A KOLMOGOROV-EGYENLŐTLENSÉGRŐL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

KOLMOGOROV egyenlőtlensége eredeti formájában a következő: legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy mindegyikük szórása létezik. Jelölje M_i a ξ_i változó várható értékét, D_i pedig a szórását, és legyen $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$. Ha $\lambda > 0$ tetszőleges szám és $P(\cdot)$ jelöli a zárójelben levő esemény valószínűségét, akkor

$$P\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geqq \lambda S_n \right) \leqq \frac{1}{\lambda^2}.$$

KOLMOGOROV egyenlőtlenségét többféle módon általánosították. Ilyen volt például a martingálokra vonatkozó általánosítás [3]. Nemrégen RÉNYI ALFRÉD [1] feltételes KOLMOGOROV-egyenlőtlenséget vezetett le. Jelen dolgozatnak az a célja, hogy a feltételes valószínűségi mérték helyett — amely abszolút folytonos az eredeti P valószínűségi mértékre nézve — tetszőleges, a P mértékre nézve abszolút folytonos Q valószínűségi mértéket véve, általánosítsa RÉNYI ALFRÉD és mások eredményét [6].

Nyilvánvaló, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek a P mérték szerint, várható értékük és szórásuk létezik, akkor ugyanezen valószínűségi változók a Q mérték szerint nem feltétlenül lesznek függetlenek. Ily módon a

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \varepsilon \right) \qquad (\varepsilon > 0)$$

Q-valószínűségek megbecslése azt jelenti, hogy a Q-ra nézve nem független valószínűségi változók összegei maximumának valószínűségi viselkedését is ismerjük, ha Q abszolút folytonos a P mértékre nézve. Megemlítjük, hogy az e dolgozatban leírt 3. Tételt határeloszlástételek bizonyítására fel lehetett használni ([6]) abban a speciális esetben, mikor Q a P valószínűségből képzett feltételes valószínűség.

Először néhány triviális általánosítást mutatunk a következő megjegyzésekben.

1. MEGJEGYZÉS. Ha dQ/dP, vagyis a Q mérték *Radon—Nikodym* deriváltja a P mérték szerint (mint valószínűségi változó), független a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóktól és ez utóbbiak is teljesen függetlenek, akkor

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \lambda D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right) = \int_{\Omega} \chi \frac{dQ}{dP}\, dP =$$

$$= \int_{\Omega} \chi \, dP \cdot \int_{\Omega} \frac{dQ}{dP}\, dP \leqq \frac{1}{\lambda^2} \qquad (\lambda > 0),$$

ahol χ az

$$A = \left\{ \operatorname*{Max}_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \lambda D \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right) \right\}$$

esemény indikátora, azaz $\chi=1$, ha az A és $\chi=0$, ha nem az A esemény következik be. Ez esetben tehát a *Kolmogorov*-egyenlőtlenségben szereplő felső becslés érvényes.

2. MEGJEGYZÉS. Ha $\left|\frac{dQ}{dP}\right| \leqq K$, ahol K véges, akkor a következő triviális becslést kapjuk:

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \lambda D \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right) \right) \leqq \frac{K}{\lambda^2}.$$

Megjegyezzük, hogy ez esetekben a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók másodrendű momentumainak létezését tételeztük csak fel.

A következőkben az $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ mérhető teret vesszük alapul, ahol Ω az alaptér, $\mathcal{A}$ pedig az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott σ-algebra. $\mathcal{A}$ elemeit eseményeknek is nevezzük. Az $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ mérhető téren értelmezett P és Q mértékeket valószínűségeknek nevezzük, ha Ω mértéke 1. Az Ω téren értelmezett $\mathcal{A}$ szerint mérhető függvényeket ez esetben valószínűségi változóknak nevezzük. Ezek absztrakt Lebesgue-integráljait pedig várható értéknek fogjuk nevezni. A ξ valószínűségi változó várható értékét az $M(\xi)$ jellel jelöljük.

A következő eredmény az [1] dolgozat tételének általánosítása.

1. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy negyedik momentumuk létezik. Legyen $M(\xi_i) = M_i$, $D(\xi_i) = D_i$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$ és λ tetszőleges pozitív szám. Legyen továbbá Q az $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ mérhető téren értelmezett és a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, amelyre teljesül, hogy P szerinti Radon—Nikodym deriváltja, dQ/dP, négyzetesen integrálható. Ekkor*

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geqq \lambda S_n \right) \leqq \frac{c_n \sqrt{\int_{\Omega} \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2},$$

ahol

$$c_n = 2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{S_n}\right)^4} \quad \text{és} \quad F_n^4 = \sum_{i=1}^{n} M((\xi_i - M_i)^4).$$

Bizonyítás. Legyen $\vartheta_k = \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)$. Jelölje A_k $(k=2, 3, \ldots, n)$ a következő eseményt:

$$|\vartheta_i| \leqq \lambda S_n, \quad (i=1, 2, \ldots, k-1) \quad \text{és} \quad |\vartheta_k| > \lambda S_n,$$

és A_1 jelölje a $|\vartheta_1| > \lambda S_n$ eseményt. Legyen $g = dQ/dP$ és α_k az A_k esemény indikátora $(k=1, 2, \ldots, n)$. Ekkor

$$\alpha_i \alpha_j = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad 0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq 1.$$

Fennál továbbá, hogy

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq\lambda S_n\right)=\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)g\,dP=M\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g\right).$$

Vizsgáljuk a $g\vartheta_n^2$ várható értékét. Könnyű látni, hogy

$$(*)\qquad M(g\vartheta_n^2)\geqq\sum_{k=1}^{n}M(g\alpha_k\vartheta_k^2)+2\sum_{k=1}^{n-1}M(g\alpha_k\vartheta_k(\vartheta_n-\vartheta_k)).$$

A jobb oldalon a második összeg a következő alakban is írható:

$$2\sum_{j=2}^{n}M(g\beta_j),$$

ahol

$$\beta_j=(\xi_j-M_j)\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\qquad(j=2,3,\dots,n).$$

A $\{\beta_j\}$ $(j=2,3,\dots,n)$ rendszer szubortonormált. Ugyanis, ha például $j<i$, akkor a ξ_i-M_i valószínűségi változó független a P valószínűségre nézve a $\beta_i\beta_j$ szorzatban levő összes többi valószínűségi változótól, és így

$$M(\beta_i\beta_j)=0\qquad(i\neq j).$$

Másrészt

$$M(\beta_j^2)=M[(\xi_j-M_j)^2]M\left[\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\right)^2\right]\leqq D_j^2S_n^2<+\infty.$$

Ugyanis

$$M\left[\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\right)^2\right]=M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k^2\right)\leqq M(\vartheta_{j-1}^2)\leqq S_n^2,$$

hiszen

$$M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k^2\right)\leqq M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k(\vartheta_k+(\xi_{k+1}-M_{k+1})+\dots+(\xi_{j-1}-M_{j-1}))^2\right),$$

mivel az α_k és ϑ_k valószínűségi változók csak a $\xi_1,\dots,\xi_k$ változóktól függenek.

Alkalmazva *Cauchy*, majd *Bessel* egyenlőtlenségét, nyerjük, hogy

$$\left|M\left(g\sum_{j=2}^{n}\beta_j\right)\right|=\left|M\left(\sum_{j=2}^{n}\left(g\frac{\beta_j}{\sqrt{M(\beta_j^2)}}\right)\sqrt{M(\beta_j^2)}\right|\leqq$$

$$\leqq\sqrt{\sum_{j=2}^{n}M^2\left(g\frac{\beta_j}{\sqrt{M(\beta_j^2)}}\right)\sum_{j=2}^{n}M(\beta_j^2)}\leqq\sqrt{\int_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2dP\,S_n^2}.$$

Figyelembe véve, hogy $\alpha_k=1$ esetén $\vartheta_k^2\geqq\lambda^2S_n^2$, és felhasználva legutóbbi egyenlőtlenségünket, $(*)$ alapján

$$(**)\quad M(g\vartheta_n^2)\geqq Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq\lambda S_n\right)\lambda^2S_n^2-2\sqrt{\int_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2dP\,S_n^2}.$$

Másrészről

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \sqrt{\int\limits_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}\, \sqrt{M(\vartheta_n^4)}.$$

Minthogy

$$M(\vartheta_n^4) \leqq F_n^4 + 3S_n^4,$$

azért ezt összehasonlítva a $(**)$ egyenlőtlenséggel, nyerjük tételünk állítását.

