

DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS*, I

Írta: DEÁK ERVIN

TARTALOMJEGYZÉK

Rövidítések és jelölések mutatója

Definíciók mutatója

Irodalomjegyzék

0. §. Bevezetés

I. fejezet

AZ IRÁNYDIMENZIÓ FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE. AZ EUKLIDÉSZI TEREK IRÁNYDIMENZIÓJA

1. §. Az alapfogalmak: irány, iránystruktúra, iránydimenzió
2. §. Az iránydimenzió monotonitása. Egy egyesítési és egy szorzattétel
3. §. Vegyes tételek és példák
4. §. Egy összefüggés szeparábilis metrikus terek iránydimenziója és Menger—Uriszon-dimenziója között
5. §. Az euklidészi terek iránydimenziója. A II. fejezet fő feladatának ismertetése

II. fejezet

EGY EUKLIDÉSZI TÉR ÖSSZES ALTEREI OSZTÁLYÁNAK TELJES KARAKTERIZÁLÁSA AZ IRÁNYDIMENZIÓVAL

6. §. Rendes irányok és gyengén rendes terek
7. §. A rendes tereknek egy osztálya: a tökéletesen normális terek
8. §. Az első és a második beágyazási tétel
9. §. A második beágyazási tétel egybevetése Tyihonov beágyazási tételével
10. §. A harmadik beágyazási tétel. A fő feladat megoldása

III. fejezet

IRÁNYTEREK ÉS TOPOLOGIKUS IRÁNYTEREK. (A LINEÁRIS TÉR, A GYENGE TOPOLOGIÁJÚ LOKÁLISAN KONVEX TÉR ÉS A KONVEXITÁS FOGALMÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA)

11. §. Irányterek
12. §. Konvexitás
13. §. Topologikus irányterek
14. §. A kvázi-belső rész fogalma
15. §. A kvázi-belső rész szerepe lineáris terekben
16. §. Extremális pontok
17. §. A Krein—Milman-tétel általánosítása

IV. fejezet

18. §. Problémák és kiegészítések

(A IV. fejezet részletes tartalomjegyzékét a IV. rész elején közöljük.)

* E dolgozat lényegében a szerző kandidátusi disszertációja több változtatással, amelyek egy része az értekezés opponensei, BOGNÁR MÁTYÁS és SOÓS GYULA néhány bíráló megjegyzése és javaslata nyomán született. Az opponenseknek e helyen is köszönetet mondok munkájukért.

A felhasznált ismert fogalmakat és tételeket (viszonylag egyszerűeket is) igyekeztem idézni, mégpedig lehetőleg jól ismert tankönyvekből vagy monográfiákból; első megjelenésük adatait csak akkor adom meg, ha a történeti vonatkozás e dolgozat anyagának szempontjából is érdekes.

Az értekezés anyagának az a része, amely e dolgozat I., II. és III. részének felel meg, idegen nyelven megjelent vagy sajtó alatt van a [16], [17], [18], [20], [21], [22] dolgozatokban.

A dolgozat jelen I. része az I. fejezetet tartalmazza. Az itt közölt tartalomjegyzék, a rövidítések és jelölések mutatója, a definíciók mutatója és az irodalomjegyzék azonban a dolgozat egészére vonatkozik.

Rövidítések és jelölések mutatója

VT vektortér (lineáris tér), kizárólag a valós számok teste fölött,
 TVT topologikus vektortér (kizárólag Hausdorff-tér),
 LKT lokálisan konvex topologikus vektortér,
 GLKT gyenge topológiájú lokálisan konvex tér,
 IS iránystruktúra,
 IT iránytér,
 TIT topologikus iránytér;
 „tér”: nem-üres topologikus tér,
 a „kompakt” szót a „bikompakt” értelemben használjuk,
 „reguláris tér”, „teljesen reguláris tér”, „normális tér”, „kompakt tér” mindig T_0 -axióma nélkül értendő,
 $\tau(X)$ egy X tér topológiai súlya (Basisgrad),
 minden rendezés lineáris rendezés, és minden rendezés jele $<$, amely a különbözőséget is kifejezi,
 $A \subset B$: A valódi részhalmaza B -nek,
 A° ill. A^- : egy tér A részhalmazának belseje, ill. zárt burka,
 Gr A : egy tér A részhalmazának határa,
 ind X : az X tér MENGER—URISZON-dimenziója,
 Dim X : az X tér iránydimenziója,
 E_α (tetszőleges α kardinális számra): a számegyenes példányai α számosságú családjának topologikus szorzata,
 „euklidészi tér”: ugyanez véges α -ra,
 „Hilbert-tér”: a valós l^2 -tér,
 $M(E)$: egy vektortér E részhalmazát tartalmazó legszűkebb lineáris sokaság,
 $L(E)$: az L vektortér E részhalmaza által kifeszített lineáris altér,
 $[E]$: egy vektortér E részhalmazának konvex burka,
 (x, y) ill. $[x, y]$: egy vektortér x, y pontjai által meghatározott nyílt, ill. zárt egyenes szakasz.

*

Dim X	(1. 14)
$\mathcal{G}(\mathcal{R}; \mathcal{F}), \mathcal{G}(\mathcal{F}), \mathcal{F}(\mathcal{R}; \mathcal{G}), \mathcal{F}(\mathcal{G})$	(1. 2)
$\left. \begin{array}{l} G(\mathcal{R}; F), G(F), F(\mathcal{R}; G), F(G) \\ \bar{G}(\mathcal{R}; F), \bar{G}(F), \bar{F}(\mathcal{R}; G), \bar{F}(G) \\ \underline{G}(\mathcal{R}; F), \underline{G}(F), \underline{F}(\mathcal{R}; G), \underline{F}(G) \end{array} \right\}$	(1. 6)
$G_E(\mathcal{R}), F_E(\mathcal{R})$	(11. 12. 1)
$G_x(\mathcal{R}), F_x(\mathcal{R}), G_x, F_x$	(6. 2. 1), (11. 12)
G_i^f, F_i^f	(6. 5. 1), (11. 15. 13)
$\left. \begin{array}{l} \mathcal{M}_F(\mathcal{R}), \mathcal{M}_F(\mathcal{R}), \mathcal{N}_G(\mathcal{R}), \mathcal{N}_G(\mathcal{R}) \\ \mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \mathcal{N}_G, \mathcal{N}_G \end{array} \right\}$	(6. 1)
$M_E(\mathcal{R}), N_E(\mathcal{R})$	(12. 2. 1)

M_E^f, N_E^f	(13. 14)		
L^*, L_E^*, L_L^*	(11. 15)		
L', L'_E, L'_L	(13. 11)		
$(X, \mathfrak{R})$	(11. 13), (13. 15), 2°		
$(X, \mathfrak{R}, \mathcal{T}), (X, \mathcal{T}, \mathfrak{R})$	(13. 2)		
$k(\mathfrak{R}; E)$	(12. 4)	$S_x(\mathcal{R})$	(11. 17. 1)
$gk(\mathfrak{R}; E)$	(12. 7. 1)	$\mathcal{R}$	(1. 1)
$ek(\mathfrak{R}; E)$	(12. 2)	$\mathfrak{R}$	(1. 11)
$b(\mathfrak{R}; E)$	(14. 1)	$\mathcal{R}_E$	(11. 12. 3)
$\varepsilon(\mathfrak{R}; E)$	(17. 1)	$\mathfrak{R}_E$	(11. 12. 4)
$zk(\mathfrak{R}; E)$	(13. 10)	$\mathcal{R} E$	(11. 14)
$zgak(\mathfrak{R}; E)$	(13. 10. 1)	$\mathfrak{R} E$	(11. 14)
$zek(\mathfrak{R}; E)$	(13. 7)	$\mathcal{R}^f$	(11. 15. 4), (6. 5. 2)
$^{(a)}$ felső index	(11. 16)	$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$	(11. 16)
$^{(i)}$ felső index	(13. 11), (b)	$\mathfrak{R}^{(i)}(L)$	(13. 11), (b)
$S_E(\mathcal{R}), T_E(\mathcal{R})$	(11. 12. 2)	$\mathfrak{R}_E^{(a)}(L)$	(11. 17. 2)
$\mathcal{S}(\mathcal{R})$	(11. 5)		

Definíciók mutatója

algebrai iránystruktúra;

VT-é (11. 16), TVT-é (13. 11), (a)

altérben indukált iránystruktúra (2. 4)

erősen $\mathfrak{R}$ -konvex halmaz (12. 1)

erősen $\mathfrak{R}$ -konvex burok (12. 2)

féltér (alsó, felső, nyílt, zárt) (1. 3)

gyengén rendes tér (1. 19)

gyenge $\mathfrak{R}$ -extremális pont (16. 1)

gyengén $\mathfrak{R}$ -konvex (12. 7)

gyengén $\mathfrak{R}$ -konvex burok (12. 7. 1)

gyenge topológia (0. 1)

intern pont (15. 1)

irány; top. tér (1. 1), halmazé (11. 1)

irányaxiómák (1. 1)

iránydimenzió (1. 14)

iránystruktúra;

top. tér (1. 11), halmazé (11. 2)

iránystruktúra inverz képe (2. 1)
 iránystruktúrával kompatibilis topológia (13. 1)
 iránytér (11. 3)
 MENGER—URISZON-dimenzió (0. 2)
 minimális iránystruktúra (1. 15)
 kvázi- $\mathfrak{R}$ -belseje (halmaznak) (14. 1)
 rendes irány;
 top. téré (1. 16), halmazé (11. 1)
 rendes iránystruktúra;
 top. téré (1. 17), halmazé (11. 2)
 rendes tér (1. 20)
 $\mathfrak{R}$ -extremális pont (16. 1)
 $\mathfrak{R}$ -konvex halmaz (12. 3)
 $\mathfrak{R}$ -konvex burok (12. 4)
 $\mathfrak{R}$ -magasabb (11. 8), (11. 9)
 részhalmazra szorított irány
 (v. iránystruktúra) (11. 14)
 $\mathcal{R}$ -nyílt, $\mathfrak{R}$ -nyílt, $\mathcal{R}$ -zárt, ill. $\mathfrak{R}$ -zárt féltér (11. 6)
 sík ($\mathcal{R}$ -sík, $\mathcal{R}$ -irányú sík) (11. 5)
 sík által létesített féltér (11. 6)
 támaszpont (11. 11)
 támaszsík (11. 10)
 természetes iránystruktúra;
 VT-é (11. 16), GLKT-é (3. 11), (c)
 topologikus iránystruktúra (13. 11), (b)
 topologikus iránytér (13. 2)
 tökéletesen normális tér (7. 2)
 üres sík (14. 2), 1°
 valódi támaszpont, ill. támaszsík (11. 11)
 zárt erősen $\mathfrak{R}$ -konvex burok (13. 7)
 zárt gyengén $\mathfrak{R}$ -konvex burok (13. 10. 1)
 zárt $\mathfrak{R}$ -konvex burok (13. 10)

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] ACZÉL J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Berlin 1961.
- [2] ALEKSZANDROV, P. SZ.: Szovremennoje szosztojanije teorii razmernosztij, *Uszp. Mat. Nauk.* VI(6/46), 43—68 (1951).
- [3] ALEKSZANDROV, P. SZ.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe*. Bp. Akad. K. 1952.
- [4] ALEXITS GY.: A halmazelméleti geometria újabb fejlődése. *Mat. Fiz. Lapok XLV*, 38—77, 1938.
- [5] ARROW, K. J.—ENTHOVEN, A. C.: Quasi-concave programming, *Econometrica* 29, 778—800 (1961).
- [6] BIRKHOFF, G.: Three observations on linear algebra, *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. (A)* 5, 147—150 (1946).
- [7] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory, rev. ed.*, New York, 1948.
- [8] BOURBAKI, N.: Topologie générale, *Éléments de math. I, livre III*, 2. e. (1958).
- [9] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques, *Éléments de math. XV, livre V. chap. I, II.* (1953).

