

FOLYTONOSSÁGI STRUKTÚRÁK SZINTOPOGÉN JELLEMZÉSE, I.*

Írta: GACSÁLYI SÁNDOR

TARTALOM

Bevezetés	
I. fejezet	
1. §. <i>E</i> -leképezések és féltopogén rendezések	
2. §. Néhány eredmény féltopogén rendezésekre vonatkozólag	
II. fejezet	
3. §. Szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák	
4. §. Egy kompatibilitási fogalom. Szomszédsági függvény inverze	
III. fejezet	
5. §. Ferde szomszédsági függvények és szomszédsági függvények	
6. §. Ferde szomszédsági függvényekre vonatkozó néhány további eredmény	
7. §. Ferde szomszédsági függvények és topogén struktúrák	
8. §. Ferde szomszédsági relációk. Egy ellenpélda	
IV. fejezet	
9. §. Definíciók. Főlimitációk és perfekt topogén rendezések	
10. §. Általános limitációk és rendezésszűrők	
11. §. A τ -ekvivalencia és a τ -maximalitás közvetlen jellemzése. Kiegészítések	
V. fejezet	
12. §. Pszeudo-topológiák és limitációk kapcsolatára vonatkozó legegyszerűbb eredmények	
13. §. Pszeudo-topológiák szintopogén jellemzése: Előkészítés	
14. §. Pszeudo-topológiák szintopogén jellemzése: A főeredmény	
Irodalom	
Jegyzetek	

Bevezetés

„Grundlagen der allgemeinen Topologie” című művében [3] CSÁSZÁR ÁKOS egységes tárgyalását adta a topologikus tér, az uniform tér és a szomszédsági tér fogalmának. Ez az egységes tárgyalás, illetve a topologikus tér fogalmának messzemenő általánosítása a tér folytonossági struktúrájának rendezési relációk révén történő megadásával, a szintopogén struktúra fogalmának bevezetésével vált lehetségessé.

Az utóbbi évek során az irodalomban vizsgálatot nyertek a topologikus tér, az uniform tér és a szomszédsági tér fogalmán kívül más folytonossági struktúra-féleségek is:

E-leképezések [8], szomszédsági függvények [1], limitációk [4], [11], és valamennyiüknél korábban pszeudo-topológiák és prae-topológiák [2].

* Jelen közlemény a dolgozat teljes tartalom- és irodalomjegyzékét, valamint I., II., III. fejezetét tartalmazza.

A jelen értekezés célja mármost az, hogy mindezeket a [3] monográfia 7. fejezetében foglalt alapvető vizsgálatok szellemében jellemezze, féltopogén és topogén rendezések, illetve ilyenekből alkotott megfelelő struktúrák segítségével.

Az értekezés öt fejezetből áll. Az első fejezet tárgya az HACQUE-féle „*E*-leképezés” és a féltopogén rendezés fogalmának ekvivalenciája, valamint néhány féltopogén rendezésre vonatkozó összefüggés. — A második fejezetben tárgyaljuk a „szomszédsági függvény” BANASCHEWSKITŐL és MARANDÁTÓL származó fogalmának a szimmetrikus topogén struktúra fogalmával való ekvivalenciáját, és alternatív bizonyítását adjuk BANASCHEWSKI és MARANDA szomszédsági függvények inverzére vonatkozó tételének. — A harmadik fejezet a szomszédsági függvény fogalmának egy „ferde” (aszimmetrikus) általánosításával foglalkozik.

A negyedik fejezet célja a „limitáció” KOWALSKYTÓL és FISCHERTŐL származó fogalmának jellemzése topogén rendezések segítségével. Itt legelőször a limitáció fogalmának egy fontos speciális esetével foglalkozunk, és megmutatjuk, hogy az ún. „főlimitáció” fogalma ekvivalens a perfekt topogén rendezés fogalmával. Az általános esetben a limitáció fogalmának szintopogén jellemzése a perfekt topogén rendezésekből alkotott szűrő fogalmával lehetséges. Hogy e rendezés-szűrők és a limitációk között kölcsönösen egyértelmű megfelelés adódjék, a szűrőkre nézve egy maximalitási feltételt kell kirónunk. E maximalitási feltételt (τ -maximalitás) utóbb közvetlenül, a limitációk és rendezés-szűrők közötti megfeleléstől függetlenül is jellemezzük.

Az értekezés utolsó, ötödik fejezetében a történetileg leghamarabb felmerült limesztér-fogalmat, G. CHOQUET pseudo-topológia fogalmát vizsgáljuk. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a pseudo-topológiák speciális limitációk, majd pedig szükséges és elegendő feltételt adunk meg arra nézve, hogy egy limitáció (illetve a neki megfelelő τ -maximális rendezés-szűrő) pseudo-topológia legyen. Ezekben a rendezés-szűrőkben természetes módon ki tudunk tüntetni maximális rendezéseket, és az említett szükséges és elegendő feltétel egy maximális rendezésekre vonatkozó „metszet-zártsági” követelmény formájában adódik.

Mindezen vizsgálatok a modern általános topológia nézőpontjainak egységesítését, valamint a szintopogén módszerek alkalmazási körének kiterjesztését szolgálják.

1. fejezet

1. §. Féltopogén rendezések és *E*-leképezések

A féltopogén rendezés fogalma alapvető szerepet játszik a [3] monográfiában kifejtett általános topológiai elméletben. Lényegében véve az egész elmélet különböző speciális tulajdonságokkal felruházott féltopogén rendezésekkel, illetve ilyen rendezésekből alkotott halmazokkal foglalkozik: a féltopogén rendezések mintegy az elmélet elemi építőköveit alkotják.

Értekezésünk jelen első fejezetének mármost az a célja, hogy a féltopogén rendezéseknek a [3] monográfia második fejezetében kifejtett elméletéhez néhány kiegészítést nyújtson. Evégből legelőször is definiáljuk a féltopogén rendezés fogalmát, majd az ún. *E*-leképezés MICHEL HACQUE francia matematikustól [10] származó fogalma segítségével a féltopogén rendezéseknek egy ekvivalens jellemzését adjuk.

1. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett féltopogén rendezésnek nevezzük egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(O1) \quad \emptyset < \emptyset, \quad E < E;$$

$$(O2) \quad A < B \Rightarrow A \subseteq B;$$

$$(O3) \quad A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B. \quad \blacksquare^1$$

Egy E halmazon értelmezett összes féltopogén rendezések halmaza parciálisan rendezetté tehető a következő megállapodás révén:

$< \subseteq <_1$ akkor és csak akkor, ha $A < B \Rightarrow A <_1 B$ tetszőleges $A, B \subseteq E$ részhalmazok esetén.

Az így definiált „ $\subseteq$ ” reláció természetesen nem más, mint az, amelyet a féltopogén rendezések halmazán a $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ szorzathalmaz tartalmazási relációja indukál.

E természetes parciális rendezés alapulvétele mellett egy E tér összes féltopogén rendezéseinek halmaza teljes hálót alkot. E háló $<_M$ egységeleme, illetve $<_m$ zéruseleme az

$$A <_M B \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

illetve az

$$A <_m B \Leftrightarrow (A = \emptyset \text{ és/vagy } B = E)$$

feltétel révén jellemezhető, tetszőleges uniók és metszetek viszont a megfelelő relációknak, mint $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ részhalmazainak uniója, illetve metszete révén vannak adva.

Mindezen állítások helyessége könnyen belátható akár közvetlenül, akár pedig a féltopogén rendezések és E -leképezések közötti most tárgyalandó megfelelés révén.

2. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges E halmaz esetén E -leképezésnek nevezzük egy $\varrho: \mathfrak{P}(E) \Rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ leképezést², ha teljesülnek rá a következő feltételek:

$$(E0) \quad \varrho(A) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Y \supseteq X \in \varrho(A) \Rightarrow Y \in \varrho(A);$$

$$(E1) \quad \varrho(\emptyset) = \mathfrak{P}(E);$$

$$(E2) \quad X \in \varrho(A) \Rightarrow A \subseteq X;$$

$$(E3) \quad A \subseteq B \Rightarrow \varrho(A) \supseteq \varrho(B). \quad \blacksquare$$

Az összes E -leképezések halmaza parciálisan rendezett halmazzá válik a

$$\varrho_1 \subseteq \varrho_2 \Leftrightarrow \varrho_1(X) \subseteq \varrho_2(X) \quad (X \subseteq E)$$

megállapodás révén.

¹ A $\blacksquare$ jel a szokásos módon a bizonyítások, illetve a bizonyításra nem szoruló állítások vagy definíciók végét jelenti. — A definíciókban szereplő feltételeknél, amennyiben azok az irodalomban már előfordultak, megtartjuk az eredeti előfordulási helyen használt számozást, illetve jelölést.

² Tehát a ϱ leképezés a tér minden egyes részhalmazához hozzárendeli a tér részhalmazainak egy osztályát.

E parciális rendezés alapulvétele mellett az összes E -leképezések halmaza teljes hálót alkot. E háló ϱ_M egységeleme, illetve ϱ_m zéruseleme a

$$\varrho_M(X) = \{Y | X \subseteq Y\} \quad (X \subseteq E),$$

illetve a

$$\varrho_m(\emptyset) = \mathbb{P}(E), \quad \varrho_m(X) = \{E\}, \quad \text{ha } X \neq \emptyset$$

feltétel révén jellemezhető, tetszőleges uniók és metszetek viszont az

$$(\cup \varrho_v)(X) = \cup \varrho_v(X), \quad \text{illetve a } (\cap \varrho_v)(X) = \cap \varrho_v(X)$$

formulával adhatók meg. (Könnyű belátni, hogy ϱ_M és ϱ_m , valamint a ϱ_v E -leképezésekkel együtt $\cup \varrho_v$ és $\cap \varrho_v$ is E -leképezések.)