3. MEGJEGYZÉS. Legyen speciálisan $Q(A) = P(A|C)$, ahol $P(C) > 0$ és C tetszőleges esemény. Ez esetben mod P egyértelműen

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{\chi_C(\omega)}{P(C)},$$

ahol $\chi_C(\omega)$ a C esemény indikátora. Ekkor, ha az 1. Tétel többi feltétele teljesül,

$$P\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n | C\right) \leqq \frac{c_n}{\lambda^2 \sqrt{P(C)}}.$$

Ez a formula RÉNYI ALFRÉD eredménye [1].

Tételünk szépséghibája, hogy az eredeti *Kolmogorov*-egyenlőtlenség feltételeivel szemben a valószínűségi változók negyedik momentumának létezését fel kellett tételezni. Jelenlegi módszerünk nem ad lehetőséget arra, hogy csak a második momentumok létezését tételezzük fel. Azonban $(2+\delta)$-rendű momentumok létezése már elegendő, ahol $\delta > 0$ tetszőleges szám. Ennek belátásához szükségünk van a következő állításra.

J. MARCINKIEWICZ és A. ZYGMUND tétele [4]. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, 0 várható értékű valószínűségi változókból álló sorozat. Ekkor minden $p \geqq 1$ esetén fennáll*

$$A_p \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{p/2} dP \leqq \int\limits_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right|^p dP \leqq B_p \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{p/2} dP,$$

ha az itt szereplő integrálok léteznek. A_p és B_p csak a p számtól függő állandók.

Fogalmazzuk meg állításunkat $(2+\delta)$-rendű momentumok esetére.

2. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $(2+\delta)$-rendű momentumuk létezik, ahol $\delta > 0$. Legyen $M(\xi_i) = M_i$, $D(\xi_i) = D_i$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$ és $\lambda > 0$ tetszőleges szám. Legyen továbbá Q az $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ mérhető téren értelmezett és a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték. Feltesszük, hogy dQ/dP — a Q mérték P szerinti Radon—Nikodym-deriváltja — $(2+\delta)/\delta$-rendű momentuma létezik. Ekkor*

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{C_n \left[\int\limits_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}} dP\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{\lambda^2},$$

ahol

$$C_n = \frac{(2+B_\delta)\sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j - M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}}{S_n^2},$$

és B_δ csak a δ-tól függő állandó.

Bizonyítás. Felhasználjuk az 1. Tétel bizonyításánál alkalmazott jelöléseket. Az

$$M(g\vartheta_n^2)$$

várható érték felülről való becslésénél alkalmazzuk egymás után HÖLDER, MARCINKIEWICZ és ZYGMUND, továbbá MINKOWSKY egyenlőtlenségét:

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\left[M(|\vartheta_n|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

MARCINKIEWICZ és ZYGMUND tételéből nyerjük:

$$M(|\vartheta_n|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}} \leqq \left[B_\delta' M\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - M_j)^2\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Végül a *Minkowsky*-egyenlőtlenség alapján

$$\left[M(|\vartheta_n|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \leqq B_\delta \sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j - M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Ily módon

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq B_\delta\left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j - M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Az $M(g\vartheta_n^2)$ alulról való becslésekor ugyanúgy járhatunk el, mint az 1. Tétel bizonyításakor, ily módon kapjuk a $(**)$ egyenlőtlenséget. Ha $\delta < 2$, akkor $(2+\delta)/\delta > 2$, és így a *Hölder*-egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{M(g^2)} \leqq \left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{2}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

továbbá

$$S_n^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j - M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}} = C.$$

Ezért $(**)$ alapján

$$M(g\vartheta_n^2) \geqq Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right)\lambda^2 S_n^2 - 2\left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}} C.$$

Összevetve az $M(g\vartheta_n^2)$ várható értékre adódó felső és alsó becsléseket, kapjuk tételünk állítását.