- [10] BROUWER, L. E.: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, *Math. Ann.* **70**, 161—165 (1911).
- [11] BROUWER, L. E. J.: Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *Journal f. d. Reine u. Angew. Math.* **142**, 146—152 (1913).
- [12] CSÁSZÁR Á.: Sur une classe des fonctions non mesurables, *Fund. Math.*, **36**, 72—76 (1949).
- [13] DAY, M.: *Normed Linear Spaces*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958.
- [14] DEÁK E.: Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.* **V**, 109—154 (1962).
- [15] DEÁK E.: Bemerkung zu einem Beweis der Quadrierbarkeit der n -dimensionalen konvexen Mengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **VIII**, 89—92 (1965).
- [16] DEÁK E.: Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* **10**, 31—42 (1965).
- [17] DEÁK E.: Eine vollständige Charakterisierung der Teilräume eines euklidischen Raumes mittels der Richtungsdimension, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9**, A sorozat, 437—465 (1964).
- [18] DEÁK E.: Über die inwendigen Punkte konvexer Mengen, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* **11**, 1225—1231 (1966).
- [19] DEÁK E.: Über Abbildungen mit konvexitätserhaltender Inversion, *Mathematica* **8** (31), 217—233 (1966).
- [20] DEÁK E.: Eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes und der Konvexität, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.*, **9**, 45—59 (1966).
- [21] DEÁK E.: Topologische Richtungsräume — eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokal-konvexen Raumes mit der schwachen Topologie, *Studia Sci. Math. Hung.* **1**, 297—308 (1966).
- [22] DEÁK E.: Extrempunktsbegriffe für Richtungsräume und eine Verallgemeinerung des Krein—Milmanschen Satzes für topologische Richtungsräume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18**, 113—131 (1967).
- [23] DEÁK E.: Bemerkungen zu meiner vorangehenden Arbeit „Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff“, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* (sajtó alatt).
- [24] FAN, KY: On the Krein—Milman theorem, *Proc. Symp. Pure Math.* vol. **VII**: Convexity, 211—221, Amer. Math. Soc. (1963).
- [25] FLORES, A.: Existenz n -dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} einbettbar sind, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **5**, 17—23 (1934).
- [26] FRÉCHET, M.: Les dimensions d'un ensemble abstrait, *Math. Ann.* **68**, 145—168 (1910).
- [27] HAMEL, G.: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, *Math. Ann.* **60**, 459—462 (1905).
- [28] HUREWICZ, W.: Normalbereiche und Dimensionstheorie, *Math. Ann.* **96**, 736—764 (1927).
- [29] HUREWICZ, W.: Über das Verhalten separabler Räume zu kompakten Räumen, *Proc. Koninklijke Akad. Wet. Amsterdam* **30**, 425—430 (1927).
- [30] HUREWICZ, W.: Sur la dimension de produits Cartésiens. *Annals of Math.* (2) **36**, 194—197 (1935).
- [31] HUREWICZ, W.—WALLMAN, H.: *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press. 1948.
- [32] JERISON, M.: A property of extreme points of compact convex sets, *Proc. Am. Math. Soc.* **5**, 782—783 (1954).
- [33] KELLEY, J. L.: *General Topology*, Toronto—New York—London, D. Van Nostrand, 1955.
- [34] KELLEY, J. L.—NAMIOKA, J.: *Linear Topological Spaces*. D. Van Nostrand, Princeton, 1963.
- [35] KLEE, V.: Extreme points of convex sets without completeness of the scalar field. *Mathematika II/1* N° **21**, 59—62 (1964).
- [36] KOVÁCS L. B.: Kvázi-konkáv programozási feladat megoldása gradiens vetítési módszerrel. *MTA III. Oszt. Közl.* **XIII**, **2**, 157—178 (1963).
- [37] KOWALSKY, H. J.: *Topologische Räume*, Basel—Stuttgart, Birkhäuser, 1961.
- [38] KÖTHE, G.: *Topologische lineare Räume I*. (Die Grundlehren der Math. Wiss. Bd 107.) Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1960.
- [39] KREIN, M.—MILMAN, D.: On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.* **9**, 133—138 (1940).
- [40] LEBESGUE, H.: Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces de n et $n+p$ dimensions, *Math. Ann.* **70**, 166—168 (1911).
- [41] MARCUS, S.: Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár, *Acta Sci. Math.* **19**, 192—218 (1958).
- [42] MEHDI, M. R.: On convex functions, *Journal London Math. Soc.* **39**, 321—326 (1964).

- [43] Menger, K.: Über die Dimensionalität von Punktmengen I, *Monatshefte f. M. u. Ph.* **33**, 148—160 (1923).
- [44] Menger, K.: *Dimensionstheorie*. Leipzig—Berlin, B. G. Teubner 1928.
- [45] Morita, K.: Star-finite coverings and the star-finite property, *Math. Japon.* **1**, 60—68 (1948).
- [46] Morita, K.: On the dimension of normal spaces, I., *Journal Math. Soc. Japan* **2**, 16—33 (1950).
- [47] Nagata, J.: *Modern Dimension Theory*. P. Noordhoff N. V. — Groningen, North-Holland Publ. Comp. — Amsterdam, 1965.
- [48] Nöbeling, G.: Über eine n -dimensionale Universalmenge im R_{2n+1} , *Math. Ann.* **104**, 71—80 (1931).
- [49] Poincaré, H.: *Pourquoi l'espace a trois dimensions*. Dernières pensées, 57—97, Paris 1913.
- [50] Pontrjagin, L.: Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension, *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 1105—1107 (1930).
- [51] Pontrjagin, L.—Tolstova, G.: Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, *Math. Ann.* **105**, 734—745 (1931).
- [52] Révész P.: Néhány megjegyzés Birkhoff 111. problémájáról. *MTA III. Oszt. Közl.*, **XI**, 3, 273—287 (1961).
- [53] Sierpiński, W.: *General Topology*, Toronto, 1952.
- [54] Szmirnov, Ju. M.—Szkljarenko, E. G.: Nyekotorie voproszi teorii razmernosztyi, *Trudi csetvert. vszjeszoj. szjezda*, Leningrád, 1961, tom I, 219—224.
- [55] Tumarín, L.: Concerning infinite-dimensional spaces, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proc. Symp. Prague Sept. 1961, *Czechosl. Acad. Sci.*, Prague 1962, 352—353.
- [56] Urysohn, P.: Les multiplicités cantorienes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **175**, 440—442 (1922).

0. §. Bevezetés

E dolgozat kiindulópontja és mindvégig központi gondolata: az iránystruktúra fogalma. Ennek a fogalomalkotásnak az az alapja, hogy egy topologikus vektortér, ill. (topológia nélküli) lineáris tér valamely folytonos, ill. tetszőleges lineáris formájához tartozó feltérei rendszerének bizonyos strukturális (rendezési stb.) tulajdonságaival tetszőleges (algebrai struktúra nélküli) topologikus terek, ill. absztrakt halmazok részhalmazzaiból alkotott bizonyos rendszerek is rendelkeznek.

Ilyen tulajdonságok pl. a következők: egy rögzített (folytonos, ill. tetszőleges) lineáris formához tartozó feltérek két diszjunkt osztályt alkotnak oly módon, hogy bármelyik osztály bármelyik (topológiailag, ill. csak algebrailag) nyílt, ill. zárt feltére a másik osztály valamely zárt, ill. nyílt feltérének komplementuma; mindegyik osztály az inklúzió által rendezve van, s e rendezésben minden nyílt feltérre közvetlenül a hozzátartozó zárt feltér következik; ha végül mindkét osztályt kiegészítjük az üres halmazzal és az egész térrel mint „nem-valódi” (egyaránt nyílt és zárt) feltérekkel, akkor igaz az, hogy bármelyik osztályon belül nyílt feltérek, ill. zárt feltérek tetszőleges egyesítése, ill. metszete is ugyanazon osztálynak ugyanolyan típusú feltére.

E tulajdonságoknak a lineáris struktúrától elvonatkoztatott megfogalmazása szolgáltatja mármost azokat az ún. *irányaxiómákat*, amelyek mind a topologikus terek, mind az absztrakt halmazok ún. *irányainak* definíciójában szerepelnek; az *iránystruktúrák* pedig irányok bizonyos rendszerei. Ezek a definíciók az említett „belső” tulajdonságok mellett még olyan „külső” (vagyis az alapul vett térre, ill. halmazra utaló) tulajdonságokat követelnek meg az iránynak és az iránystruktúrának nevezendő rendszerektől, amelyek lényegében azt biztosítják, hogy e rendszerek bizonyos tekintetben „elégge gazdagok” legyenek. Ismeretes, hogy

(0. 1) egy lokálisan konvex tér gyenge topológiáját (vagyis a megfelelő lineáris térnek a legdurvább olyan lokálisan konvex topológiáját, amelyre nézve a kiinduló topológiában folytonos lineáris formák még folytonosak) karakterizálja az a tulajdonsága, hogy az összes topológiailag nyílt félterek családja e topológiának szubbázisa ([38] 237).

Analóg módon bármely topologikus tér topológiája származtatható egy iránystruktúrából ((1. 13) tétel), és egy absztrakt halmaz bármely iránystruktúrája a halmaz egy topológiáját generálja (13. §).

A dolgozat az iránystruktúra fogalmára természetesen épülő két témakörrel szól. Az I. és a II. fejezet adott topologikus terek különböző iránystruktúráinak vizsgálatát tartalmazza, különös tekintettel a minimális (a lehető legkevesebb irányt tartalmazó) iránystruktúrákra és arra a dimenziójellegű kardinális számra, az *iránydimenzióra*, amely ennek értelmében minden topologikus térhez egyértelműen tartozik. A dolgozatnak ez a része tehát dimenzióelméleti jellegű. A III. fejezetben viszont rögzített iránystruktúrákkal ellátott absztrakt halmazok (*irányterek*) és az iránystruktúrájuk által generált topológiával felruházott irányterek (*topologikus irányterek*) szerkezetét vizsgáljuk a lineáris terek, ill. a gyenge topológiájú lokálisan konvex terek általánosításaként, különös tekintettel a konvexitás fogalmának alkalmas általánosításaira.

*

A dimenzióelméleti rész vezérfonalát a Menger—Uriszon-féle, az újabb szokás szerint $\text{ind } X$ -szel jelölt „kis induktív dimenzió” alaptulajdonságai szolgáltatják.

(0. 2) A Menger—Uriszon-dimenzió definíciója ([43], [56], vagy pl. [31] 10, 24):

1° $\text{ind } \emptyset = -1$;

2° egy X topologikus tér dimenziója valamely $x \in X$ pontban legfeljebb n ($n=0, 1, 2, \dots$), ha x környezetrendszerének van olyan halmazokból alkotott bázisa, amelyek határának dimenziója n -nél kisebb;

3° $\text{ind } X \leq n$, ha X dimenziója minden $x \in X$ pontban legfeljebb n ;

4° $\text{ind } X = n$, ha n a legkisebb egész szám, amelyre $\text{ind } X \leq n$.

Ezt a definíciót általában kiegészítik ezzel a meghatározással:

5° $\text{ind } X = \infty$, ha egyetlen $n \equiv -1$ egész számra sem teljesül, hogy $\text{ind } X = n$.