A féltopogén rendezéseknek és az E -leképezéseknek eddig felsorolt tulajdonságai között nyilvánvaló a szoros analógia. Valójában a két fogalomalkotás ekvivalens egymással. Érvényes ugyanis a következő

1. TÉTEL. (1) Ha $a <$ reláció féltopogén rendezés az E halmazon, akkor a

$$\varrho_<(A) = \{X | A < X\}$$

megállapodás egy E -leképezést definiál.

(2) Ha ϱ egy E -leképezés, akkor az

$$A <_{\varrho} B \Leftrightarrow B \in \varrho(A)$$

megállapodás féltopogén rendezést definiál E -n.

(3) $< \rightarrow \varrho_<$ és $\varrho \rightarrow <_{\varrho}$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E tér összes féltopogén rendezései osztályának az összes E -leképezések osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.

*Bizonyítás.*³ Közvetlenül belátható, hogy a fentiekben definiált $\varrho_<$ valóban E -leképezés, $<_{\varrho}$ pedig féltopogén rendezés E -n.

Ugyancsak könnyen belátható a definíciók alapján, hogy ha $< = <_{\varrho}$, akkor $\varrho_< = \varrho$ vagyis, hogy $\varrho_{(\varrho_<)} = \varrho$, illetve az, hogy ha $\varrho = \varrho_<$, akkor $<_{\varrho} = <$, azaz $<_{(\varrho_<)} = <$. A rendezéstartás is világos. ■

A most bizonyított tétel alapján minden féltopogén rendezésekre vonatkozó eredménynek természetes módon megfelel egy E -leképezésekre vonatkozó eredmény és viszont. Az általánosság csorbitása nélkül szorítkozhatunk tehát a két fogalomalkotás közül az egyikre; a féltopogén rendezéseket választjuk és ezekre nézve bizonyítunk be a következő paragrafusban néhány eredményt.

2. §. Néhány eredmény féltopogén rendezésekre vonatkozólag

A relációk jól ismert szorzatfogalmát specializálva definiálhatjuk féltopogén rendezések szorzatát:

3. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett két féltopogén rendezés, $<_1$ és $<_2$, szorzatán a következőképpen értelmezett $<_1 <_2$ relációt értjük:

$$A <_1 <_2 B \Leftrightarrow A <_1 X <_2 B \quad \text{valamely } X \subseteq E\text{-re.}$$

³ Vö. a 7. tétel bizonyítását.

Könnyű belátni, hogy $<_1 <_2$ valóban féltopogén rendezés, vagyis teljesíti az (O1), (O2) és (O3) feltételeket.

Az (O3) feltétel révén azonnal adódik az egyszerű

2. TÉTEL. *Adott E halmazon értelmezett tetszőleges $<_1$ és $<_2$ féltopogén rendezések esetén $<_1 <_2 \subseteq <_1$ és $<_1 <_2 \subseteq <_2$. Speciálisan $<^2 \subseteq <$ bármely $<$ féltopogén rendezésre. $A <^2 = <$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $A < B$ -ből következik olyan C halmaz létezése, hogy $A < C < B$.* ■

4. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz részhalmazaiából alkotott halmazrendszeren az E halmaz részhalmazainak tetszőleges olyan osztályát értjük, amely tartalmazza az üres halmazt és E -t. ■

Mint ismeretes (v. ö. [3], 2. fejezet), minden σ halmazrendszer generál egy féltopogén rendezést:

$$A < B \Leftrightarrow A \subseteq S \subseteq B \text{ valamely } S \in \sigma\text{-ra.}$$

Másrészt tudjuk, hogy nem minden féltopogén rendezés generálható halmazrendszerrel (vö. [3], (2. 3)).

Arra nézve, hogy egy féltopogén rendezés halmazrendszerrel legyen generálható, szükséges és elegendő feltételt ad a következő

3. TÉTEL. (1) *Egy E halmazon adott tetszőleges $<$ féltopogén rendezés esetén*

$$\sigma_{<} = \{S \mid S < S\}$$

halmazrendszer, és ez a halmazrendszer egy olyan $<_1$ féltopogén rendezést generál, amelyre teljesül $<_1 \subseteq <$.

(2) *$A <$ féltopogén rendezés akkor és csak akkor generálható egy σ halmazrendszerrel, ha $<_1 = <$ és ekkor $\sigma = \sigma_{<}$.*

Bizonyítás. (1) $\emptyset \in \sigma_{<}$ és $E \in \sigma_{<}$ az (O1) feltétel szerint. Továbbá $A <_1 B$, vagyis $A \subseteq S \subseteq B$ ahol $S < S$, (O3) szerint maga után vonja, hogy $A < B$.

(2) Ha egy $<$ féltopogén rendezést egy σ halmazrendszer generál, akkor ez a σ egyértelműen meg van határozva⁴: $\sigma = \{S \mid S < S\} = \sigma_{<}$, és így $< = <_1$.

Fordítva, ha $< = <_1$, akkor a $<$ relációt a $\sigma_{<}$ rendszer generálja. ■

4. TÉTEL. *Ha egy $<$ féltopogén rendezést egy halmazrendszer generál, akkor ez a $<$ reláció idempotens: $< = <^2$.*

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy $<^2 = < \cdot < \subseteq <$. Másrészt $A < B$, vagyis $A \subseteq S \subseteq B$ ($S \in \sigma$) alapján nyilván következik $A < S < B$, vagyis $A <^2 B$.

A féltopogén rendezésekre kirótt különféle feltételek között fontos szerepet játszik a perfektségnak nevezett additivitási tulajdonság.

Egy $<$ féltopogén rendezést perfektnak nevezünk, ha teljesíti a következő feltételt:

$$(P) \quad A_i < B_i \ (i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i.$$

(Vö. [3], 4. fejezet.)

A perfekt féltopogén rendezéseket a következőképpen jellemezhetjük:

⁴ Vö. [3], (2. 1).

5. TÉTEL. Ahhoz, hogy egy E halmazon értelmezett $<$ féltopogén rendezés perfekt legyen, az alábbi két feltétel mindegyike szükséges és elegendő:

a) Tetszőleges $X, Y \subseteq E$ részhalmazok esetén $X < Y$ maga után vonja olyan legbővebb X -et tartalmazó X_M részhalmaz létezését, amelyre $X_M < Y$ még teljesül.

b) Tetszőleges $Y \subseteq E$ halmazhoz van olyan M halmaz, hogy $M < Y$ és minden $X < Y$ tulajdonságú X halmazra $X \subseteq M$.

Bizonyítás. Az a) feltétel szükséges: Valóban, $X < Y$ esetén legyen

$$\mathfrak{A} = \{A | X \subseteq A \text{ \& } A < Y\}.$$

Nilván $X \in \mathfrak{A}$ és $\bigcup \{A | A \in \mathfrak{A}\}$ lesz a kívánt X_M .

Az a) feltétel elegendő: Ha $A_i < B_i$ ($i \in I$), akkor az (03) feltétel révén adódik

$$\bigcap \{A_i | i \in I\} < \bigcup \{B_i | i \in I\}.$$

Legyen most X_M az a legbővebb $\bigcap \{A_i | i \in I\}$ -t tartalmazó halmaz, amelyre még teljesül

$$X_M < \bigcup \{B_i | i \in I\}.$$

X_M legnagyobb volta és $A_i < \bigcup \{B_i | i \in I\}$ alapján $A_i \subseteq X_M$ ($i \in I$), és így

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X_M < \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i.$$

A b) feltétel szükséges: (P) alapján nyilvánvaló, hogy az $M = \bigcup \{A | A < Y\}$ halmaznak megvan a kívánt tulajdonsága.

A b) feltétel elegendő: Valóban, legyen $A_i < B_i$ ($i \in I$). Ekkor (03) szerint $A_i < B = \bigcup \{B_i | i \in I\}$ tetszőleges $i \in I$ -re. Ha most tekintjük a B -hez feltevés szerint tartozó M -et, akkor nyilván teljesül

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M < \bigcup_{i \in I} B_i,$$

és így $\bigcup \{A_i | i \in I\} < \bigcup \{B_i | i \in I\}$. ■

Egy $<$ féltopogén rendezést koperfektnak nevezünk, ha a $<^c$ komplementér reláció perfekt. (Definíció szerint $A <^c B \Leftrightarrow E - B < E - A$.)

Könnyű belátni, hogy egy $<$ féltopogén rendezés akkor és csak akkor koperfekt, ha teljesül

$$A_i < B_i \ (i \in I) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i < \bigcap_{i \in I} B_i.$$

Az előző tételből, amely a koperfekt féltopogén rendezések komplementérjeit jellemzi, azonnal adódik a következő

5a. TÉTEL. Ahhoz, hogy egy E halmazon értelmezett $<$ féltopogén rendezés koperfekt legyen, az alábbi két feltétel mindegyike szükséges és elegendő:

a) Tetszőleges $X, Y \subseteq E$ részhalmazok esetén $X < Y$ maga után vonja Y olyan legszűkebb Y_m részhalmazának létezését, amelyre $X < Y_m$ még teljesül.

b) Tetszőleges $Y \subseteq E$ halmazhoz van olyan K halmaz, hogy $Y < K$ és minden $Y < X$ tulajdonságú X halmazra $K \subseteq X$. ■

Az eddigiek során tárgyalt fogalmak között figyelemre méltó összefüggést állapít meg a következő

6. TÉTEL. Egy perfekt vagy koperfekt féltopogén rendezés akkor és csak akkor idempotens, ha halmazrendszer által van generálva.

Bizonyítás. Mivel a 4. tétel szerint halmazrendszerrel generált féltopogén rendezés mindig idempotens, elég lesz azt megmutatni, hogy ha egy perfekt vagy koperfekt féltopogén rendezés idempotens, akkor halmazrendszerrel generálható.

