F nem lesz szükségképpen csoport. Ezzel kapcsolatban lásd [5] és [9]. A tételben szereplő állítások közül az első négynek az ekvivalenciáját egy korábbi dolgozatomban bizonyítottam [6]. A csoportokat (m, n) -ideálok segítségével jellemeztem a [4] dolgozat második részében.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] CLIFFORD A. H. és G. B. PRESTON: *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Providence, 1961.
- [2] KUROS A. G.: *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- [3] LAJOS S.: A remark on regular semigroups, *Proc. Japan Acad.* 37 (1961), 29—30.
- [4] LAJOS S.: A félcsoportok ideálméletéhez, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* 11 (1961), 57—66; II. rész: 14 (1964), 293—299.
- [5] LAJOS S.: A remark on right groups, *Matematički Vesnik* (Beograd), 1 (16), (1964), 247—248.
- [6] LAJOS S.: On characterization of groups, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Math. Astr. Phys.*, 14 (1966), 55—56.
- [7] RÉDEI L.: *Algebra*, I. kötet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [8] SZÁSZ G.: Hazai eredmények a félcsoportelmélet területén az 1956—1965 években, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* 16 (1966), 281—292.
- [9] SZÉP J.: Zur Theorie der Halbgruppen, *Publ. Math.*, 4 (1955-56), 344—347.
- [10] THIERRIN G.: Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit un groupe, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 232 (1951), 376—378.

(Beérkezett: 1966. IX. 1.)

SOME CHARACTERIZATIONS OF GROUPS

by

S. LAJOS

Summary

In this paper the author proves the following

THEOREM. For any semigroup S the following conditions are equivalent:

- (1) S is a group;
- (2) S is regular and cancellative;
- (3) For each element a in S the equation $axa = a$ has exactly one solution x in S ;
- (4) S is regular and for every idempotent e of S the equation $exe = e$ has only one solution x in S ;
- (5) S is a regular semigroup containing exactly one idempotent element.