E dolgozatban azonban célszerű lesz 5° helyett inkább azt mondani, hogy az ilyen térnek *nincs* kis induktív dimenziója; az $\text{ind } X = \infty$ jelölés amúgy is csak annak szimbolikus kifejezése, hogy X -nek nincs *véges* dimenziója.

Használatos a (0. 2) definíció 1°—4° részének transzfinit változata is, amelyben a természetes számok szerepét (nem okvetlenül véges) rendszámok veszik át. Ez finomítja ugyan a terek dimenzió szerinti osztályozását, de az egzisztencia problémája itt is fennmarad. A Hilbert-térnek pl. transzfinit dimenziója sincs ([31] 51). Egyáltalán csak „viszonylag kevés” végtelen dimenziójú térhez lehet ily módon egy transzfinit rendszámot rendelni, és csak „viszonylag kevés” végtelen rendszám lehet valamely tér transzfinit dimenziója ([31] 50). A nem-metrizálható terek köréből egyszerű példát adunk (3. 3. 1)-ben olyan X térre, amelyre $\text{ind } X$ sem az eredeti, sem a transzfinit értelemben nem létezik.

A $\text{Dim } X$ -szel jelölt iránydimenzió elméletének felépítésénél mármost az $\text{ind } X$ -re vonatkozó következő, immár klasszikus alaptételeket tekintettük mintának:

(0. 3) $\text{ind } X$ topologikus invariáns.

(0. 4) $\text{ind } X$ monoton, azaz egy tér dimenziója nem lehet kisebb valamely alterének dimenziójánál ([31], 27).

(0. 5) Az E_n euklidészi térre $\text{ind } E_n = n$ ($n = 1, 2, \dots$) ([11], 148 vagy pl. [31], 41).

(0. 6) Menger szorzattétele. Ha X és Y szeparábilis metrikus terek és mindkettőnek van dimenziója, akkor az $X \times Y$ topologikus szorzat dimenziója is létezik és

$$\text{ind } (X \times Y) \leq \text{ind } X + \text{ind } Y.$$

([44], 246, vagy pl. [31], 33.)

(0. 7) Hurewicz egyesítési tétele. Ha X szeparábilis metrikus tér és $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, ahol minden X_k az X -ben F_σ -halmaz, továbbá

$$\text{ind } X_k \leq n \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor

$$\text{ind } X \leq n$$

([28], 754, vagy pl. [31], 30).

(0. 8) Hurewicz kompaktifikációs tétele. Bármely olyan szeparábilis metrikus tér, amelynek van dimenziója, topologikusan beágyazható egy ugyanolyan dimenziójú kompaktumba ([29], vagy pl. [31], 65).

(0. 9) Menger és Nöbeling beágyazási tétele. (a) Ha X szeparábilis metrikus tér és $\text{ind } X \leq n$ valamely n nem-negatív egész számra, akkor X topologikusan beágyazható az E_{2n+1} euklidészi térbe (Menger, [44] 298, 301, vagy pl. [31] 60);

(b) minden n nem-negatív egész számra van E_{2n+1} -nek „univerzális” n -dimenziós altere, vagyis olyan, amelybe minden legfeljebb n -dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikusan beágyazható; nevezetesen azoknak az E_{2n+1} -pontoknak a halmaza, amelyeknek legfeljebb n koordinátája racionális (Nöbeling [48], Pontrjagin — Tolsztova [51], vagy pl. [31] 64);

(c) minden nem-negatív n egész számhoz meg lehet adni olyan n -dimenziós szeparábilis metrikus teret (nevezetesen E_{2n+1} egy alterét), amely nem ágyazható be topologikusan az E_{2n} térbe; az (a) tétel tehát ilyen értelemben nem élesíthető (Flores [25]).

Hivatkozni fogunk még az euklidészi terek dimenziójának topologikus invarianciájára:

(0. 10) Brouwer és Lebesgue invariancia-tétele. Ha E_n, E_m euklidészi terek és $n > m$, akkor az E_n tér nem ágyazható be topologikusan E_m -be.

(E nevezetes tétel a (0. 3), (0. 4) és (0. 5) tételek következménye; első bizonyításai ([10], [40]) azonban a Menger—Uriszon-elméletől függetlenül, mégpedig azt közvetlenül megelőzve keletkeztek.)

A dimenzióelmélet más dimenziófogalmakkal is dolgozik: a Čech-féle — $\text{Ind } X$ -szel jelölt — nagy induktív dimenzióval és a Lebesgue-féle — $\dim X$ -szel jelölt — lefedési dimenzióval (csak az általános topológia körébe eső fogalmakat említjük).

A szeparábilis metrikus terek körében e háromféle dimenzió, egzisztenciáját és értékét illetően egyaránt egybeesik, s ez jelentős könnyebbséget jelentett a Menger—Uriszon-dimenzió elméletének felépítésénél. A Menger—Uriszon-dimenzió azonban, bár a szeparábilis metrikus terek vizsgálatánál általában előnyösebb akár a Čech-féle akár a Lebesgue-féle dimenzióval, ebből a körből kilépve szinte alig kezelhető, és még tetszőleges metrikus terekre sem ekvivalens az utóbbiakkal. Ez a körülmény szabta meg a természetes korlátait a dimenzióelmélet e klasszikus részének, amely-

nek legjobb összefoglalása W. HUREWICZ és H. WALLMAN [31] könyve (1941-ben jelent meg először); röviden és igen világosan tájékoztat róla ALEXITS GYÖRGY 1938-ban megjelent magyar nyelvű [4] ismertető cikke is. (Az első ilyen tárgyú monográfia Menger 1928-ban megjelent [44] könyve volt).

$\text{Ind } X$ és $\dim X$ azonban minden metrikus X térre ekvivalens, s a dimenzióelmélet újabb szakasza túlnyomóan a metrikus terekre alkalmazott nagy induktív és lefedési dimenzióval foglalkozik. Az idézett alaptételek közül is sikerült többet ilyen értelemben általánosítani és egészen új kutatási irányokat is követnek ebben a körben. Nem-metrizálható tereknél azonban újra igen nagy nehézségek jelentkeznek. Minderről legkönnyebben J. NAGATA nemrég megjelent [47] könyvéből, vagy több ismertető cikk közül pl. P. SZ. ALEKSZANDROV [2] dolgozatából lehet tájékozódni.

Az iránydimenzió vizsgálata túléli a metrikus terek körét is, de a szokásos dimenziófogalmak közül még csak a Menger—URISZON-dimenzióval hoztuk közvetlen kapcsolatba, mégpedig a szeparábilis metrikus terek körében (bár a (5.4) tétel bizonyítását HUREWITZ egyesítési tétele helyett pl. K. MORITA egyesítési tételére ([46] 22) alapozva azt nyerjük, hogy minden X véges iránydimenziójú normális T_1 -térre $\text{ind } X \leq \dim X$; részletesen I. a IV. fejezetben). Ezért a továbbiakban is csak a Menger—URISZON-elméletre és a jól ismert HUREWICZ—WALLMAN-féle könyvre hivatkozunk.

Természetes hát az a — lényegében csak terminológiai — kérdés, hogy milyen „kötelező” tulajdonságok avatnak egy függvényt, amely a topologikus terek valamely családját a kardinális számok vagy a rendszámok összességébe képezi le, „dimenzióvá”.

(0. 11) HUREWICZ és WALLMAN szerint ([31] 154) egy ilyen függvény „megérdemli” a dimenzió nevet, ha

(a) *topologikus invariáns*,

(b) *monoton*, és

(c) *megkülönbözteti a különböző euklidészi tereket*.

(A (c) követelményt az összes használatos dimenziófogalmak „túlteljesítik”, amennyiben minden E_n euklidészi térhez éppen az n számot rendelik. Figyelemre méltó, hogy az említett szerzők felfogásában még az utóbbi nagyon természetes tulajdonság sem okvetlen tartozéka a „dimenziójelleg”-nek.)

E kritérium alapján tartjuk helyénvalónak az „iránydimenzió” elnevezést ($\dim X$ monotonitását a 2. §-ban, $\dim E_n = n$ -et pedig az 5. §-ban bizonyítjuk), annak ellenére, hogy az iránydimenzió értéke sok térnél különbözik a Menger—URISZON-dimenziótól. (Maga Menger is hangsúlyozta több, akár a szeparábilis metrikus terek körében sem ekvivalens dimenziófogalom létjogosultságát, pl. [44], 76, 317). Az $\text{ind } X \neq \dim X$ esetre több példát mutatunk be a 2. §-ban. Megjegyezzük azonban, hogy szeparábilis metrikus X térnél e két dimenzió eltérése nem lehet „nagyon nagy”: $\text{ind } X$ és $\dim X$ között az (5. 3. 1) aszimptotikus kapcsolat áll fenn.

Az iránydimenzió tulajdonságai sok formai analógiát mutatnak a Menger—URISZON-dimenzióval, hatósugara azonban nagyobb: minden topologikus térnek van iránydimenziója ((1. 13) tétel) és minden kardinális szám iránydimenziója valamely térnek ((3. 3) tétel). Ez az általánosság, valamint egyes — a Menger—URISZON-dimenzió megfelelő alaptétéleivel analóg, de tetszőleges topologikus terekre, ill. ilyenek tetszőleges (nem okvetlenül véges) családjaira érvényes — tételek, pl. a (2. 6), (a) tétel (Menger (0. 6) szorzattételének analogonja) reményt nyújtanak arra, hogy az iránydimenzió elmélete a szeparábilis metrikus tereken túl is jól kiépíthető lesz. (Igaz viszont, hogy HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételének analogonját csak lényegesen erősebb megszorításokkal sikerül bebizonyítani (2. 7)-ben.)

A (8. 1) „I. beágyazási tétel” (TYHONOV (8. 2) beágyazási tételének általánosítása) pl. az (1. 19)-ben definiált „gyengén rendes” T_0 -terek osztályára vonatkozik,

amelyről (8. 3)-ban kimutatjuk, hogy a TYIHONOV-terek osztályával azonos. (Az iránystruktúra fogalma tehát a teljesen reguláris T_0 -terek fontos osztályának egy újabb teljes karakterizálását teszi lehetővé.) HUREWICZ (0. 8) kompaktifikációs tételének analogonja iránydimenzióra, a (8. 6) tétel, az (1. 20)-ban definiált „rendes” T_0 -terek osztályára vonatkozik, amely a TYIHONOV-terek osztályának része, és magába foglalja az összes tökéletesen normális T_0 -tereket, tehát az összes metrikus tereket is ((7. 4) és (7. 5) tétel). A (8. 4) „2. beágyazási tétel” szintén a rendes T_0 -terekre vonatkozik. Ez a tétel TYIHONOV beágyazási tételének egy analogonja (a két tétel viszonyát a 9. §-ban elemezzük), amelyben az iránydimenzió — durván szólva — a topológiai súly szerepét veszi át.

Az iránydimenzió azonban — az imént vázolt általánossággal látszólag ellentmondásban — közelebb áll az euklidészi dimenzióhoz, mint a klasszikus dimenzió-fogalmak (amint ezt már a definíciója is sejtetni engedi). A (10. 1) „3. beágyazási tétel” ui. Menger és Nöbeling (0. 9) beágyazási tételének olyan analogonja, amelyben $2n+1$ helyett n áll. E tétel szolgáltatja dolgozatunk dimenzióelméleti részének a II. fejezet címében is jelzett főeredményét: egy szeparábilis metrikus X tér akkor és csak akkor altere egy E_n euklidészi térnek, ha $\dim X \leq n$ ((10. 8) tétel). Így tehát az iránydimenzióval nem csak az összes euklidészi terek altereinek összességét lehet karakterizálni (mint a Menger—Uriszon-dimenzióval, vö. (5. 4), 2°), hanem minden egyes euklidészi tér altereinek osztályát is:

Szeparábilis metrikus X tér iránydimenziója pontosan azt mutatja, hogy van-e, s ha igen, melyik a legkisebb euklidészi tér, amelybe X topologikusan beágyazható.