Legyen tehát $<$ egy perfekt, idempotens féltopogén rendezés. Ha $X < Y$, akkor létezik legnagyobb X_M , amelyre $X \subseteq X_M < Y$. Mivel $<$ idempotens, van olyan Z halmaz, hogy $X_M < Z < Y$. Innen X_M „legnagyobb” volta miatt $X_M = Z$ következik. Ezek szerint $X_M < X_M$, vagyis $X_M \in \sigma_<$. Látjuk, hogy $X < Y$ maga után vonja $X \subseteq X_M \subseteq Y$ ($X_M \in \sigma_<$) teljesülését, azaz $X < Y \Rightarrow X <_1 Y$. Így $< \subseteq <_1$, és ebből a 3. tétel szerint $< = <_1$ következik.

Legyen most $<$ koperfekt idempotens féltopogén rendezés. Ha $X < Y$, akkor létezik legkisebb Y_m , amelyre $X < Y_m \subseteq Y$. Mivel $<$ idempotens, van olyan Z , hogy $X < Z < Y_m$. Innen Y_m „legkisebb” volta miatt $Z = Y_m$ adódik. Így $Y_m < Y_m$, vagyis $Y_m \in \sigma_<$. Látjuk, hogy

$$X < Y \Rightarrow X \subseteq Y_m \subseteq Y \quad (Y_m \in \sigma_<)$$

és így $< = <_1$. ■

MEGJEGYZÉSEK. 1) A bizonyítás során az X_M halmaz „legnagyobb” volta helyett („ X_M tartalmaz minden olyan A halmazt, amelyre $X \subseteq A < Y$ ”), elegendő csupán arra hivatkozni, hogy X_M maximális (vagyis; hogy X_M nincs valódi részhalmazként tartalmazva olyan A halmazban, amelyre $X \subseteq A < Y$).

Hasonlóképpen, Y_m „legkisebb” volta helyett már minimalitása elegendő.

2) Ha a $<$ féltopogén rendezés szimmetrikus, vagyis $< = <^c$ azaz $A < B \Leftrightarrow B < A$, akkor az 5. és 5a. tételekben foglalt feltételek természetesen ekvivalensek (és teljesülésük esetén $<$ biperfekt topogén rendezés. Vö. [3], 5. fejezet).

3) Ha az E halmaz végtelen, akkor van E -n legalább egy olyan idempotens féltopogén rendezés, amely nem generálható halmazrendszerrel. Valóban, legyen $X < Y$ akkor és csak akkor, ha $X = \emptyset$ vagy $Y = E$ vagy pedig $X \subseteq Y$ és $Y - X$ végtelen.⁵

Könnyű belátni, hogy ez idempotens féltopogén rendezés, valamint azt is, hogy nem generálható halmazrendszerrel: $S < S$ nem lehetséges $\emptyset \neq S \neq E$ esetén.

4) Ha az E halmaz legalább három elemből áll, akkor megadható rajta nem-idempotens és így halmazrendszerrel nem generálható féltopogén rendezés. Valóban, legyen $\emptyset < X$ tetszőleges $X \subseteq E$ -re, és legyen $E < E$, valamint $\emptyset \neq X \neq E$ esetén legyen $X < Y \Leftrightarrow X \subset Y$. Könnyű belátni, hogy az így definiált $<$ reláció a kívánt tulajdonságokkal rendelkező féltopogén rendezés.

II. fejezet

3. §. Szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák

A szomszédsági függvény fogalmát BANASCHEWSKI és MARANDA vezették be [1] dolgozatukban, a következőképpen:

5. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett szomszédsági függvényen az E halmaz részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ osztályát az E -n definiált szűrők $\Phi(E)$ osztályába⁶

⁵ Vagyis: $X < Y$ akkor és csak akkor, ha a három feltétel közül legalább az egyik teljesül.

⁶ Szűrőnek tekintjük és $\Phi(E)$ elemeihez soroljuk $\mathfrak{P}(E)$ -t is (improprius szűrő).

leképező olyan α függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(A1) \quad B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A;$$

$$(A2) \quad A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B);$$

$$(A3) \quad B \in \alpha(A) \Rightarrow E - A \in \alpha(E - B);$$

$$(A4) \quad \text{Ha } B \in \alpha(A), \text{ akkor van olyan } C, \text{ hogy } B \in \alpha(C) \text{ és } C \in \alpha(A). \blacksquare$$

Egy E halmazon értelmezett szomszédsági függvények osztálya parciálisan rendezett halmazzá válik a következő megállapodás révén:

$$\alpha \subseteq \alpha' \Leftrightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha'(A) \text{ tetszőleges } A \subseteq E\text{-re.}$$

Vezessük most be a szimmetrikus topogén struktúra fogalmát:

6. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett szimmetrikus topogén struktúrának nevezzük egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(01) \quad \emptyset < \emptyset, E < E;$$

$$(02) \quad A < B \Rightarrow A \subseteq B;$$

$$(03) \quad A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B;$$

$$(S) \quad A < B \Rightarrow E - B < E - A;$$

$$(Q'') \quad \left. \begin{array}{l} A < B \\ A' < B' \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup A' < B \cup B';$$

$$(7.9) \quad \text{Ha } A < B, \text{ akkor van olyan } C, \text{ hogy } A < C < B. \blacksquare$$

Megjegyzés. (S)-ből és (Q'')-ből következik

$$(Q') \quad \left. \begin{array}{l} A < B \\ A' < B' \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap A' < B \cap B'.$$

Hasonlóképpen, (S)-ből és (Q')-ből következik (Q''), tehát a definícióban (Q'')-t (Q')-vel lehet helyettesíteni. $\blacksquare$

A definíció alapján világos, hogy a szimmetrikus topogén struktúrák úgy tekinthetők, mint speciális féltopogén rendezések. — Nyilvánvaló, hogy egy E halmazon definiált szimmetrikus topogén struktúrák halmaza parciálisan rendezetté válik a féltopogén rendezésekre bevezetett rendezési reláció révén.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az előbbieken bevezetett két fogalomalkotás egymással ekvivalens:

7. TÉTEL. (1) Ha $<$ az E halmazon definiált szimmetrikus topogén struktúra, akkor az E részhalmazain az

$$\alpha_{<}(A) = \{X \mid A < X\}$$

feltétellel definiált $\alpha_{<}$ függvény szomszédsági függvény E -n.

(2) Ha α szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között

$$A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$$

révén definiált $<_{\alpha}$ reláció szimmetrikus topogén struktúra E -n.

(3) $< \rightarrow \alpha_{\leq}$ és $\alpha \rightarrow <_{\alpha}$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E -n értelmezett szimmetrikus topogén struktúrák osztályának az E fölötti szomszédsági függvények osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.

Bizonyítás. Az (03) és (Q') feltételek alapján könnyű belátni, hogy

$$\alpha_{\leq}(A) = \{X | A < X\}$$

tetszőleges $A \subseteq E$ esetén szűrő. Ez a szűrő teljesíti az (A1)–(A4) feltételeket. Valóban, ha $B \in \alpha_{\leq}(A)$, vagyis $A < B$, akkor (02) szerint $A \subseteq B$, tehát teljesül (A1).

Legyen most $A \subseteq B$ és $C \in \alpha_{\leq}(B)$, vagyis $B < C$. Az (03) feltétel szerint $A \subseteq B < C \Rightarrow A < C$, tehát $C \in \alpha_{\leq}(A)$. Ezek szerint $\alpha_{\leq}(A) \supseteq \alpha_{\leq}(B)$, vagyis teljesül (A2).

Ami (A3)-at illeti, $B \in \alpha_{\leq}(A) \Leftrightarrow A < B \Leftrightarrow E - B < E - A \Leftrightarrow E - A \in \alpha_{\leq}(E - B)$.

Végül, ha $B \in \alpha_{\leq}(A)$, vagyis $A < B$, akkor (7.9) szerint van olyan C , hogy $A < C < B$, vagyis, hogy $B \in \alpha_{\leq}(C)$ és $C \in \alpha_{\leq}(A)$. Ezzel bebizonyítottuk (A4)-et is.

(2) (01): Nyilván teljesül $E \in \alpha(E)$, tehát érvényes $E <_{\alpha} E$. Az (A3) feltételből most már következik $\supset \in \alpha(\emptyset)$, vagyis $\emptyset <_{\alpha} \emptyset$.

(02): $A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \Rightarrow A \subseteq B$ az (A1) feltétel szerint.

(03): Legyen $A \subseteq A' <_{\alpha} B' \subseteq B$. Ekkor $B \supseteq B' \in \alpha(A') \subseteq \alpha(A)$ és következésképpen $B \in \alpha(A)$, vagyis $A <_{\alpha} B$.

(S): $A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$ és $E - B <_{\alpha} E - A \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$. Így az (S) szimetriatulajdonság (A3)-ból következik.

(Q'') bizonyítása végett először is megjegyezzük, hogy

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B).$$

Valóban, $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$ az (A2) feltétel alapján. Fordítva, ha $X \in \alpha(A) \cap \alpha(B)$, akkor (A3) szerint $E - A \in \alpha(E - X)$ és $E - B \in \alpha(E - X)$, tehát $E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B) \in \alpha(E - X)$, és így, ismét csak (A3) szerint, $X \in \alpha(A \cup B)$.

Ha most már $A <_{\alpha} B$ és $A' <_{\alpha} B'$, vagyis $B \in \alpha(A)$ és $B' \in \alpha(A')$, akkor $B \cup B' \in \alpha(A) \cap \alpha(A') = \alpha(A \cup A')$, vagyis $A \cup A' <_{\alpha} B \cup B'$.