4. MEGJEGYZÉS. Tételezzük fel, hogy

a) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak, vagy pedig, hogy

b) létezik olyan $c>0$ szám, hogy $i=1,2,\ldots,n$ esetén

$$[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})]^{\frac{1}{2+\delta}} \leqq c[M((\xi_j-M_j)^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Ez esetben tételünk állítása a következő:

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{K\left[\int\limits_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}}dP\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{\lambda^2},$$

ahol K az a), ill. b) esetnek megfelelő állandó.

Mint említettük, jelen problémakörben nem tudunk megszabadulni annak feltételezésétől, hogy a valószínűségi változók kettőnél magasabb rendű momentumai is léteznek. Az alábbiakban bebizonyítunk egy aszimptotikus formulát, amelynél elegendő a második momentumok létezése.

3. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók és létezzenek $M(\xi_i)=M_i$, $D^2(\xi_i)=D_i^2$. Legyen továbbá $S_n^2=\sum_{i=1}^{n} D_i^2$ és*

$$\zeta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-M_i)}{S_n}.$$

Feltételezzük, hogy $n\to+\infty$ esetén ζ_n határeloszlása létezik és ζ_n^2 egyenletesen integrálható. Legyen Q a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, és tegyük fel, hogy dQ/dP, a Q mérték P szerinti Radon—Nikodym-deriváltja, korlátos. Ekkor létezik olyan, a Q mértéktől függő, $n_0=n_0(Q)$ egész szám, hogy $n\geqq n_0$ esetén

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{3\sqrt{\int\limits_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2}.$$

Az e tételben megfogalmazott egyenlőtlenség hátránya, hogy csak a ζ_n változók határeloszlásának létezése esetén áll fenn, és a ζ_n^2 egyenletes integrálhatóságát is meg kell követelnünk. Hátránya az is, hogy nem minden n esetén érvényes. Jogosságát viszont az bizonyítja, hogy KOLMOGOROV egyenlőtlenségét határeloszlástételek, nagy számok erős törvényei stb. bizonyítására szokták használni, tehát az esetben, mikor n nagy. Jelen egyenlőtlenségünk egy speciális esetét, a $Q(A)=$ $=P(A|C)$ $(P(C)>0$, C rögzített) esetet, a [6] dolgozatban határeloszlástételek bizonyítására alkalmaztuk.

Tételünk bizonyításához a következő segédtételre van szükségünk:

LEMMA. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ az $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók sorozata és*

$$\zeta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n},$$

ahol $B_n \to +\infty$. Tételezzük fel, hogy a $\{\zeta_n\}$ sorozatnak létezik határeloszlása. Legyen továbbá $f(x)$ valós értékű folytonos függvény, és tegyük fel, hogy az $\{|f(\zeta_n)|\}$ valószínűségi változó sorozat egyenletesen integrálható. Ha a Q valószínűségi mérték abszolút folytonos a P valószínűségre nézve és dQ/dP — a Q Radon—Nikodym-deriváltja a P mérték szerint — korlátos, akkor

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(\zeta_n)\,dP = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(\zeta_n)\,dQ.$$

Bizonyítás. Abból, hogy a $\{\zeta_n\}$ sorozatnak van határeloszlása, következik, hogy az $\{f(\zeta_n)\}$ sorozatnak is van határeloszlása, sőt erősen keverő is

$$G(y) = \int_{\{f(x)<y\}} dF(x)$$

határeloszlással, ahol $F(x)$ a $\{\zeta_n\}$ sorozat határeloszlása. Ebből, továbbá az $\{|f(\zeta_n)|\}$ sorozat egyenletes integrálhatóságából következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(\zeta_n)\,dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dG(y)$$

(lásd pl. Loève [5], 196. oldal).