*

Az iránytér, ill. a topologikus iránytér fogalma a lineáris tér, ill. a gyenge topológiájú lokálisan konvex tér fogalmának általánosítása (11. és 13. §). Irányterekben bevezetjük a „sík”, „féltér”, „támaszsík”, „támaszpont” fogalmakat a megfelelő, lineáris terekben szokásos fogalmak általánosításaként ((11. 5)—(11. 12)). Bevezetünk három, az $\mathfrak{R}$ iránystruktúrából levezetett konvexitás-fogalmat: az erős $\mathfrak{R}$ -konvexitás (12. 1), az $\mathfrak{R}$ -konvexitás (12. 3) és a gyenge $\mathfrak{R}$ -konvexitás (12. 7) fogalmát. Ha az utóbbi kettőt egy lineáris tér „természetes” vagy „algebrai” iránystruktúrájára ((11. 15), (11. 16)) alkalmazzuk, egyaránt a konvexitás közönséges fogalmát kapjuk ((12. 11) tétel). Rámutatunk arra, hogy a közönséges konvexitás egy lokálisan konvex tér „természetes” vagy „topológiai” iránystruktúrájából ((1. (13. 11)) is ugyanúgy származtatható, mint az alapul szolgáló lineáris tér — általában bővebb — természetes iránystruktúrájából ((13. 15) tétel); szűkebben fogalmazva: egy lokálisan konvex térben akkor is megállapítható, hogy mely halmazok konvexek, ha nem ismerjük a teljes lineáris struktúrát, azaz a tér (algebrai) konjugáltját, hanem csak a (topológiai) duálisát.

A 14. §-ban bevezetjük egy iránytér valamely részhalmaza „kvázi- $\mathfrak{R}$ -belsejének” fogalmát ((14. 1)—(14. 3)), amelyre az extrémális pont fogalmának 16. §-beli általánosításánál lesz szükségünk.

Egy lineáris tér bármely kételemű halmazának a tér természetes iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi- $\mathfrak{R}$ -belseje a két pont által meghatározott nyílt egyenes szakasz ((14. 7) tétel), tetszőleges halmaz kvázi- $\mathfrak{R}$ -belsejét pedig a (14. 5) képlet adja meg. Egy lokálisan konvex tér bármely véges algebrai dimenziójú részhalma-

zának a tér algebrai, ill. topológiai iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi- $\mathfrak{R}$ -belseje ugyanaz ((14. 8) tétel).

A kvázi- $\mathfrak{R}$ -belső pont fogalma lényegében az algebrai belső pont, ill. az intern pont (I. a (15. 1) definíciót) fogalmát pótolja általános irányterekben. E kapcsolat kimutatásának szenteljük a 15. §-t, s eredményül a (15. 6) tételt nyerjük: egy lineáris tér bármely, intern ponttal bíró konvex halmazának a tér természetes iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi- $\mathfrak{R}$ -belseje egybeesik a halmaz intern pontjainak halmazával.

A fejezet fő feladatának a klasszikus KREIN—MILMAN-tételnek topologikus irányterekre való általánosítását tekintjük. (Az epizódjellegű 15. §-tól eltekintve az egész fejezet lényegében a (17. 2) tétel előkészítése.)

(0. 12) KREIN ÉS MILMAN TÉTELE. *Lokálisan konvex T_2 -térben bármely kompakt, konvex halmaz egyben extrémális pontjai halmazának zárt konvex burka* ([39], vagy [38], 335).

E célra a 16. §-ban az extrémális pont fogalmának két különböző általánosítását vezetjük be irányterekre: az $\mathfrak{R}$ -extrémális pont és a gyenge $\mathfrak{R}$ -extrémális pont fogalmát ((16. 1), (16. 3)). Kimutatjuk, hogy lokálisan konvex térben — a konvexitáshoz hasonlóan — az extrémális pont közönséges fogalma is levezethető ($\mathfrak{R}$ -extrémális pontként és gyenge $\mathfrak{R}$ -extrémális pontként egyaránt) pusztán a tér topologikus iránystruktúrájából, vagyis lényegében a duálisából ((16. 5) tétel).

Végül a 17. §-ban megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a (0. 12) tétel (17. 1), (a) analogonját, ill. a vele ekvivalens (17. 2) tételt. Befejezésül pedig megmutatjuk, hogy a (17. 1), (a) tétel — több formai és fogalmazási eltérés ellenére — nemcsak analogonja, hanem csakugyan általánosítása (0. 12)-nek; pontosan: (17. 1), (a) implikálja a KREIN—MILMAN-tétel (17. 3) ekvivalens átfogalmazását.

*

A IV. fejezet egyes tartalmú; fő feladatának az I., II. és III. fejezet anyagával kapcsolatos nyitott kérdések, problémák ismertetését tekintjük. Megvizsgáljuk, hogy milyen irányokban lehetne az eddigieket továbbfejleszteni és milyen alkalmazásokra kellene törekedni.

Ebben a keretben továbbá történeti és irodalmi megjegyzéseket teszünk, és néhány további tétellel, valamint példával is kiegészítjük a dolgozat anyagát.

Különös figyelmet fordítunk egy valós függvénytan témakörre (bizonyos függvényegyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok vizsgálata), amelyről kimutatjuk, hogy szoros kapcsolatba hozható az iránytér és a topologikus iránytér fogalmával.

I. FEJEZET

AZ IRÁNYDIMENZIÓ FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE.
AZ EUKLIDÉSZI TEREK IRÁNYDIMENZIÓI

1. §. Az alapfogalmak: irány, iránystruktúra, iránydimenzió

(1. 1) DEFINÍCIÓ. Egy X tér egy *iránya* nyílt G és zárt F halmazokból alkotott (G, F) rendezett párok olyan $\mathcal{R}$ rendszere, amelyre a következő *irányaxiómák teljesülnek*:

(1. 1. 1.) $(\emptyset, \emptyset), (X, X) \in \mathcal{R}$;

(1. 1. 2) minden $(G, F) \in \mathcal{R}$ párra $G \subseteq F$; ha pedig $(G_1, F_1), (G_2, F_2) \in \mathcal{R}$, akkor az $F_1 \subseteq G_2, F_2 \subseteq G_1$ inklúziók egyike teljesül;

(1. 1. 3) az $\mathcal{R}$ -beli párok első tagjainak mindig $\mathcal{G}$ -vel jelölt családja az egyesítésre nézve zárt, azaz

$$\bigcup \{G : G \in \mathcal{G}^*\} \in \mathcal{G} \quad (\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}, \mathcal{G}^* \neq \emptyset);$$

(1. 1. 4) az $\mathcal{R}$ -beli párok második tagjainak mindig $\mathcal{F}$ -vel jelölt családja a metszésre nézve zárt, azaz

$$\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}^*\} \in \mathcal{F} \quad (\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}, \mathcal{F}^* \neq \emptyset).$$

(1. 1a) MEGJEGYZÉS. Egy $\mathcal{R}$ irány $(G_1, F_1), (G_2, F_2)$ elemeit akkor és csak akkor tekintjük különbözőeknek, ha halmazelméleti értelemben azok, vagyis ha $G_1 \neq G_2, F_1 \neq F_2$ egyenlőtlenségek egyike fennáll, függetlenül a formai (jelölésbeli) különbségektől. Előfordul majd pl., hogy valamely t paraméter különböző értékeihez ugyanaz a (G_t, F_t) pár tartozik; ilyenkor a megfelelő ekvivalencia-osztályok egy-egy reprezentánsából alkotott halmazt értjük $\mathcal{R}$ -en. Egyedüli kivétel ez alól a (2. 7) tétel bizonyítása.

(1. 2) JELÖLÉSEK. Valamely $\mathcal{R}$ irányhoz tartozó $\mathcal{G}$ és $\mathcal{F}$ családokat egymásra, ill. az $\mathcal{R}$ -re vonatkoztatva a

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}; \mathcal{F}), \mathcal{F}(\mathcal{R}; \mathcal{G}), \mathcal{G}(\mathcal{R}), \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

szimbólumokkal is fogjuk jelölni (az első kettőben egyértelműség esetén az $\mathcal{R}$ index el is hagyható). Ugyanezen szimbólumok szolgálnak majd valamely $\mathcal{R}$ irányhoz tartozó $\mathcal{G}(\mathcal{R}), \mathcal{F}(\mathcal{R})$ családok egymással kapcsolatos tetszőleges részcsaládjainak (amelyeket pl. egy $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ részhalmaz kiválasztásával nyerünk) jelölésére is, tekintet nélkül arra, hogy az utóbbiak teljesítik-e az összes irányaxiómákat. (Az (1. 1. 2) axiómát természetesen egy irány bármely részhalmaza is teljesíti.) Részletesen:

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}; \mathcal{G}^*) = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}), \text{ létezik egy } G \in \mathcal{G}^*, \\ \text{amelyre } (G, F) \in \mathcal{R}\} \quad (\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{R})),$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}; \mathcal{F}^*) = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), \text{ létezik egy } F \in \mathcal{F}^*, \\ \text{amelyre } (G, F) \in \mathcal{R}\} \quad (\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{R})),$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}^*) = \{F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}), \text{ létezik egy } G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), \\ \text{amelyre } (G, F) \in \mathcal{R}^*\} \quad (\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}),$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}^*) = \{G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), \text{ létezik egy } F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}), \\ \text{amelyre } (G, F) \in \mathcal{R}^*\} \quad (\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}).$$

(1. 3) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathcal{R}$ irányára vonatkoztatva a $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ halmazcsalád elemeit, továbbá ezek komplementumait *féltereknek* nevezzük; közöttük megkülönböztetünk *alsó és felső féltereket*, továbbá *nyílt és zárt féltereket*, az alábbiak szerint:

féltér	nyílt	zárt
alsó	G	F
felső	$X \setminus F$	$X \setminus G$

$$(G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})).$$

(Az elnevezéssel kapcsolatban vö. (3. 1)-gyel.)

(1. 4) MEGJEGYZÉS. Mivel a „nyílt féltér”, „zárt féltér” kifejezések esetleg félreérthetők (ha pl. valamely féltér nyílt halmaz, de nem „nyílt féltér” az (1. 3) értelemben, más szóval az

$$(\mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{R})) \cup (\{X \setminus G : G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\} \setminus \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\})$$

családnak egy nyílt-zárt eleme), megjegyezzük, hogy szükség esetén bármely $\mathcal{R}$ irány kibővíthető úgy, hogy minden olyan féltér, amely nyílt, ill. zárt halmaz, az (1. 3) értelemben nyílt féltér, ill. zárt féltér legyen.

Ha ui. $(G, F) \in \mathcal{R}$ és F nyílt halmaz, de $F \notin \mathcal{G}(\mathcal{R})$, ill. G zárt halmaz, de $G \notin \mathcal{F}(\mathcal{R})$, akkor $\mathcal{R}$ -hez csatolhatjuk az (F, F) , ill. (G, G) párt. (A két eset egyszerre is előfordulhat.)

Könnyen belátható, hogy egy $\mathcal{R}$ iránynak e kiegészítései függetlenek egymástól, és a kibővített rendszer szintén irány.

(1. 5) TÉTEL. Egy $\mathcal{R}$ irányban szereplő bármely alsó féltér az $\mathcal{R}$ -nek legfeljebb két különböző elemében fordul elő.