A (7.9) interpolációs tulajdonság (A4)-ből következik:

Ha $A <_{\alpha} B$ vagyis $B \in \alpha(A)$, akkor van olyan C , hogy $B \in \alpha(C)$ és $C \in \alpha(A)$, vagyis $C <_{\alpha} B$ és $A <_{\alpha} C$.

(3) Tekintsük a $< \rightarrow \alpha_{\leq}$ és $\alpha \rightarrow <_{\alpha}$ leképezéseket. Ha $\alpha = \alpha_{\leq}$, akkor $<_{\alpha} = <$. Valóban, $A <_{\alpha} B$ azt jelenti, hogy $B \in \alpha(A)$, és $\alpha = \alpha_{\leq}$ esetén $A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha_{\leq}(A) \Leftrightarrow A < B$.

Legyen másrészt $\alpha \rightarrow <_{\alpha}$ és $< \rightarrow \alpha_{\leq}$. Ha $< = <_{\alpha}$, akkor $\alpha_{\leq} = \alpha$. Valóban,

$$\alpha_{\leq}(A) = \{X | A < X\},$$

és $< = <_{\alpha}$ esetén adódik

$$\alpha_{\leq}(A) = \{X | A <_{\alpha} X\} = \{X | X \in \alpha(A)\} = \alpha(A).$$

Rendezéstartás: Legyen $\alpha \subseteq \alpha_1$, vagyis $\alpha(A) \subseteq \alpha_1(A)$ tetszőleges $A \subseteq E$ -re. Ekkor $<_{\alpha} \subseteq <_{\alpha_1}$. Valóban,

$$A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \Rightarrow B \in \alpha_1(A) \Leftrightarrow A <_{\alpha_1} B.$$

Másrészt, ha $\alpha < \subseteq \alpha_1$, akkor $\alpha < \subseteq \alpha_1$. Valóban,

$$B \in \alpha_1(A) \Leftrightarrow A < B \Rightarrow A <_1 B \Leftrightarrow B \in \alpha_1(A). \blacksquare$$

A most bizonyított tételből, valamint a szomszédsági relációknak a [3] monográfia 7. fejezetében adott jellemzéséből következik a szomszédsági függvény és a szomszédsági tér fogalmának ekvivalenciája. Ezt az utóbbi ekvivalenciát közvetlenül is be lehet bizonyítani. (Vö. [1].)

4. §. Egy kompatibilitási fogalom. Szomszédsági függvény inverze

A [3] monográfia 6. fejezetében bevezetést nyert egy $<$ féltopogén rendezés $f^{-1}(<)$ inverz képének a fogalma. E fogalomnak, valamint a szimmetrikus topogén struktúrák és szomszédsági függvények közötti megfelelésnek a segítségével értelmezhetjük egy α szomszédsági függvény $f^{-1}(\alpha)$ inverzét, mint azt a szomszédsági függvényt, amely az α -nak megfelelő $<$ szimmetrikus topogén struktúra $f^{-1}(<)$ inverzéhez tartozik. A szomszédsági függvény inverz képére ilyen módon nyert definíció megegyezik azzal, amelyet BANASCHEWSKI és MARANDA [1] dolgozatukban adnak. Szomszédsági függvények inverz képének tárgyalásánál a megfelelő szimmetrikus topogén struktúra inverz képére való visszavezetés előnyösen alkalmazható.

Annak érdekében, hogy a fentebb vázolt megfontolásokat részletesen végrehajthassuk, mindenekelőtt be kell vezetnünk egy kompatibilitási fogalmat:

7. DEFINÍCIÓ. Egy az E halmazon értelmezett $<$ topogén struktúrát⁷ az E -nek egy E' halmazba való f leképezésével kompatibilisnek nevezünk, ha $f(x) = f(y)$ -ből következik, hogy tetszőleges $X \subseteq E$ -re $\{x\} < X \Leftrightarrow \{y\} < X$. ■

8. TÉTEL. Ha az E halmazon értelmezett $<$ topogén struktúra kompatibilis az E -nek E' -be való f leképezésével, akkor

$$A < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < X$$

tetszőleges $A, X \subseteq E$ esetén.

Bizonyítás. Az (03) feltétel szerint $A < X$ -ből következik $\{a\} < X$ tetszőleges $a \in A$ -ra. Legyen most $x \in f^{-1}(f(A))$. Akkor $f(x) = f(a_0)$ valamely $a_0 \in A$ -ra, és $\{a_0\} < X$ -ből következik $\{x\} < X$. Ezek szerint $A < X$ -ből következik $\{x\} < X$, ha csak $x \in f^{-1}(f(A))$, innen viszont $f^{-1}(f(A)) \subseteq X$ adódik. Ezek szerint

$$(*) \quad A < X < H \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < H.$$

Mármost (7.9) szerint $A < X$ -ből következik $A < K < X$ valamely K -ra, és így $(*)$ felhasználásával adódik $f^{-1}(f(A)) < X$. (Fordítva viszont, ha $f^{-1}(f(A)) < X$, akkor $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ miatt természetesen $A < X$.) ■

MEGJEGYZÉSEK. 1. A kompatibilitásnak a 8. tételben foglalt következménye valójában ekvivalens a kompatibilitást definiáló feltétellel. Teljesüljön ugyanis

$$A < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < X.$$

⁷ Topogén struktúra alatt olyan topogén rendezést értünk, amely eleget tesz a (7.9) interpolációs feltételnek. Másszóval: Ha a 6. definícióban az (S) feltételt a (Q') feltétellel helyettesítjük, a topogén struktúra definícióját kapjuk. (Vö. 7. §.)

Ha most $f(x)=f(y)$ és $\{x\} < X$, akkor $f^{-1}(f(x)) < X$, és így $y \in f^{-1}(f(x))$, valamint (03) miatt $\{y\} < X$.

2. A 8. tételben foglalt implikáció ekvivalens még a formálisan gyengébb

$$A < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq X$$

feltétellel is, amint ezt (7. 9) és (03) felhasználásával könnyen be lehet látni: $A < X \Rightarrow A < K < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq K < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < X$. ■

Ezek szerint a 7. definícióval bevezetett kompatibilitási fogalom nem más, mint a [3] monográfia 9. fejezetében bevezetett kompatibilitás topogén struktúrákra vonatkozó speciális esete. (Vö. [3], (9. 26).)

9. TÉTEL.⁸ Legyen adva az E halmaznak egy f leképezése az E' halmazra. Ha $<$ az E halmazon definiált és az f leképezéssel kompatibilis szimmetrikus topogén struktúra, akkor az E' halmazon az $A' <' B' \Leftrightarrow f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$ feltétellel definiált $<'$ reláció szimmetrikus topogén struktúra és $< = f^{-1}(<')$.

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy $<'$ szimmetrikus topogén struktúra. Valóban, ha $A' <' B'$, vagyis $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$, akkor $f^{-1}(A') < C < f^{-1}(B')$ valamely $C \subseteq E$ -re. Az (03) feltétel és a 8. tétel szerint $f^{-1}(A') < f^{-1}(f(C)) < f^{-1}(B')$, vagyis $A' <' f(C) <' B'$. Ez azt mutatja, hogy $<'$ eleget tesz a (7. 9) feltételnek. Ami a 6. definícióban foglalt többi feltétel teljesülését illeti, ez bizonyítást nyert a [3] monográfia 6. fejezetében. (Vö. [3], (6. 30)–(6. 34).)

Vezessük be most ideiglenesen a $<* = f^{-1}(<')$ jelölést. Ekkor $A <* B$ azt jelenti, hogy $f(A) <' E' - f(E - B)$, vagyis, hogy

$$f^{-1}(f(A)) < f^{-1}(E' - f(E - B)),$$

azaz

$$f^{-1}(f(A)) < E - f^{-1}(f(E - B)).$$

Innen (03) alapján következik $A < E - f^{-1}(f(E - B))$, és (S) és (03) révén adódik

$$f^{-1}(f(E - B)) < E - A \Rightarrow E - B < E - A \Rightarrow A < B.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $A <* B \Rightarrow A < B$. Ha most ennek a meggondolásnak az egyes lépésein fordított irányban haladunk végig⁹, a fordított implikáció bizonyítását kapjuk. ■

Jelöljük most $\Pi(E)$ -vel az E halmazon definiált összes szomszédsági függvények halmazát. A szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák közötti kölcsönösen egyértelmű kapcsolat segítségével fogjuk vizsgálni azt az összefüggést, amely $\Pi(E)$ és $\Pi(E')$ között E -nek E' -be való adott f leképezése esetén létesül.

Legyen $\alpha' \in \Pi(E')$. A megfelelő $<_{\alpha'} = <'$ szimmetrikus topogén struktúra $A' <' B' \Leftrightarrow B' \in \alpha'(A')$ révén van definiálva. Ha most f az E -t E' -be képezi le, akkor az E' -n értelmezett $<'$ -nek megfelel E -n egy $f^{-1}(<') = <$ reláció (vö. [3], (6. 1)):

$$A < B \Leftrightarrow f(A) <' E' - f(E - B),$$

azaz

$$A < B \Leftrightarrow E' - f(E - B) \in \alpha'[f(A)].$$

⁸ Vö. [3], 6. és 9. fejezet. — Az előbbi megjegyzés értelmében ez a tétel a [3] monográfia (9. 29) tételének speciális esete. Teljesség kedvéért részletes bizonyítását adjuk, amely nem használja fel a szintopogén struktúrák általános elméletét, hanem csupán a [3] monográfia első hat fejezetében foglaltakat.

⁹ Eközben (03) helyett a megfelelő helyeken a 8. tételre kell hivatkozni.

Ez a $<$ reláció szimmetrikus topogén struktúra E -n (vö. [3], 107. o.), és így létezik E -n a megfelelő $\alpha_{<} = \alpha$ szomszédsági függvény, amely

$$\alpha(A) = \alpha_{<}(A) = \{X | A < X\},$$

vagyis

$$\alpha(A) = \{X | E' - f(E - X) \in \alpha'[f(A)]\}$$

révén van definiálva. Ezt a szomszédsági függvényt nevezzük az α szomszédsági függvény f leképezés szerinti inverzének. Jelölve: $\alpha = f^{-1}(\alpha')$.