Minthogy Q a P mértékre nézve abszolút folytonos, és $\{f(\zeta_n)\}$ erősen keverő ([2]), adódik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} Q(f(\zeta_n)<y) = G(y).$$

Tehát az $\{f(\zeta_n)\}$ sorozat P és Q szerinti határeloszlása ugyanaz. Az $\{|f(\xi_n)|\}$ sorozat a Q mérték szerint is egyenletesen integrálható, mert dQ/dP korlátos. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f(\zeta_n)\,dQ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dG(y).$$

Ily módon a Lemma bizonyítást nyert.

A 3. *Tétel bizonyítása.* Fel fogjuk használni az 1. Tétel jelöléseit és az annak bizonyítása közben adódott ($\ast\ast$) egyenlőtlenséget. Becsüljük meg most felülről a

$$M(g\vartheta_n^2)$$

várható értéket. Minthogy a Lemma összes feltétele teljesül, azért

$$\lim_{n\to+\infty} M(g\zeta_n^2) = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \zeta_n^2\,dQ = 1,$$

mert

$$\int_\Omega \zeta_n^2\,dP = 1.$$

Másrészt

$$\sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP} > 1, \qquad (Q \not\equiv P),$$

tehát bizonyos $n_0 = n_0(Q)$ indextől kezdve

$$M(g\zeta_n^2) < \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP} \qquad (n \geqq n_0)$$

vagyis, ha $n \geqq n_0$

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}\, S_n^2.$$

Ez és a (✳✳) egyenlőtlenség együttesen adják tételünk állítását.

5. MEGJEGYZÉS. Legyen speciálisan $Q(A) = P(A)B$, ahol $P(B) > 0$ és B rögzített esemény. A 3. Tétel feltételei mellett létezik olyan, csak a B-től függő n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén

$$P\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n \middle| B\right) \leqq \frac{3}{\sqrt{P(B)}\lambda^2}.$$

Ez az eredmény, amelyet a 3. Tétel speciális eseteként kaptunk, a [6] dolgozatban jelent meg.

IRODALOM

[1] A. RÉNYI, On Kolmogoroff's inequality *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.* **6** (1961) Series A 411—415.
[2] A. RÉNYI, On mixing sequences of sets. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 215—228.
[3] J. L. DOOB, *Stochastic processes.* John Wiley and Sons, New York, 1953.
[4] J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, Sur les fonctions indépendantes. *Fundamenta Mathematicae.* **29** (1937) 60—90.
[5] M. Лоэв, Теория вероятностей. Изд. Иностранной Литературы. Москва. 1962.
[6] J. MOGYORÓDI, A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. of Sci.* **7** (1962) Series A 409—424.

(Beérkezett: 1966. IX. 3.)

ON KOLMOGOROV'S INEQUALITY

By

J. MOGYORÓDI

Summary

Generalizing the results of [1] and [6] we prove the following: Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be independent random variables defined on the probability space $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ and having finite fourth moment. Denote by M_i, D_i^2 and f_i^4 the mean value, the variance and the central fourth moment, resp., of the variable $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Let further $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$, $F_n^4 = \sum_{i=1}^{n} f_i^4$. Let Q be any probability measure, which is absolutely continuous with respect to P. If dQ/dP — the Radon—Nikodym derivative of Q with respect to P — is square integrable, then (Theorem 1.)

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{C_n \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2}$$

where $\lambda > 0$ is arbitrary and

$$C_n = 2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{S_n}\right)^2}.$$

By the aid of a theorem, due to J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, we prove a similar theorem (Theorem 2) supposing only the existence of the moment of order $2+\delta$ ($\delta > 0$) of the variable $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Theorem 3. gives an asymptotic inequality. In this case we suppose only the existence of the second order moment of the variable ξ_i ($i = 1, \ldots, n$). Let us suppose also that

$$\zeta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M_i)}{S_n}$$

has a limiting distribution, ζ_n^2 is uniformly integrable and that dQ/dP is bounded. Then there exists an index $n_0 = n_0(Q)$ such that for $n \geq n_0$ we have.

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geq \lambda S_n \right) \leq \frac{3\sqrt{\int\limits_{\Omega} \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2}.$$