Bizonyítás. Ha $(G, F_1), (G, F_2), (G, F_3) \in \mathcal{R}$, akkor az (1. 1. 2) irányaxióma második része szerint van olyan $i, j \in \{1, 2, 3\}$ indexpár, hogy $F_i \subseteq G$ és $F_j \subseteq G$, és ezért — (1. 1. 2) első része következtében — $F_i = G = F_j$.

(1. 6) JELÖLÉSEK. Azt a tényt, hogy $(G, F) \in \mathcal{R}$, a $G = G(\mathcal{R}; F)$, vagy az $F = F(\mathcal{R}; G)$ szimbólummal is ki fogjuk fejezni. (1. 5) szerint a $G(\mathcal{R}; F)$ és $F(\mathcal{R}; G)$ szimbólumok nem okvetlenül egyértelműek, de legfeljebb kétértelműek. Jelöljük $G(\mathcal{R}; F)$ -fel, ill. $\bar{G}(\mathcal{R}; F)$ -fel a szűkebb, ill. bővebb $G(\mathcal{R}; F)$ halmazt és $F(\mathcal{R}; G)$ -vel ill. $\bar{F}(\mathcal{R}; G)$ -vel a szűkebb, ill. bővebb $F(\mathcal{R}; G)$ halmazt. Egyetlen $\mathcal{R}$ irány szereplése esetén az $\mathcal{R}$ indexet elhagyjuk. Ha egy állítást $G(F)$ -re, ill. $F(G)$ -re mondunk ki, az $\underline{G}(F)$ -re és $\bar{G}(F)$ -re, ill. $\underline{F}(G)$ -re és $\bar{F}(G)$ -re egyaránt vonatkozik.

Minden esetben

$$G \subseteq G^- \subseteq \underline{F}(G) \subseteq \bar{F}(G) \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})),$$

$$\underline{G}(F) \subseteq \bar{G}(F) \subseteq F^\circ \subseteq F \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})),$$

és ezen inklúziók bármelyike lehet egyenlőség.

(1. 7) TÉTEL. Minden $\mathcal{R}$ irányra

- (1. 7. 1) $\underline{F}(G) \subset \bar{F}(G) \Rightarrow G = \underline{F}(G) \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})),$
 (1. 7. 2) $\underline{G}(F) \subset \bar{G}(F) \Rightarrow F = \bar{G}(F) \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})),$
 (1. 7. 3) $G_1 \subset G_2 \Rightarrow \underline{F}(G_1) \subseteq G_2 \quad (G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{R})),$
 (1. 7. 4) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_1 \subseteq \bar{G}(F_2) \quad (F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{R})).$

Mindez az (1. 1. 2) irányaxióma közvetlen következménye.

(1. 8) TÉTEL. Ha $\mathcal{R}^*$ egy $\mathcal{R}$ irány nem-üres valódi részhalmaza, és $\mathcal{F}(\mathcal{R}^*)$ -nak nincs legbővebb, ill. $\mathcal{G}(\mathcal{R}^*)$ -nak nincs legszűkebb tagja, akkor

$$\bigcup \{F: F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*)\} = \bigcup \{G: G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),$$

ill.

$$\bigcap \{G: G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}^*)\} = \bigcap \{F: F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^*)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),$$

tehát az alsó feltérek $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ családja tetszőlegesen sok halmaz egyesítésének és metszésének műveletére nézve egyaránt zárt, s így ugyanez érvényes a felső feltérek családjára is.

Ez közvetlen következménye az (1. 1. 2) és az (1. 1. 3) ill. (1. 1. 4) irányaxiómáknak.

(1. 9) TÉTEL. Bármely X tér bármely $\mathcal{R}$ irányára:

(1. 9. 1) Az alsó feltérek $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ családja, és ezáltal a $\mathcal{G}(\mathcal{R}), \mathcal{F}(\mathcal{R})$ családok is a $\subset$ relációval rendezve vannak.

Ez (1. 1. 2) következménye.

(1. 9. 2) Az $\mathcal{R}$ halmaz a

$$(G_1, F_1) < (G_2, F_2) \quad ((G_1, F_1), (G_2, F_2) \in \mathcal{R}, F_1 \subseteq G_2)$$

relációval rendezve van.

Ez is (1. 1. 2)-ből következik. $\mathcal{R}$ bármely két eleme között fennáll ui. valamelyik irányban a $<$ viszony, és ez a reláció nyilvánvalóan tranzitív; ha pedig $(G_1, F_1) < (G_2, F_2)$ és $(G_2, F_2) < (G_1, F_1)$, akkor $G_1 \subseteq F_1 \subseteq G_2 \subseteq F_2 \subseteq G_1$, tehát $(G_1, F_1) = (G_2, F_2)$.

(1. 9. 3) A $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}), \mathcal{G}(\mathcal{R}), \mathcal{F}(\mathcal{R})$ családok mindegyike, ill. az $\mathcal{R}$ halmaz az (1. 9. 1), ill. (1. 9. 2) szerinti rendezésben hézagmentes.

Ez (1. 5)-ből és (1. 8)-ból következik.

(1. 9. 4) MEGJEGYZÉSEK.

1° A továbbiakban egy féltérccsalád, ill. egy $\mathcal{R}$ rendszer rendezésén mindig az (1. 9. 1), ill. (1. 9. 2) szerinti természetes rendezést értjük.

2° Egy X tér minden $\mathcal{R}$ irányának (mint rendezett halmaznak) nyilván $(\emptyset, \emptyset)$ az első és (X, X) az utolsó eleme.

3° Mivel egy $\mathcal{R}$ irány rendezése csak (1. 1. 2)-től függ, minden nem-üres $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ részhalmazt ismét az (1. 1. 2) szerinti, vagyis az $\mathcal{R}$ -től örökölt rendezéssel ellátottnak tekintünk.

(1. 10) TÉTEL. Bármely X tér bármely (rendezett) iránya, a rendezés-topológiával ellátva, kompakt Hausdorff-tér.

Bizonyítás. Minden rendezés-topologikus tér T_2 -tér, és amennyiben

(a) rendezés-teljes (azaz minden felülről korlátos részalmazának van szuprémuma), és

(b) van első és utolsó eleme,

akkor kompakt is (pl. [37], 81).

Az (a), ill. (b) feltétel (19. 4), 2° , ill. (1. 9. 3) szerint teljesül.

(1. 11) DEFINÍCIÓ. Egy X tér olyan $\mathcal{R}$ irányainak nem-üres $\mathfrak{R}$ rendszerét, amelyekben szereplő összes nyílt félterek a topológia egy szubbázisát szolgáltatják, *a tér egy iránystruktúrájának* (rövidítve: IS) nevezzük.

(1. 11a) MEGJEGYZÉSEK. 1° Egy tér $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ irányait akkor és csak akkor tekintjük különbözőnek, ha mint halmazok különbözők, függetlenül minden egyéb (jelölési, indexezési, származtatási) különbségtől (vö. az (1. 1) utáni megjegyzést); egy iránystruktúra számosságának fogalmát is ilyen értelemben használjuk. Egyetlen — elkerülhetetlen — kivétel a (2. 7) tétel bizonyítása.

2° Annak feltétele, hogy egy X tér irányainak valamely

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_k : k = 1, 2, \dots, n\}$$

véges rendszere az X térnek IS-ja legyen, így is fogalmazható: minden $x \in X$ ponthoz és annak minden U környezetéhez találhatók olyan

$$G_k \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_k), F_k \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

félterek, amelyekre

$$(1. 11. 1) \quad x \in \bigcap_{k=1}^n (G_k \setminus F_k) \subseteq U.$$

Ha ui. ebben a metszetben nem minden $\mathfrak{R}$ -beli irány volna képviselve, akkor minden hiányzóból szerepeltethetjük az $X \setminus \emptyset$ tényezőt; (1. 9. 1) és (1. 8) szerint pedig megállapodhatunk abban, hogy minden $\mathcal{R}_k$ irányból *csak egy* $G_k \setminus F_k$ alakú tényező szerepeljen.

(1. 12) Egy X tér minden nyílt és minden zárt halmaza féltér X valamely irányára vonatkozóan; a $\emptyset$ és X halmazokra pl.

$$(1. 12. 1) \quad \mathcal{R}_X = \{(\emptyset, \emptyset), (X, X)\}$$

egy ilyen irány, bármely nemtriviális nyílt G , ill. zárt F halmaz pedig pl. az

$$(1. 12. 2) \quad \mathcal{R}_G = \{(\emptyset, \emptyset), (G, G^-), (X, X)\},$$

ill.

$$(1. 12. 3) \quad \mathcal{R}_F = \{(\emptyset, \emptyset), (F^\circ, F), (X, X)\}$$

nyilvánvaló irányokra nézve féltér. Ebből könnyen következik:

(1. 13) TÉTEL. Minden térnek van iránystruktúrája.

Ha ui. $\mathfrak{G}$ egy X tér összes nem-üres nyílt halmazainak családja (vagy akár csak egy bázisa), akkor az (1. 12. 2) jelöléssel

$$(1. 13. 1) \quad \mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_G : G \in \mathfrak{G}\}$$

a térnek egy IS-ja.

A kardinális számok nagyság szerinti jólrendezettsége alapján minden tér IS-i között van minimális számosságú, s innen származnak a következő — az I. és a II. fejezet alapjául szolgáló — definíciók:

(1. 14) DEFINÍCIÓ. (a) Egy X tér — $\text{Dim } X$ -szel jelölt — *iránydimenziója*: iránystruktúrái számosságainak minimuma;

(b) $\text{Dim } \emptyset = 0$.

Ez a definíció minden X térhez egyértelműen hozzárendel egy $\text{Dim } X \geq 1$ kardinális számot.*

(1. 15) DEFINÍCIÓ. Egy X tér minden olyan $\mathfrak{R}$ IS-ját, amelyre $\overline{\mathfrak{R}} = \text{Dim } X$, X *minimális iránystruktúrájának* nevezzük.

Szükségünk lesz az irány fogalmának következő élesítésére is:

(1. 16) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathcal{R}$ iránya *rendes irány*, ha

$$(1. 16. 1) \quad \bigcup \{F \setminus G : (G, F) \in \mathcal{R}\} = X.$$

(1. 17) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathfrak{R}$ IS-ja *rendes iránystruktúra*, ha minden $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ irány *rendes*.

(1. 18) A *rendes irányokat* a 6. §-ban vizsgáljuk meg közelebbről. Itt annyit jegyzünk meg, hogy

(a) egy $\mathcal{R}$ iránynak (1. 4) értelmében való kibővítése az irány *rendességét*, ill. *nem-rendességét* nem változtatja meg;

(b) minden X térnek van *rendes iránya*; ilyen pl. az

$$(1. 18. 1) \quad \mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

irány;

(c) *rendes IS-ja* azonban nem minden térnek van (pl. T_0 -térnek akkor és csak akkor, ha teljesen reguláris, l. a (8. 3) tételt), ezért szükséges a következő

(1. 19) DEFINÍCIÓ. Egy tér *gyengén rendes*, ha van *rendes iránystruktúrája*.

Kérdéses továbbá, hogy egy *gyengén rendes tér* minimális IS-i között is van-e *rendes*:

(1. 20) DEFINÍCIÓ. Egy tér *rendes*, ha van *rendes minimális iránystruktúrája*.

2. §. Az iránydimenzió monotonitása.

Egy szorzat- és egy egyesítési tétel

E paragrafusban adott terek adott IS-iból az alterek, szorzatterek, ill. egyesítések számára természetes módon adódó IS-kkal foglalkozunk.