Szomszédsági függvény inverzének fontos tulajdonságát juttatja kifejezésre a következő

10. TÉTEL. Legyen f az E halmaznak E' -be való leképezése, és legyen $\alpha' \in \Pi(E')$, valamint $\alpha = f^{-1}(\alpha')$. Ekkor tetszőleges $A \subseteq E$ esetén az $\alpha(A)$ szűrőt $f^{-1}\{\alpha'[f(A)]\}$ generálja.

Bizonyítás. Ha $X \in \alpha(A)$, akkor

$$X \supseteq f^{-1}[E' - f(E - X)] \in f^{-1}\{\alpha'[f(A)]\}.$$

Másképp, ha $H = f^{-1}(H')$, ahol $H' \in \alpha'[f(A)]$, akkor $f(E - H) \cap H' = \emptyset$. Így

$$E' - f(E - H) \supseteq H' \in \alpha'[f(A)],$$

tehát $H \in \alpha(A)$. ■

A következő két tétel érvénye azonnal világos:

11. TÉTEL. Szomszédsági függvények és egy f leképezés szerinti inverzeik között a megfelelés rendezéstartó, vagyis ha $\alpha'_1 \subseteq \alpha'_2$ az E' halmazon, akkor $f^{-1}(\alpha'_1) \subseteq f^{-1}(\alpha'_2)$ az E -n. ■

12. TÉTEL. Azok az E fölötti α szomszédsági függvények, amelyek egy f leképezésre vonatkozó inverz képek, kompatibilisak az

$$R_f = \{(x, y) | f(x) = f(y); x, y \in E\}$$

ekvivalenciarelációval abban az értelemben, hogy

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \alpha(\{x\}) = \alpha(\{y\}). \quad \blacksquare$$

13. TÉTEL. Ha f az E halmaznak az E' halmazra való leképezése, akkor az E' fölötti α' szomszédsági függvények és E fölötti $\alpha = f^{-1}(\alpha')$ inverzeik között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, amelynek révén $\Pi(E')$ az R_f relációval kompatibilis $\alpha \in \Pi(E)$ -k halmazára képeződik le.

Bizonyítás. Az, hogy f^{-1} révén $\Pi(E')$ kölcsönösen egyértelmű módon képeződik le $\Pi(E)$ -be, közvetlen folyománya annak, hogy (az egész) E' -re történő leképezés esetén a megfelelő szimmetrikus topogén struktúrák közötti kapcsolat kölcsönösen egyértelmű (vö. [3], (6. 5)).

Már rámutattunk, hogy szomszédsági függvénynek egy f leképezésre vonatkozó inverze mindig kompatibilis az R_f relációval. Csak azt kell még megmutatni, hogy bármely R_f -fel kompatibilis $\alpha \in \Pi(E)$ esetén van olyan $\alpha' \in \Pi(E')$, hogy $f^{-1}(\alpha') = \alpha$, ez azonban közvetlen folyománya a 9. tételnek. ■

A 10—13. tételek együttevén BANASCHEWSKI és MARANDA szomszédsági függvények inverzére vonatkozó eredményét adják.

III. fejezet

5. §. Ferde szomszédsági függvények és szomszédsági függvények

Egy komplex szám akkor és csak akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ebben a paragrafusban hasonló jellemzést adjuk a szomszédsági függvényeknek egy általánosabb fogalom, az ún. ferde szomszédsági függvény segítségével. Ez utóbbit a következőképpen definiáljuk:

8. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett ferde szomszédsági függvényen az E halmaz részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ osztályát az E -n definiált szűrők $\Phi(E)$ osztályába leképező olyan α függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(S0) \quad \emptyset \in \alpha(\emptyset);$$

$$(S1) \quad B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A;$$

$$(S2) \quad \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B);$$

$$(S3) \quad \text{Ha } B \in \alpha(A), \text{ akkor van olyan } C, \text{ hogy } B \in \alpha(C) \text{ és } C \in \alpha(A).$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. A következő példa azt mutatja, hogy (S0) nem vezethető le a többi feltételből:

Legyen $\emptyset \neq T \subseteq E$ és $X \in \alpha(A) \Leftrightarrow A \cup T \subseteq X$. Ekkor az (S1), (S2) és (S3) feltételek teljesülnek, de (S0) nem teljesül.

2. $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B)$. Valóban, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, és akkor (S2) szerint $\alpha(B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$, tehát $\alpha(A) \supseteq \alpha(B)$. ■

9. DEFINÍCIÓ. Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor azt a $\mathfrak{P}(E)$ -t $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ -be leképező $\bar{\alpha}$ függvényt, amely a

$$(C) \quad B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$$

feltétel révén van adva, az α függvény konjugáltjának nevezzük. ■

A definíció jogosultságát alátámasztja a következő

14. TÉTEL. Egy E halmaz fölötti α ferde szomszédsági függvény $\bar{\alpha}$ konjugáltja maga is ferde szomszédsági függvény.

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy $\bar{\alpha}(A)$ szűrő, tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Az $\bar{\alpha}(A)$ osztály mindenestre nem üres. Valóban, (S0) szerint $\alpha(\emptyset) = \mathfrak{P}(E)$, és így $E \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(\emptyset)$ érvényes tetszőleges $A \subseteq E$ -re. Továbbá

$$B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$$

$$\text{és} \quad C \supseteq B \Leftrightarrow E - B \supseteq E - C \Rightarrow \alpha(E - B) \subseteq \alpha(E - C)$$

alapján következik

$$E - A \in \alpha(E - C) \Leftrightarrow C \in \bar{\alpha}(A).$$

Másrészt

$$\left. \begin{array}{l} B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B) \\ C \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - C) \end{array} \right\} \Rightarrow E - A \in \alpha(E - B) \cap \alpha(E - C) = \\ = \alpha[(E - B) \cup (E - C)] = \alpha[E - (B \cap C)],$$

vagyis

$$E - A \in \alpha[E - (B \cap C)] \Leftrightarrow B \cap C \in \bar{\alpha}(A).$$

Ellenőrizzük most a 8. definíció feltételeinek teljesülését¹⁰:

$$(\overline{S0}): \emptyset \in \bar{\alpha}(\emptyset) \Leftrightarrow E \in \alpha(E).$$

$$(\overline{S1}): B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B) \Rightarrow E - A \supseteq E - B \Leftrightarrow B \supseteq A.$$

(S2): Az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:

$$C \in \bar{\alpha}(A \cup B),$$

$$E - (A \cup B) \in \alpha(E - C),$$

$$(E - A) \cap (E - B) \in \alpha(E - C),$$

$$E - A \in \alpha(E - C) \& E - B \in \alpha(E - C),$$

$$C \in \bar{\alpha}(A) \& C \in \bar{\alpha}(B),$$

$$C \in \bar{\alpha}(A) \cap \bar{\alpha}(B).$$

(S3): Legyen $B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$.

Ekkor (S3) szerint van olyan $E - C$ halmaz, hogy $E - A \in \alpha(E - C)$ és $E - C \in \alpha(E - B)$, vagyis, hogy $B \in \bar{\alpha}(C)$ és $C \in \bar{\alpha}(A)$. ■

A konjugált függvény definíciójában szereplő (C) feltétel közvetlen folyományaként adódik a

15. TÉTEL. Egy E halmaz fölötti tetszőleges ferde szomszédsági függvény esetén $\bar{\alpha} = \alpha$. ■

Most már meg tudjuk adni szomszédsági függvényeknek ferde szomszédsági függvények segítségével történő ama jellemzését, amelyet bevezetőben említettünk.

Mindenekelőtt könnyű belátni, hogy egy szomszédsági függvény mindig ferde szomszédsági függvény: (S0) az (A3) feltétel révén adódik $E \in \alpha(E)$ -ből, azt is megmutattuk már, hogy (S2) teljesül (vö. 169. o.), és (S1) = (A1), (S3) = (A4).

Másrészt viszont, mivel egy ferde szomszédsági függvény mindig teljesíti az (A1), (A2) és (A4) feltételeket¹¹ (vö. 173. o., 2.) megjegyzés), pontosan akkor lesz szomszédsági függvény, ha még (A3)-at is teljesíti. (A3) és (C) összehasonlítása révén most már adódik a

16. TÉTEL. Egy α ferde szomszédsági függvény akkor és csak akkor szomszédsági függvény, ha $\alpha = \bar{\alpha}$. ■

¹⁰ Ha (K) az α -ra kirótt feltétel, akkor a megfelelő $\bar{\alpha}$ -ra vonatkozó feltételt $(\bar{K})$ -sal jelöljük.

¹¹ A szomszédsági függvény fogalmának „ferde” általánosítására a legegyszerűbb lehetőség volna az (A3) feltételt az 5. definícióból elhagyni, és a ferde szomszédsági függvényeket a fennmaradó (A1), (A2) és (A4) feltételekkel definiálni. E definíció alapulvétele mellett azonban nem sikerülne a 14. tételt bizonyítani, ti. nem tudnánk megmutatni azt, hogy $\bar{\alpha}(A)$ két halmazzal együtt azok metszetét is tartalmazza.