(2. 1) DEFINÍCIÓ. Legyen $f: Y \rightarrow X$ egy nem-üres halmaz tetszőleges leképezése egy X térbe. Valamely X -beli $\mathcal{R}$ irány, ill. $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_\alpha : \alpha \in A\}$ iránystruktúra *f-re vonat-*

* $\text{Dim } X$ definícióját módosíthatnánk úgy, hogy bizonyos (nem-üres) terek — pl. az indiszkrét terek, s köztük a 0-dimenziós euklidészi tér — iránydimenziója is 0 legyen. Ez egyrészt erősítené az analógiát a Menger—Uriszón-dimenzióval, és lehetővé tenné pl. a (10. 1) beágyazási tétel harmonikus (bár nem lényeges) kiegészítését; másrészt azonban nehézségeket okozna egyes tételek (pl. a (2. 7) egyesítési tétel) megfogalmazásánál.

kozó inverz képének az

$$(2.1.1) \quad \mathcal{R}' = \{(f^{-1}[G], f^{-1}[F]): (G, F) \in \mathcal{R}\},$$

ill.

$$(2.1.2) \quad \mathcal{R}' = \{\mathcal{R}'_\alpha: \alpha \in A\}$$

rendszeret nevezzük.

MEGJEGYZÉS. Előfordulhat, hogy $\mathcal{R}$, ill. $\mathcal{R}$ több különböző elemének ugyanazon elem felel meg $\mathcal{R}'$ -ben, ill. $\mathcal{R}'$ -ben. Ekkor az (1.1a) megjegyzés értelmében mindig hallgatólágosan feltesszük, hogy az egybeeső elemeket egyetlen reprezentánsuk képviseli.

(2.2) **TÉTEL.** Ha X, Y tetszőleges terek és $f: Y \rightarrow X$ folytonos leképezés, akkor minden X -beli (rendes) $\mathcal{R}$ irány $\mathcal{R}'$ inverz képe Y -ban (rendes) irány.

Bizonyítás. Az

$$f^{-1}[G] \ (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})), \ f^{-1}[F] \ (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}))$$

halmazok f folytonossága miatt nyíltak, ill. zártak, az (1.1.1)–(1.1.4) irány-axiómák pedig még tetszőleges leképezésnél is nyilván teljesülnek. Hasonlóan, ha $\mathcal{R}$ rendes,

$$\begin{aligned} \bigcup \{f^{-1}[F] \setminus f^{-1}[G]: (G, F) \in \mathcal{R}\} &= \bigcup \{f^{-1}[F \setminus G]: (G, F) \in \mathcal{R}\} = \\ &= f^{-1}[\bigcup \{F \setminus G: (G, F) \in \mathcal{R}\}] = f^{-1}[X] = Y, \end{aligned}$$

azaz $\mathcal{R}'$ is rendes.

A (2.2) tétel feltételei mellett egy X -beli iránystruktúra inverz képe nem okvetlenül IS-ja Y -nak. Ennek biztosítására a folytonosságnál erősebb feltétellel van szükség:

(2.3) **TÉTEL.** Legyen X tetszőleges tér. Ha egy nem-üres Y halmazt egy tetszőleges $f: Y \rightarrow X$ leképezésből származó inverzkép-topológiával látunk el — vagyis Y egy részhalmaza akkor és csak akkor nyílt, ha valamely X -beli nyílt halmaz inverz képe — akkor minden X -beli (rendes) $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_\alpha: \alpha \in A\}$ IS $\mathcal{R}'$ inverz képe (rendes) IS-ja az Y térnek.

Bizonyítás. 1° Az $\mathcal{R}'$ rendszer $\mathcal{R}'_\alpha$ elemei (2.2) szerint — $\mathcal{R}$ rendessége esetén rendes — irányok az Y térben.

2° Ha $y \in Y$ tetszőleges pont és V y -nak tetszőleges nyílt környezete, vagyis $V = f^{-1}[U]$ valamely $U \subseteq X$ nyílt halmazra, akkor létezik olyan $A^* \subseteq A$ véges halmaz, és vannak olyan

$$G_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha), \ F_\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A^*)$$

félterek, hogy

$$f(y) \in \bigcap \{G_\alpha \setminus F_\alpha: \alpha \in A^*\} \subseteq U,$$

tehát

$$y \in \bigcap \{f^{-1}[G_\alpha] \setminus f^{-1}[F_\alpha]: \alpha \in A^*\} \subseteq V;$$

$\mathcal{R}'$ tehát IS-ja Y -nak.

(2.4) **DEFINÍCIÓ.** Egy X tér valamely $\mathcal{R}$ iránya, ill. $\mathcal{R}$ IS-ja által egy nem-üres X' altérben indukált iránynak, ill. IS-nak az $\mathcal{R}$ -nek, ill. az $\mathcal{R}$ -nek az injektív leképe-

zésre vonatkozó $\mathcal{R}'$, ill. $\mathfrak{R}'$ inverz képét nevezzük, vagyis

$$\mathcal{R}' = \{(G \cap X', F \cap X') : (G, F) \in \mathcal{R}\},$$

$$\mathfrak{R}' = \{\mathcal{R}' : \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

Az injektív leképezésből származó inverzkép-topológia éppen az X' altér (relatív) topológiája, s ennek alapján következnek a (2. 2) tételből az alterekre vonatkozó állítások:

(2. 5) TÉTEL. Legyen X' egy X tér tetszőleges nem-üres altere.

(a) AZ IRÁNYDIMENZIÓ MONOTONITÁSA: $\text{Dim } X' \leq \text{Dim } X$.

(b) Ha az X tér gyengén rendes, X' is az.

(c) Ha az X tér rendes és $\text{Dim } X = 1$, akkor X' is ilyen tulajdonságú.

Bizonyítás. 1° Ha $\mathfrak{R}$ az X térnek egy minimális IS-ja, akkor (2. 3) szerint

$$\text{Dim } X' \leq \overline{\mathfrak{R}}' \leq \overline{\mathfrak{R}} = \text{Dim } X,$$

tehát (a) teljesül. (Megjegyezzük, hogy több $\mathfrak{R}$ -beli irány által indukált irányok esetleges egybeesése következtében $\overline{\mathfrak{R}}' < \overline{\mathfrak{R}}$ is előfordulhat.)

2° (b), ill. (c) bizonyításához elegendő a (2. 3) tételt az X tér egy rendes, ill. rendes minimális IS-ja által X' -ben indukált IS-ra alkalmazni, továbbá (c)-nél hivatkozni arra, hogy nem-üres tér iránydimenziója definíció szerint legalább 1.

A következő két — lényegében együtt bizonyítható — tétel egyike, a (2. 6), (a) tétel, a MENGER—URISZON-elmélet (0. 6) szorzattételének analogonja. Megfogalmazása — mivel a koordinátaterек számát és azok minőségét illetően egyaránt mentes minden megszorítástól — általánosabb, mint a klasszikus szorzattételé, vagy akár az utóbbi különböző ismert általánosításaié.

(2. 6) SZORZATTÉTELEK. (a) Terek tetszőleges nem-üres $\{X_\beta : \beta \in B\}$ családjának

$$X = \prod \{X_\beta : \beta \in B\}$$

topologikus szorzatára

$$(2. 6. 1) \quad \text{Dim } X \leq \Sigma \{\text{Dim } X_\beta : \beta \in B\}.$$

(b) Gyengén rendes terek tetszőleges nem-üres családjának topologikus szorzata szintén gyengén rendes tér.

Bizonyítás. 1° Legyen

$$\mathfrak{R}_\beta = \{\mathcal{R}_{\beta, \alpha} : \alpha \in A_\beta\} \quad (\beta \in B)$$

a megfelelő X_β koordinátaterек egy-egy IS-ja, f_β az X szorzattér vetülete a megfelelő X_β térre és

$$(2. 6. 2) \quad E' = f_\beta^{-1}[E] = \{x \in X : x_\beta \in E\} \quad (E \subseteq X_\beta, \beta \in B),$$

ahol x_β az $x \in X$ pontnak X_β -beli koordinátáját jelenti.

Mivel az f_β leképezése minden $\beta \in B$ -re folytonos, a (2. 2) tétel szerint minden $\mathcal{R}_{\beta, \alpha}$ ($\alpha \in A_\beta, \beta \in B$) irány $\mathcal{R}'_{\beta, \alpha}$ inverz képe a megfelelő f_β -ra vonatkozóan az X tér egy iránya.

2° **Bebizonyítjuk, hogy ezen irányok**

$$(2.6.3) \quad \mathfrak{R} = \{\mathcal{R}'_{\beta,\alpha} : \alpha \in A_\beta, \beta \in B\}$$

halmaza IS-ja X -nek.

Legyen $x \in X$ és U x -nek egy környezete. Legyen továbbá $B^* \subseteq B$ olyan véges, nem-üres halmaz és legyenek

$$U_\beta \subseteq X_\beta \quad (\beta \in B^*)$$

olyan nyílt halmazok, hogy — a (2.6.2) jelöléssel —

$$(2.6.4) \quad x \in \bigcap \{U'_\beta : \beta \in B^*\} \subseteq U.$$

Legyenek továbbá $A_\beta^* \subseteq A_\beta$ olyan véges nem-üres halmazok,

$$\mathcal{R}_{\beta,\alpha} \in \mathfrak{R}_\beta \quad (\alpha \in A_\beta^*, \beta \in B^*)$$

olyan irányok és

$$G_{\beta,\alpha} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{\beta,\alpha}), \quad F_{\beta,\alpha} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_{\beta,\alpha}) \quad (\alpha \in A_\beta^*, \beta \in B^*)$$

olyan feltérek, hogy

$$(2.6.5) \quad x_\beta \in \bigcap \{G_{\beta,\alpha} \setminus F_{\beta,\alpha} : \alpha \in A_\beta^*\} \subseteq U_\beta \quad (\beta \in B^*).$$

Ekkor (2.6.4) és (2.6.5) szerint

$$x \in \bigcap \{(G_{\beta,\alpha} \setminus F_{\beta,\alpha})' : \alpha \in A_\beta^*, \beta \in B^*\} = \bigcap \{G'_{\beta,\alpha} \setminus F'_{\beta,\alpha} : \alpha \in A_\beta^*, \beta \in B^*\} \subseteq U,$$

ahol

$$G'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}'_{\beta,\alpha}), \quad F'_{\beta,\alpha} \in \mathcal{F}(\mathcal{R}'_{\beta,\alpha}) \quad (\alpha \in A_\beta^*, \beta \in B^*),$$

tehát a (2.6.3) rendszer valóban IS-ja X -nek, qu.e.d.

3° Az (a) tétel bizonyítására tegyük fel, hogy minden $\mathfrak{R}_\beta$ *minimális* IS-ja a megfelelő X_β -nak, azaz

$$\overline{\mathfrak{R}}_\beta = \text{Dim } X_\beta \quad (\beta \in B).$$

Ekkor, állításunknak megfelelően,

$$\text{Dim } X \leq \overline{\mathfrak{R}} \leq \sum \{\overline{\mathfrak{R}}_\beta : \beta \in B\} = \sum \{\text{Dim } X_\beta : \beta \in B\}.$$

4° A (b) tétel bizonyítására elég belátni, hogy amennyiben minden $\mathfrak{R}_\beta$ *rendes* IS-ja a megfelelő X_β -nak, $\mathfrak{R}$ is *rendes* IS-ja X -nek, s ez azonnal következik a rendesség (1.16.1) definíciójából és a triviális

$$(M \setminus N)' = M' \setminus N' \quad (M, N \subseteq X_\beta, \beta \in B)$$

azonosságból.