6. §. Ferde szomszédsági függvényekre vonatkozó néhány további eredmény

Jelöljük egy E téren adott összes ferde szomszédsági függvények halmazát $\pi(E)$ -vel. A jól ismert $\alpha \subseteq \alpha' \Leftrightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha'(A)$ ($A \subseteq E$) megállapodás révén a $\pi(E)$ halmaz parciálisan rendezetté válik. E parciális rendezésre vonatkozólag a konjugált képzésének művelete izoton:

17. TÉTEL. $\alpha \subseteq \alpha' \Rightarrow \bar{\alpha} \subseteq \bar{\alpha}'$.

Bizonyítás.

$$X \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - X) \Rightarrow E - A \in \alpha'(E - X) \Leftrightarrow X \in \bar{\alpha}'(A). \blacksquare$$

A most következő vizsgálatokban alapvető szerepe lesz a következő inkompatibilitási fogalomnak:

10. DEFINÍCIÓ. Két halmazrendszert, α -t és β -t, inkompatibilisnak nevezünk, ha van olyan $A \in \alpha$ és $B \in \beta$, hogy $A \cap B = \emptyset$. Jelölve: $\alpha \Delta \beta$. $\blacksquare$

MEGJEGYZÉS. Két szűrő pontosan akkor inkompatibilis, ha a legszűkebb mindkettőjüket tartalmazó szűrő egyenlő $\mathfrak{P}(E)$ -vel, a tér improprius szűrőjével. $\blacksquare$

Az [1] dolgozatban bizonyítást nyert, hogy a szomszédsági függvény definíciójában szereplő (A2), (A3) és (A4) feltételeket az egyetlen

$$(A5) \quad \alpha(A) \Delta [B] \Rightarrow \alpha(A) \Delta \alpha(B)$$

feltétellel lehet helyettesíteni.¹²

A következő két tétel azzal a feltételpárral foglalkozik, amely ferde szomszédsági függvények esetén megfelel (A5)-nek.

18. TÉTEL. Egy E halmaz fölötti tetszőleges α ferde szomszédsági függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(D) \quad \alpha(A) \Delta [B] \Rightarrow \alpha(A) \Delta \bar{\alpha}(B),$$

$$(\bar{D}) \quad \bar{\alpha}(A) \Delta [B] \Rightarrow \bar{\alpha}(A) \Delta \alpha(B).^{13}$$

Bizonyítás. Legyen α ferde szomszédsági függvény, és tegyük fel, hogy $\alpha(A) \Delta [B]$, vagyis, hogy $X \cap B = \emptyset$ valamely $X \in \alpha(A)$ -ra. (S3) szerint $X \in \alpha(Y)$ és $Y \in \alpha(A)$ valamely $Y \subseteq E$ -re. Mármint $X \in \alpha(Y) \Leftrightarrow E - Y \in \bar{\alpha}(E - X)$ és $B \cap X = \emptyset \Rightarrow B \subseteq E - X \Rightarrow \bar{\alpha}(B) \supseteq \bar{\alpha}(E - X)$ alapján adódik $E - Y \in \bar{\alpha}(B)$.

Ezek szerint $Y \in \alpha(A)$ és $E - Y \in \bar{\alpha}(B)$, vagyis $\alpha(A)$ és $\bar{\alpha}(B)$ inkompatibilis. Ezzel bebizonyítottuk (D)-t, és $(\bar{D})$ most már a 14. és 15. tételek alapján következik. $\blacksquare$

(D) és $(\bar{D})$ együtt helyettesíthetik a ferde szomszédsági függvény definíciójában szereplő feltételek egy részét. Lényegében véve ezt mondja ki a következő

¹² Itt $[B] = \{X \mid B \subseteq X \subseteq E\}$, vagyis $[B]$ a B halmaz által generált „főszűrő”.

¹³ (D) és $(\bar{D})$ helyett azt írhatnánk, hogy

$$\beta(A) \Delta [B] \Rightarrow \beta(A) \Delta \bar{\beta}(B), \quad \beta = \alpha, \bar{\alpha}.$$

19. TÉTEL. Legyen $\alpha \mathfrak{P}(E)$ -nek $\Phi(E)$ -be való leképezése, amely teljesíti a következő feltételeket:

$$(S0) \quad \emptyset \in \alpha(\emptyset);$$

$$(S1) \quad B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A;$$

$$(S2') \quad \alpha(A) \cap \alpha(B) \subseteq \alpha(A \cup B).$$

Legyen továbbá az $\bar{\alpha}: \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ leképezés a

$$(C) \quad B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$$

feltétellel definiálva. Ha most még teljesülnek a

$$(D) \quad \alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(B)$$

és

$$(\overline{D}) \quad \bar{\alpha}(A) \triangle [B] \Rightarrow \bar{\alpha}(A) \triangle \alpha(B)$$

feltételek, akkor α és $\bar{\alpha}$ egymásra nézve konjugált ferde szomszédsági függvények.

Bizonyítás. Elegendő lesz megmutatni, hogy α teljesíti az (S2) és (S3) feltételeket. — Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy

$$(L) \quad A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B).$$

Valóban, ha $A \subseteq B$ és $X \in \alpha(B)$, akkor $\alpha(B) \triangle [E - X] \Rightarrow \alpha(B) \triangle \bar{\alpha}(E - X)$, és így $Y \cap Z = \emptyset$ valamely $Y \in \alpha(B)$ és $Z \in \bar{\alpha}(E - X)$ halmazokra. $Y \supseteq B \supseteq A$ alapján most már $A \cap Z = \emptyset \Rightarrow \bar{\alpha}(E - X) \triangle [A] \Rightarrow \bar{\alpha}(E - X) \triangle \alpha(A)$. Így viszont $V \cap W = \emptyset$ valamely $V \in \alpha(A)$ és $W \in \bar{\alpha}(E - X)$ halmazokra. Látjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} V \in \alpha(A) \\ V \subseteq E - W \end{array} \right\} \Rightarrow E - W \in \alpha(A),$$

míg másrészt¹⁴

$$W \in \bar{\alpha}(E - X) \Rightarrow W \supseteq E - X \Rightarrow E - W \subseteq X.$$

Ezek szerint $X \in \alpha(A)$, és teljesül (L).

(L)-ből most már következik $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$, és ez, (S2')-vel együtt, (S2)-t adja.

(S3) bizonyítása végett legyen $B \in \alpha(A)$, vagyis $\alpha(A) \triangle [E - B]$. Ekkor (D) szerint $\alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(E - B)$, vagyis $X \cap Y = \emptyset$ valamely $X \in \alpha(A)$ és $Y \in \bar{\alpha}(E - B)$ halmazokra. Látjuk, hogy $Y \in \bar{\alpha}(E - B) \Rightarrow B \in \alpha(E - Y)$ és

$$\left. \begin{array}{l} X \cap Y = \emptyset \Rightarrow X \subseteq E - Y \\ X \in \alpha(A) \end{array} \right\} \Rightarrow E - Y \in \alpha(A).$$

Ezek szerint (S3) is teljesül.

¹⁴ (S₁) és (C) alapján természetesen teljesül

$$B \in \bar{\alpha}(A) \Rightarrow B \supseteq A. \quad \blacksquare$$

7. §. Ferde szomszédsági függvények és topogén struktúrák

A szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák közötti ekvivalencia alapján azt lehet sejteni, hogy ferde szomszédsági függvényekre is adható hasonló szintopogén jellemzés, éspedig a szimmetriakövetelmény elejtésével, a topogén struktúra fogalma révén. Ebben a paragrafusban bebizonyítjuk ennek a sejtésnek a helyességét.

Mindenekelőtt emlékeztessünk a topogén struktúra fogalmának definíciójára:

11. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett topogén struktúrának nevezünk egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

$$(O1) \quad \emptyset < \emptyset, E < E;$$

$$(O2) \quad A < B \Rightarrow A \subseteq B;$$

$$(O3) \quad A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B;$$

$$(Q') \quad A < B \& A' < B' \Rightarrow A \cap A' < B \cap B';$$

$$(Q'') \quad A < B \& A' < B' \Rightarrow A \cup A' < B \cup B';$$

$$(7.9) \quad A < B \Rightarrow (\exists C) A < C < B. \blacksquare$$

A korábban tetszőleges féltopogén rendezésekre elfogadott

$$<_1 \subseteq <_2 \Leftrightarrow A <_1 B \rightarrow A <_2 B \quad (A, B \subseteq E)$$

konvenció révén természetesen egy E tér fölötti topogén struktúrák halmaza is parciálisan rendezetté válik.

Ferde szomszédsági függvények szintopogén jellemzése mármost a következő, a 7. tétellel szoros analógiát mutató tétel révén lehetséges:

20. TÉTEL. (1) Ha $<$ az E halmazon definiált topogén struktúra, akkor az E részhalmazain az

$$\alpha_{<}(A) = \{X | A < X\}$$

feltétellel definiált $\alpha_{<}$ függvény ferde szomszédsági függvény E -n.

(2) Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között

$$A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$$

révén definiált $<_{\alpha}$ reláció topogén struktúra E -n.

(3) $< \rightarrow \alpha_{<}$ és $\alpha \rightarrow <_{\alpha}$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E -n értelmezett topogén struktúrák osztályának az E fölötti ferde szomszédsági függvények osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.

Bizonyítás. Tetszőleges $A \subseteq E$ esetén $\alpha_{<}(A) = \{X | A < X\}$ szűrő. Ez egyszerűen adódik az (O1), (O3) és (Q') feltételekből. Megmutatjuk, hogy az $\alpha_{<}(A)$ szűrő tel-

jesíti az (S0)—(S3) feltételeket.

(S0): $\emptyset \in \alpha_{<}(\emptyset)$ abból következik, hogy $\emptyset < \emptyset$.

(S1): $B \in \alpha_{<}(A) \Rightarrow B \supseteq A$ (O2)-ből következik.

(S2): $\alpha_{<}(A \cup B) = \alpha_{<}(A) \cap \alpha_{<}(B)$.

Valóban, (O3) felhasználásával adódik

$$X \in \alpha_{<}(A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B < X \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow A < X \Leftrightarrow X \in \alpha_{<}(A) \\ \Rightarrow B < X \Leftrightarrow X \in \alpha_{<}(B) \end{array} \right\} \Rightarrow X \in \alpha_{<}(A) \cap \alpha_{<}(B).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\alpha_{<}(A \cup B) \subseteq \alpha_{<}(A) \cap \alpha_{<}(B)$. Másrészt (Q'') segítségével azt kapjuk, hogy

$$X \in \alpha_{<}(A) \cap \alpha_{<}(B) \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow A < X \\ \Rightarrow B < X \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B < X \Leftrightarrow X \in \alpha_{<}(A \cup B),$$

vagyis, hogy $\alpha_{<}(A) \cap \alpha_{<}(B) \subseteq \alpha_{<}(A \cup B)$.

(S3): $B \in \alpha_{<}(A) \Rightarrow (\exists C) B \in \alpha_{<}(C) \ \& \ C \in \alpha_{<}(A)$.

Ez közvetlen folyománya (7. 9)-nek.

(2) Az $A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$ reláció teljesíti a 11. definícióban felsorolt valamennyi követelményt.

(O1): (S0) és $E \in \alpha(E)$ révén adódik $\emptyset <_{\alpha} \emptyset$ és $E <_{\alpha} E$.

(O2): Az $A <_{\alpha} B \Rightarrow A \subseteq B$ implikáció (S1)-ből következik.

(O3): $A \subseteq A' <_{\alpha} B' \subseteq B \Rightarrow A <_{\alpha} B$ azért teljesül, mert¹⁵

$$B \supseteq B' \in \alpha(A') \subseteq \alpha(A) \Rightarrow B \in \alpha(A).$$

(Q'):

$$\left. \begin{array}{l} A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A') \subseteq \alpha(A \cap A') \\ A' <_{\alpha} B' \Leftrightarrow B' \in \alpha(A') \subseteq \alpha(A \cap A') \end{array} \right\} \Rightarrow B \cap B' \in \alpha(A \cap A') \Leftrightarrow A \cap A' <_{\alpha} B \cap B'.$$

(Q''):

$$\left. \begin{array}{l} A <_{\alpha} B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \\ A' <_{\alpha} B' \Leftrightarrow B' \in \alpha(A') \end{array} \right\} \Rightarrow B \cup B' \in \alpha(A) \cap \alpha(A') = \alpha(A \cup A') \Leftrightarrow A \cup A' <_{\alpha} B \cup B'.$$

(7. 9): $A <_{\alpha} B \Rightarrow (\exists C) A <_{\alpha} C <_{\alpha} B$ közvetlenül folyik (S3)-ból.

(3) A 7. tétel részére adott bizonyítás változtatás nélkül megtartja érvényét. ■

Ha $<$ topogén struktúra, akkor $<^e$ is az. Ezt be lehet bizonyítani közvetlenül a 11. definíció alapján, de azonnal adódik a következő egyszerű tételből is:

¹⁵ $\alpha(A') \subseteq \alpha(A)$ a 8. Definícióhoz fűzött 2. megjegyzés szerint.

21. TÉTEL. Egy E halmazon definiált tetszőleges α ferde szomszédsági függvény esetén

$$<_{\bar{\alpha}} = (<_{\alpha})^c.$$

Bizonyítás.

$$\left. \begin{aligned} A <_{\bar{\alpha}} B &\Leftrightarrow B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow \\ A (<_{\alpha})^c B &\Leftrightarrow E - B <_{\alpha} E - A \Leftrightarrow \end{aligned} \right\} E - A \in \alpha(E - B). \blacksquare$$

8. §. Ferde szomszédsági relációk. Egy ellenpélda

Amint ez az [1] dolgozatból ismeretes, a szomszédsági függvény fogalma ekvivalens a szomszédsági reláció JEFREMOVICSTÓL és SZMIRNOVTÓL származó fogalmával. Egymásnak megfelelő szomszédsági függvény és szomszédsági reláció között a kapcsolatot az

$$A \delta_{\alpha} B \Leftrightarrow E - B \notin \alpha(A),$$

illetve

$$\alpha_{\delta}(A) = \{X | A \bar{\delta} E - X\}$$

formulákkal definiált $\alpha \rightarrow \delta_{\alpha}$, illetve $\delta \rightarrow \alpha_{\delta}$ leképezések létesítik. Éppen ez az ekvivalencia az, ami indokoltá teszi a „szomszédsági függvény” elnevezést.

Ebben a paragrafusban a szomszédsági függvények és szomszédsági relációk közötti kapcsolat analógiájára a ferde szomszédsági függvényeket jellemezzük alkalmasan definiált „ferde szomszédsági relációk” segítségével. Ez utóbbiakat a következőképpen definiáljuk:

12. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz fölötti ferde szomszédsági reláción olyan $\mathfrak{B}(E)$ -n definiált δ relációt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek (ahol $\bar{\delta}$ a δ reláció tagadását jelenti):

$$(P1) \quad \begin{cases} A \cup B \bar{\delta} C \Leftrightarrow A \bar{\delta} C \& B \bar{\delta} C, \\ C \bar{\delta} A \cup B \Leftrightarrow C \bar{\delta} A \& C \bar{\delta} B; \end{cases}$$

$$(P2) \quad x \delta x \text{ tetszőleges } x \in E\text{-re};$$

$$(P3) \quad A \bar{\delta} \emptyset \text{ és } \emptyset \bar{\delta} A \text{ tetszőleges } A \subseteq E\text{-re};$$

$$(P4) \quad \text{Ha } A \bar{\delta} B, \text{ akkor léteznek diszjunkt } X \text{ és } Y \text{ halmazok úgy, hogy } A \bar{\delta} E - X \text{ és } E - Y \bar{\delta} B. \blacksquare$$

Egy E tér fölötti ferde szomszédsági relációk halmaza parciálisan rendezetté válik a

$$\delta \subseteq \delta_1 \Leftrightarrow A \delta B \rightarrow A \delta_1 B \quad (A, B \subseteq E)$$

megállapodás révén.

A következő két tétel segéd szerepet fog játszani a továbbiak során:

22. TÉTEL. Egy E halmaz fölötti tetszőleges δ ferde szomszédsági reláció esetén

$$(A \bar{\delta} B \& A_1 \subseteq A \& B_1 \subseteq B) \Rightarrow A_1 \bar{\delta} B_1.$$

Bizonyítás.

$$A \bar{\delta} B \Leftrightarrow A_1 \cup A \bar{\delta} B \Rightarrow A_1 \bar{\delta} B \Leftrightarrow A_1 \bar{\delta} B \cup B_1 \Rightarrow A_1 \bar{\delta} B_1. \blacksquare$$

23. TÉTEL.

$$(A\delta B \& A \subseteq A_1 \& B \subseteq B_1) \Rightarrow A_1\delta B_1.$$

Bizonyítás.

$A_1\bar{\delta} B_1$ -ből $A\bar{\delta} B$ következne az előző tétel szerint. ■

A ferde szomszédsági függvényeknek az előbbieken említett jellemzése mármost a következő tétel révén valósítható meg:

24. TÉTEL. (1) Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között

$$A\delta_\alpha B \Leftrightarrow E - B \notin \alpha(A)$$

révén definiált δ_α reláció ferde szomszédsági reláció E -n.

(2) Ha δ ferde szomszédsági reláció E -n, akkor az

$$\alpha_\delta(A) = \{X \mid A\bar{\delta} E - X\}$$

révén definiált $\alpha_\delta: \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ leképezés ferde szomszédsági függvény E -n.

(3) $\alpha \rightarrow \delta_\alpha$ és $\delta \rightarrow \alpha_\delta$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E -n értelmezett ferde szomszédsági függvények osztályának az E fölötti ferde szomszédsági relációk osztályára és viszont. E leképezések a parciális rendezést megfordítják.

Bizonyítás. (1) Azt kell megmutatni, hogy δ_α teljesíti a 12. definícióban szereplő (P1)–(P4) feltételeket.

(P1): Az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:

$$A \cup B \bar{\delta}_\alpha C,$$

$$E - C \in \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B),$$

$$E - C \in \alpha(A) \& E - C \in \alpha(B),$$

$$A\bar{\delta}_\alpha C \& B\bar{\delta}_\alpha C.$$

Ezzel megkaptuk a (P1)-ben szereplő első feltételt. A második feltétel viszont így adódik:

$$C\bar{\delta}_\alpha A \cup B,$$

$$E - (A \cup B) \in \alpha(C),$$

$$(E - A) \cap (E - B) \in \alpha(C),$$

$$E - A \in \alpha(C) \& E - B \in \alpha(C),$$

$$C\bar{\delta}_\alpha A \& C\bar{\delta}_\alpha B.$$

(P2): $x\delta_\alpha x$ fennáll tetszőleges $x \in E$ -re, mert (S1) szerint $E - x \notin \alpha(x)$.

(P3): $A\bar{\delta}_\alpha \emptyset \Leftrightarrow E \in \alpha(A)$ világos, és $\emptyset \bar{\delta}_\alpha A \Leftrightarrow E - A \in \alpha(\emptyset)$ (S0) szerint.

(P4): $A\bar{\delta}_\alpha B \Leftrightarrow E - B \in \alpha(A) \Rightarrow \alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(B)$. A legutolsó feltétel itt viszont éppen azt jelenti, hogy léteznek olyan diszjunkt X és Y halmazok, hogy $X \in \alpha(A)$ és $Y \in \bar{\alpha}(B) \Leftrightarrow E - B \in \alpha(E - Y)$, vagyis $A\bar{\delta}_\alpha E - X$ és $E - Y\bar{\delta}_\alpha B$.

(2) Megmutatjuk, hogy α_δ teljesíti a 8. definíció feltételeit.

Mindenekelőtt $\alpha_\delta(A)$ nem üres tetszőleges $A \subseteq E$ -re, mivel $E \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A \bar{\delta} \emptyset$ teljesül (P3) miatt.