A következő tétel HUREWICZ (0.7) egyesítési tételével analóg. Itt viszont sajnos lényegesen erősebb feltételeknek kell alávetni az összeadandókat, mint a példaképpül szolgáló klasszikus tételben:

(2.7) **EGYESÍTÉSI TÉTEL.** Ha $\{X_k : k = 1, 2, \dots\}$ egy X tér nyílt-zárt halmazainak egy megszámlálható családja, és

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k,$$

akkor

$$\text{Dim } X = \sup \{\text{Dim } X_k : k = 1, 2, \dots\}.$$

Bizonyítás. Legyen A olyan halmaz, amelyre

$$\bar{A} = \sup \{ \text{Dim } X_k : k = 1, 2, \dots \},$$

továbbá

$$\mathfrak{R}_k = \{ \mathcal{R}_{k,\alpha} : \alpha \in A \} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

a megfelelő X_k terek egy-egy IS-ja. (Itt kivételesen megengedjük az (1. 1a), (1. 11a) megállapodásokkal szemben, hogy valamely k -ra az $\mathcal{R}_{k,\alpha}$ irányok között, továbbá valamely k, α párra $\mathcal{R}_{k,\alpha}$ elemei között csupán az indexezéssel megkülönböztetett egyenlők is szerepeljenek.) Az

$$X_0 = \emptyset,$$

$$E' = E \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} X_i \right)$$

jelölésekkel az

$$(E \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{k,\alpha}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}_{k,\alpha}); k = 1, 2, \dots; \alpha \in A)$$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ (G', F') : (G, F) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_{k,\alpha} \right\} \cup \{(X, X)\} \quad (\alpha \in A)$$

rendszerek az X tér irányaiává válnak (az irányaxiómák nyilvánvalóan teljesülnek).

Legyen most $x \in X$ és U az x pontnak egy környezete. Legyen továbbá

$$(2.7.1) \quad k_x = \min \{ k : x \in X_k \}.$$

Legyen $A^* \subseteq A$ olyan véges nem-üres halmaz és legyenek

$$G_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{k_x, \alpha}), F_\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_{k_x, \alpha}) \quad (\alpha \in A^*)$$

olyan félterek, hogy

$$(2.7.2) \quad x \in \bigcap_{\alpha \in A^*} (G_\alpha \setminus F_\alpha) \subseteq U \cap X_{k_x}.$$

Mivel (2.7.1) szerint $x \notin \bigcup_{i=0}^{k_x-1} X_i$, (2.7.2)-ből

$$x \in \bigcap_{\alpha \in A^*} (G'_\alpha \setminus F'_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A^*} (G_\alpha \setminus F_\alpha) \subseteq U$$

következik, ahol

$$G'_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha), F'_\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A^*).$$

Az X térnek tehát

$$\mathfrak{R} = \{ \mathcal{R}_\alpha : \alpha \in A \}$$

egy IS-ja, és $\text{Dim } X \leq \bar{A}$. Mivel pedig

$$\text{Dim } X \geq \text{Dim } X_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

miatt $\text{Dim } X \geq \bar{A}$, végül is $\text{Dim } X = \bar{A}$ következik, qu.e.d.

3. §. Vegyes tételek és példák

(3. 1) Egy topologikus tér iránystruktúrájának fogalma az euklidészi terek Descartes-koordinátastruktúrájának általánosítása. Ha ui. n természetes szám és

$$E_n = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}): -\infty < x^{(i)} < \infty \ (i = 1, 2, \dots, n)\},$$

$$(3. 1. 1) \quad \begin{aligned} G_{i,t} &= \{x: x^{(i)} < t\} \\ F_{i,t} &= \{x: x^{(i)} \leq t\} \end{aligned} \quad (-\infty < t < \infty, \ i = 1, 2, \dots, n),$$

akkor minden

$$\mathcal{R}_i = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(G_{i,t}, F_{i,t}): -\infty < t < \infty\} \cup \{(E_n, E_n)\}$$

halmaz egy (rendes) iránya, az

$$(3. 1. 2) \quad \mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i: i = 1, 2, \dots, n\}$$

rendszer pedig egy rendes IS-ja az E_n euklidészi térnek. Az E_n eme „szokásos” iránystruktúrájában szereplő félterek — az üres halmaz és az egész tér kivételével — megegyeznek a szokásosan féltérnek nevezett halmazokkal (s ez indokolja az (1. 3)-ban bevezetett „féltér” elnevezést); az (1. 11. 1)-beli véges metszetek pedig éppen az E_n tér nyílt intervallumainak felelnek meg.

Nyilvánvaló tehát, hogy

$$(3. 1. 3) \quad \dim E_n \leq n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

és természetesen $\dim E_1 = 1$; azt az eléggé kézenfekvő sejtést, hogy minden n -re $\dim E_n = n$ (más szóval, hogy minden E_n szokásos IS-ja minimális IS) az 5. §-ban igazoljuk (az $n=2$ esetre (2. 5), 1^o-ben külön bizonyítást is adunk).

(3. 2) TÉTEL. Minden X térre $\dim X \leq \tau(X)$.

A bizonyításhoz elegendő az (1. 13. 1) példát figyelembe venni.

Így például minden megszámlálható bázisú X térre $\dim X \leq \aleph_0$. Ismét kézenfekvő a sejtés, hogy a Hilbert-tér — amely univerzális tere az összes szeparábilis metrikus tereknek, tehát az összes euklidészi tereknek is — iránydimenziója $\aleph_0$; ezt (5. 2)-ben igazoljuk.

(3. 3) TÉTEL. Bármely $\alpha > 0$ kardinális számhoz található olyan X tér, amelyre $\dim X = \alpha$.

Bizonyítás. 1^o Véges α -ra az (5. 1) tétel igazolni fogja állításunkat, azonban már itt is bemutatathatunk egy egyszerű példát.

Legyen n egy természetes szám és X_n az a topologikus tér, amelynek alaphalmaza $\{1, 2, \dots, n+1\}$, és nem-üres nyílt halmazai az

$$\{1, 2, \dots, k\} \quad (k = 1, 2, \dots, n+1)$$

halmazok (amelyeknek családja egyben X_n egyetlen bázisa). E térben bármely nem-üres nyílt halmaz lezárása maga X_n , s ezért csupán a

$$\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, F), (X_n, X_n)\} \quad (F \text{ nem-üres zárt halmaz})$$

és a

$$\{(\emptyset, \emptyset), (G, X_n), (X_n, X_n)\} \quad (G \text{ nem-triviális nyílt halmaz})$$

típusú $\mathcal{R}$ irányok szolgáltatnak legalább egy nem-triviális

$$G \setminus F \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}))$$

halmazt. Mivel azonban ezen irányok bármelyike *csak egy* ilyen bázis-halmazt szolgáltat, a tér minden IS-ja legalább n irányt tartalmaz, és ennyi (alkalmasan választott) irány elegendő is; vagyis $\text{Dim } X_n = n$, qu.e.d.

2° Ha az α kardinális szám végtelen, a fenti konstrukció egy variánsa — a jólrendezési tétel alkalmazásával — még többet nyújt: olyan X_α teret szolgáltat, amelyre

$$\overline{X}_\alpha = \text{Dim } X_\alpha = \tau(X_\alpha) = \alpha.$$

Tekintsük ui. egy α számosságú X_α halmaznak egy jólrendezését, és topologizáljuk X -et úgy, hogy éppen a rendezés szerinti kezdetek legyenek a nyílt halmazok. E topológiának van egy minimális bázisa, amely minden más bázisnak részcsaládja, ti. a

$$\{B_x: x \in X_\alpha\}$$

halmazcsalád, ahol

$$B_x = \{y: y \in X_\alpha, y \leq x\} \quad (x \in X_\alpha).$$

Ebből $\tau(X_\alpha) = \alpha$, és — az 1°-beli megfontolással — $\text{Dim } X_\alpha = \tau(X_\alpha)$ következik, qu.e.d.

(3. 3. 1) MEGJEGYZÉS. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$\text{ind } X_n = n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A 2°-ben leírt X_α tereknek (végtelen α -ra) azonban nincs Menger—Uriszon-dimenziójuk, még a transzfinit értelemben sem. Ez könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy egy ilyen (jólrendezett) X_α tér első pontja legszűkebb nyílt környezetének (ez éppen a megfelelő egy pontos halmaz) határa X_α -val homeomorf. Ebben a pontban — és hasonlóan minden véges kezdet utolsó pontjában, vagyis megszámlálhatóan végtelen sok pontban — tehát a Menger—Uriszon-dimenzió biztosan nem létezik.

(3. 4) TÉTEL. Ha egy legalább 3 pontot tartalmazó X T_0 -tér olyan tulajdonságú, hogy bármely $x \in X$ pontra az $X \setminus \{x\}$ altér összefüggő, akkor $\text{Dim } X \geq 2$.

Bizonyítás. 1° Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis, hogy $\text{Dim } X = 1$, tekintsük az X térnek valamely egyetlen irányt tartalmazó $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}\}$ IS-ját, és rendezzük az X halmazt a következőképpen:

ha $x_1, x_2 \in X$ és $x_1 \neq x_2$, akkor és csak akkor legyen $x_1 < x_2$, ha létezik olyan $M \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ feltér, amelyre $x_1 \in M$ és $x_2 \notin M$.

Ez a reláció valóban rendezi az X halmazt:

(a) Ha $x_1, x_2 \in X$ és $x_1 \neq x_2$, akkor az $x_1 < x_2, x_2 < x_1$ relációk egyike fennáll. Legyen ui. V pl. x_1 -nek olyan nyílt környezete, amely x_2 -t nem tartalmazza, és legyenek $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ olyan feltérek, hogy $x_1 \in G \setminus F \subseteq V$. Ekkor aszerint, hogy $x_2 \notin G$, ill. $x_2 \in F$, $x_1 < x_2$, ill. $x_2 < x_1$.

(b) Az $x_1 < x_2, x_2 < x_1$ relációk nem állhatnak fenn egyidejűleg. Az első, ill. második ui. olyan M ill. N alsó feltér létezését jelenti, amelyre $x_1 \in M, x_2 \notin M$, ill. $x_1 \notin N, x_2 \in N$. Ha ilyen M és N léteznék, sem az $M \subset N$, sem az $N \subset M$ inklúzió, sem pedig $M = N$ nem állhatna fenn, holott az $\mathcal{R}$ -beli alsó feltérek (1. 9. 1) szerint az inklúzióval teljesen rendezve vannak.

(c) A $<$ reláció tranzitív. Ha ui. $x_1 < x_2$ és $x_2 < x_3$, akkor léteznek olyan M, N alsó félterek, amelyekre

$$x_1 \in M, x_2 \notin M, x_2 \in N, x_3 \notin N.$$

Ekkor (1. 9. 1) szerint $M \subset N$, s ezért $x_1 \in N$, vagyis $x_1 < x_3$.

2° Legyen most x_0 a rendezett X halmaz egy tetszőleges, de nem első és nem utolsó — vagyis olyan eleme, amelyre

$$Y = \{x \in X: x < x_0\} \neq \emptyset, \quad Z = \{x \in X: x > x_0\} \neq \emptyset.$$

Az $Y \cup Z = X \setminus \{x_0\}$ altér a feltevés szerint összefüggő, tehát

$$(3. 4. 1) \quad Y^- \cap Z^- \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset.$$

3° Fennáll továbbá

$$(3. 4. 2) \quad Y^- \cap Z = Z^- \cap Y = \emptyset,$$

más szóval: bármely $x \in Z$, ill. $x \in Y$ pontnak van olyan nyílt U környezete, amelyre $Y \cap U = \emptyset$, ill. $Z \cap U = \emptyset$.