Felhasználva a megfelelő helyen a 22. tételt, kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} X \in \alpha_\delta(A) &\Leftrightarrow A \bar{\delta} E - X \\ Y \supseteq X &\Leftrightarrow E - Y \subseteq E - X \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \bar{\delta} E - Y \Leftrightarrow Y \in \alpha_\delta(A).$$

Továbbá (P1) szerint

$$\left. \begin{aligned} X \in \alpha_\delta(A) &\Leftrightarrow A \bar{\delta} E - X \\ Y \in \alpha_\delta(A) &\Leftrightarrow A \bar{\delta} E - Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \bar{\delta} (E - X) \cup (E - Y) \Leftrightarrow A \bar{\delta} E - (X \cap Y) \Leftrightarrow X \cap Y \in \alpha_\delta(A).$$

Látjuk, hogy $\alpha_\delta(A)$ szűrő.

(S0): $\emptyset \in \alpha_\delta(\emptyset) \Leftrightarrow \emptyset \bar{\delta} E$ (P3) miatt teljesül.

(S1): $B \in \alpha_\delta(A) \Rightarrow B \supseteq A$.

Valóban, legyen $B \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A \bar{\delta} E - B$, és tegyük fel, hogy $A \cap (E - B) \neq \emptyset$. Ekkor $x \in A \cap (E - B)$ valamely $x \in E$ -re, és a 23. tétel szerint $x \delta x \Rightarrow A \delta (E - B)$. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy

$$A \cap (E - B) = \emptyset \Leftrightarrow B \supseteq A.$$

(S2): $\alpha_\delta(A \cup B) = \alpha_\delta(A) \cap \alpha_\delta(B)$.

Valóban,

$$X \in \alpha_\delta(A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B \bar{\delta} E - X \Leftrightarrow A \bar{\delta} E - X \& B \bar{\delta} E - X \Leftrightarrow X \in \alpha_\delta(A) \& X \in \alpha_\delta(B).$$

(S3): $B \in \alpha_\delta(A) \Rightarrow (\exists C) B \in \alpha_\delta(C) \& C \in \alpha_\delta(A)$.

Legyen $B \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A \bar{\delta} E - B$. Ekkor (P4) szerint léteznek olyan diszjunkt X és Y halmazok, hogy $A \bar{\delta} E - X$ és $E - Y \bar{\delta} E - B$. Mármost $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow X \subseteq E - Y$, így $E - Y \in \alpha_\delta(A)$ és (S3) teljesül $C = E - Y$ -ra.

(3) A bizonyítás ugyanaz, mint a „szimmetrikus esetben”, vagyis, mint a szomszédsági függvényekre és szomszédsági relációkra vonatkozó megfelelő tétel esetén (vö. [1], Proposition 7.):

Tekintsük az $\alpha \rightarrow \delta_\alpha$ és $\delta \rightarrow \alpha_\delta$ leképezéseket. Ha $\delta = \delta_\alpha$, akkor $\alpha_\delta = \alpha$. Valóban,

$$\alpha_\delta(A) = \{X | A \bar{\delta} E - X\} = \{X | X \in \alpha(A)\} = \alpha(A).$$

Legyen másrészt $\delta \rightarrow \alpha_\delta$ és $\alpha \rightarrow \delta_\alpha$. Ha itt $\alpha = \alpha_\delta$, akkor $\delta_\alpha = \delta$. Valóban,

$$A \delta_\alpha B \Leftrightarrow E - B \notin \alpha(A) \Leftrightarrow E - B \notin \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow E - B \notin \{X | A \bar{\delta} E - X\} \Leftrightarrow A \delta B.$$

Ezek a leképezések megfordítják a parciális rendezéseket: $\alpha \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \delta_\alpha \supseteq \delta_{\alpha_1}$. Valóban, $A \delta_{\alpha_1} B \Leftrightarrow E - B \notin \alpha_1(A) \Rightarrow E - B \notin \alpha(A) \Leftrightarrow A \delta_\alpha B$.

Hasonlóképpen $\delta \subseteq \delta_1 \Rightarrow \alpha_\delta \supseteq \alpha_{\delta_1}$. Valóban, $X \in \alpha_{\delta_1}(A) \Leftrightarrow A \bar{\delta}_1 E - X \Rightarrow A \bar{\delta} E - X \Leftrightarrow X \in \alpha_\delta(A)$. ■

A ferde szomszédsági függvények és ferde szomszédsági relációk közötti kapcsolat ismeretében természetes módon felvetődik a következő kérdés: Ha tekintünk

egymásra nézve konjugált α és $\bar{\alpha}$ függvényeket, vajon milyen kapcsolat fog fennállni a megfelelő δ_α és $\delta_{\bar{\alpha}}$ relációk között? Erre a kérdésre válaszol az egyszerű

25. TÉTEL. Egy E halmaz fölötti tetszőleges α ferde szomszédsági függvény esetén $A\delta_{\bar{\alpha}}B \Leftrightarrow B\delta_\alpha A$.

Bizonyítás.

$$A\bar{\delta}_\alpha B \Leftrightarrow E - B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(B) \Leftrightarrow B\bar{\delta}_\alpha A. \blacksquare$$

Mindazon megfontolások, amelyeket az eddigiek során ferde szomszédsági függvények, topogén struktúrák és ferde szomszédsági relációk egymásközi kapcsolataira nézve végeztünk, azon a hallgatólagos feltételezésen nyugodtak, hogy ezek a „ferde” fogalomalkotások különböznek a megfelelő „szimmetrikus” fogalmaktól (szomszédsági függvény, szimmetrikus topogén struktúra, szomszédsági reláció).

Nézzünk most meg egy egyszerű példát, amely ezt igazolja.

Legyen E a valós számtengely és $A, B \subseteq E$ esetén legyen

$$A\bar{\delta} B \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ y \in B) \rightarrow x < y.$$

Az így megadott δ reláció teljesíti a 12. Definíció feltételeit. (P1), (P2) és (P3) teljesülése azonnal világos, (P4) belátása végett viszont legyen $X = \{x | x \leq a \text{ valamely } a \in A - a\}$ és $Y = E - X$.

Ezek szerint δ ferde szomszédsági függvény, de nem szomszédsági függvény, mert nem üres A és B halmazok esetén az $A\bar{\delta} B$ és $B\bar{\delta} A$ relációk kölcsönösen kizárják egymást.

Ennek a δ relációnak a 24. tétel szerint megfelel egy α_δ ferde szomszédsági függvény, ez utóbbinak pedig a 20. tétel szerint egy $<_{\alpha_\delta}$ topogén struktúra. Ezek példát szolgáltatnak olyan ferde szomszédsági függvényre, amely nem szomszédsági függvény, és olyan topogén struktúrára, amely nem szimmetrikus topogén struktúra.

Valóban, amint erre a jelen paragrafus elején rámutattunk, az egymásnak megfelelő szomszédsági függvény és szomszédsági reláció közötti kapcsolatot ugyanazok a formulák létesítik a szimmetrikus és a ferde esetben. Másszóval: a ferde szomszédsági függvények és ferde szomszédsági relációk közötti kölcsönösen egyértelmű megfelelés révén a szomszédsági függvények osztálya a szomszédsági relációk osztályára képeződik le. Ha tehát a szóban forgó δ -nak megfelelő α_δ szomszédsági függvény volna, δ -nak szomszédsági relációnak kellene lennie, ami ellentmondás.

Tekintve most még, hogy a 7. tétel és a 20. tétel összehasonlításából adódóan a ferde szomszédsági függvények és topogén struktúrák közötti kölcsönösen egyértelmű megfelelés révén a szomszédsági függvények osztálya a szimmetrikus topogén struktúrák osztályára képeződik le, az is adódik, hogy $<_{\alpha_\delta}$ nem-szimmetrikus topogén struktúra.

Állításaink helyességét természetesen közvetlenül is meg lehet mutatni, α_δ és $<_{\alpha_\delta}$ explicit jellemzése révén:

$$\alpha_\delta(A) = \{X | A\bar{\delta} E - X\} = \{X | (x \in A \ \& \ y \in E - X) \rightarrow x < y\},$$

és

$$A <_{\alpha_\delta} B \Leftrightarrow B \in \alpha_\delta(A),$$

azaz

$$A <_{\alpha_\delta} B \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ y \in E - B) \rightarrow x < y.$$

IRODALOM

- [1] BANASCHEWSKI, B.—MARANDA, J. M.: Proximity Functions. *Math. Nachr.* **23** (1961), 1—37.
- [2] CHOQUET, G.: Convergences. *Ann. Univ. Grenoble*, **23** (1947—48), 57—112.
- [3] CSÁSZÁR, Á.: *Grundlagen der allgemeinen Topologie*. Akadémiai Kiadó, B. G. Teubner, Budapest—Leipzig, 1963.
- [4] FISCHER, H. R.: Limesräume. *Math. Annalen* **137** (1959), 269—303.
- [5] GACSÁLYI, S.: On proximity functions and symmetrical topogenous structures. *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 165—174.
- [6] GACSÁLYI, S.: On Hacque's E -mappings and on semi-topogenous orders. *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 265—270.
- [7] GACSÁLYI, S.: Skew proximity functions. *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 271—280.
- [8] GACSÁLYI, S.: On limitings and topogenous orders. *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), sajtó alatt.
- [9] GACSÁLYI, S.: A characterization of G. Choquet's pseudo-topologies. *Math. Nachr.* (sajtó alatt).
- [10] HACQUE, M.: Sur les E -structures. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), 1905—1907 és 2120—2122.
- [11] KOWALSKY, H. J.: Limesräume und Komplettierung. *Math. Nachr.* **12** (1954), 301—340.
- [12] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie. I. *Math. Nachr.* **7** (1952), 359—378.