Ezt példaképpen az $x_1 \in Z$ esetre bizonyítjuk be. Minden $x \in Y$ ponthoz rendeljünk egy olyan M_x alsó félteret, amelyre $x \in M_x$ és $x_0 \notin M_x$. Ekkor (1. 8) szerint

$$M = \bigcup \{M_x: x \in Y\} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}),$$

és $Y \subseteq M$, továbbá ($x_0 \notin M$ miatt) $x_1 \notin M$.

Ha mármost az M halmaz zárt, akkor $X \setminus M$ az x_1 pont keresett U környezete. Ha azonban M nem zárt, azaz $M \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, akkor $x_1 \notin \overline{F(M)}$, különben $x_0 \notin M$ és $x_0 < x_1$ miatt léteznie kellene egy N félternek, amelyre $M \subset N \subset F(M)$, s ez ellentmond az (1. 1. 2) irányaxiómának; ez esetben tehát $X \setminus \overline{F(M)}$ az x_1 pont keresett nyílt U környezete. ((3. 4. 2) másik részének bizonyítása teljesen analóg.)

4° A (3. 4. 1), (3. 4. 2) következmények ellentmondanak egymásnak; ezzel a $\text{Dim } X = 1$ feltevést megcáfoltuk, s a tételt bebizonyítottuk.

(3. 5) A (3. 4) tétel néhány alkalmazása:

1° $\text{Dim } E_n \geq 2$ ($n = 2, 3, \dots$), tehát (3. 1. 3) szerint speciálisan $\text{Dim } E_2 = 2$. Az E_1, E_2 terek — s mint az 5. §-ban bizonyítani fogjuk, az összes euklidészi terek — $\text{Dim } X$ és $\text{ind } X$ egyezésének legfontosabb példái. A (3. 4) tétel azonban a legérdekesebb példákat a $\text{Dim } X > \text{ind } X$ esetre szolgáltatja.

2° Ha K az E_2 tér egy zárt körvonala, $\text{Dim } K = 2$ (vö. $\text{ind } K = 1$). Ez az egyszerű példa világosan szemlélteti az $\text{ind } X$, ill. $\text{Dim } X$ definíciójának lokális, ill. globális jellege okozta különbséget: a MENGER—URISZON-elmélet lokális szemléletében a körvonal ekvivalens a számegegyessel.

3° Legyen $n \geq 2$, $X \subset E_n$ és

$$(3. 5. 1) \quad \overline{E_n \setminus X} < \aleph;$$

akkor az X altérre $\text{Dim } X \geq 2$.

Bizonyítás. A (3. 4) tétel szerint elegendő azt kimutatni, hogy minden ilyen X tér összefüggő. Ha valamely ilyen X térben léteznének nem-üres, diszjunkt s a teret együtt kitöltő nyílt U, V halmazok, akkor bármely $x \in U, y \in V$ pontpárra

és minden E_n -beli folytonos, $\{x, y\}$ -t tartalmazó L vonalra

$$(3.5.2) \quad L \cap (E_n \setminus X) \neq \emptyset.$$

Legyen ekkor $\mathcal{L}$ az $\{x, y\}$ -t tartalmazó folytonos vonalaknak olyan kontinuum-számoságú családja, amelyre

$$(3.5.3) \quad L_1 \cap L_2 = \{x, y\} \quad (L_1, L_2 \in \mathcal{L})$$

(ilyen $\mathcal{L}$ család triviálisan létezik). Mivel ekkor (3.5.2) és (3.5.3) szerint

$$\bigcup \{L \cap (E_n \setminus X) : L \in \mathcal{L}\}$$

kontinuum-számoságú halmaz, $\overline{E_n \setminus X} = \aleph$; ez azonban ellentmond a (3.5.1) feltevésnek, qu.e.d.

Legyen pl. E_2^1 az E_2 tér azon pontjainak halmaza, amelyeknek nem mindkét koordinátája racionális. Ekkor $\overline{E_2 \setminus E_2^1} = \aleph_0 < \aleph$, tehát az előbbiek szerint az E_2^1 altérre $\dim E_2^1 \geq 2$, s figyelembe véve (3.1.3)-at és az iránydimenzió (2.5), (a)-ban bizonyított monotonitását, $\dim E_2^1 = 2$ (vö. ind $E_2^1 = 1$, pl. [31] 29, 42).

A következő példák rendes IS-kra és rendes terekre vonatkoznak.

(3.6) TÉTEL. Minden diszkrét X tér rendes, és iránydimenziója 1.

Bizonyítás. 1° Tekintsük X alaphalmazának egy rendezését, és jelöljük $\mathcal{A}$ -val az alaphalmaz összes kezdeteinek családját. Ekkor az

$$\mathcal{R} = \{(A, A) : A \in \mathcal{A}\}$$

rendszer az X tér egy iránya (az (1.1.1), (1.1.2) axiómák triviálisan, az (1.1.3), (1.1.4) axiómák pedig

$$\begin{aligned} \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}^*\} &\in \mathcal{A} \\ \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}^*\} &\in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \neq \emptyset)$$

alapján teljesülnek); $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}\}$ pedig IS-ja X -nek, hiszen az

$$(3.6.1) \quad \begin{aligned} A_x &= \{y : y \in X, y < x\} = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}, x \notin A\} \\ B_x &= \{y : y \in X, y \leq x\} = \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}, x \in A\} \end{aligned}$$

kezdetekre $A_x \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, $B_x \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$ és

$$(3.6.2) \quad \{x\} = B_x \setminus A_x \quad (x \in X).$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\dim X = 1$. (Megjegyzés: ind $X = 0$.)

2° X -nek 1°-ben leírt IS-ja nyilván nem rendes, sőt példája a „legkevésbé rendes” IS-nak, hiszen

$$\bigcup \{F \setminus G : (G, F) \in \mathcal{R}\} = \emptyset.$$

Az $\mathcal{R}$ irány azonban rendes iránnyá egészíthető ki. Legyen ui.

$$\mathcal{R}_1 = \{(A_x, B_x) : x \in X\}, \mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1.$$

(3.6.1) szerint $\mathcal{R}'$ is iránya X -nek, s mivel tartalmazza $\mathcal{R}$ -t, $\mathcal{R}' = \{\mathcal{R}'\}$ IS-ja X -nek.

Végül: $\mathfrak{R}'$ rendes IS, hiszen (3. 6. 2) szerint

$$\bigcup \{F \setminus G: (G, F) \in \mathcal{R}\} = \bigcup_{x \in X} (B_x \setminus A_x) = X.$$

Ezzel igazoltuk az X tér rendességét.

MEGJEGYZÉS. Egy tér rendessége megállapításának e módszerét (ti. valamely minimális IS irányainak kiegészítését rendes irányokká) sikerrel alkalmazhatjuk a rendes tereknek egy — a diszkrét terek osztályát tartalmazó, de annál sokkal bővebb — osztályánál, a tökéletesen normális tereknél (7. §).

Itt, további egyszerű példaként, a rendezés-topologikus terek osztályát említjük meg, amely az iránydimenzió vizsgálatánál fontos szerepet játszik ((8. 4) és a 9. §).

(3. 7) **TÉTEL.** Minden rendezés-topologikus X tér rendes, és iránydimenziója 1.

Bizonyítás. 1° (2. 5), (c) szerint az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az X halmaz rendezése teljes, hiszen, mint ismeretes, bármely nem-teljes rendezésű rendezés-topologikus tér topologikusan beágyazható egy teljes rendezésűbe.

2° Legyen

$$(3. 7. 1) \quad \begin{aligned} G_x &= \{y: y \in X, y < x\} \\ F_x &= \{y: y \in X, y \leq x\} \end{aligned} \quad (x \in X);$$

akkor az

$$(3. 7. 2) \quad \mathcal{R} = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(G_x, F_x): x \in X\} \cup \{(X, X)\}$$

rendszer nyilván teljesíti az (1. 1. 1), (1. 1. 2) irányaxiómákat, az (1. 1. 3), (1. 1. 4) axiómák teljesülése pedig abból következik, hogy az

$$\begin{aligned} x^* &= \sup \{x: x \in X^*\} \\ x_* &= \inf \{x: x \in X^*\} \end{aligned} \quad (X^* \subseteq X, X^* \neq \emptyset)$$

j előlésekkel — a rendezés teljessége miatt —

$$\bigcup \{G_x: x \in X^*\} = G_{x^*}, \quad \bigcap \{F_x: x \in X^*\} = F_{x^*}.$$

$\mathcal{R}$ tehát az X tér egy iránya.

3° (3. 7. 1)-ből kitűnik, hogy $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}\}$ az X -nek IS-ja, tehát $\dim X = 1$.

4° Az $\mathcal{R}$ irány rendes, hiszen

$$x \in F_x \setminus G_x \quad (x \in X).$$

X tehát rendes tér.

MEGJEGYZÉSEK. 1° Minden rendezés-topologikus X térre $\text{ind } X \leq 1$.

2° A (3. 7) tétel nem fordítható meg. Bármely indiszkrét tér, amely legalább 2 pontot tartalmaz, példa olyan 1-iránydimenziójú rendes térre (l. (1. 12. 1)), amely nem rendezés-topologikus.

Befejezésül megemlítjük, hogy az összes, e §-ban példaképpen felhozott X tereknél a $\dim X \cong \text{ind } X$ viszony áll fenn a kétféle dimenzió között; a 4. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy ez az egyenlőtlenség minden szeparábilis metrikus X térre teljesül.

4. §. Egy összefüggés szeparábilis metrikus terek iránydimenziója és Menger—Uriszon-dimenziója között

E paragrafus fő feladata az alapvető (4. 5. 1) reláció bebizonyítása. Ehhez segéd-tételként felhasználjuk majd a (4. 1) lemmát és a (4. 2) tétel első korolláriumát.

(4. 1) LEMMA. Ha egy X T_0 -tér egy

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_\alpha: \alpha \in A\}$$

IS-jából származó valamely

$$(4. 1. 1) \quad \bigcap \{F_\alpha \setminus G_\alpha: (G_\alpha, F_\alpha) \in \mathcal{R}_\alpha, \alpha \in A\}$$

típusú halmaza nem-üres, akkor csak egy pontot tartalmaz.

Bizonyítás. Bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ pontpárhoz létezik egy $\alpha_0 \in A$ index és léteznek olyan $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_{\alpha_0})$, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_{\alpha_0})$ félterek, hogy pl.

$$(4. 1. 2) \quad x \in G \setminus F,$$

de

$$(4. 1. 3) \quad y \notin G \setminus F.$$

Ha valamely (4. 1. 1)-típusú $P \subseteq X$ halmazra $x, y \in P$, akkor (4. 1. 2) és (1. 9. 1) miatt

$$F \subseteq G_{\alpha_0} \subset F_{\alpha_0} \subseteq G,$$

ez azonban (4. 1. 1) és (4. 1. 3) szerint lehetetlen.

(4. 2) TÉTEL. Ha $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_\alpha: \alpha \in A\}$ egy X tér egy IS-ja és $A^* \subset A$ tetszőleges nem-üres részhalmaz, akkor minden

$$(4. 2. 1) \quad X^* = \bigcap \{F_\alpha \setminus G_\alpha: \alpha \in A^*\} \\ ((G_\alpha, F_\alpha) \in \mathcal{R}_\alpha, G_\alpha \subset F_\alpha (\alpha \in A^*))$$

típusú al térre

$$\text{Dim } X^* \leq \overline{A \setminus A^*}.$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy ha $X^* \neq \emptyset$ és

$$\mathfrak{R}^* = \{\mathcal{R}_\alpha^*: \alpha \in A\}$$

X^* -nak $\mathfrak{R}$ által indukált IS-ja (2. 4), akkor

$$\mathfrak{R}^{**} = \{\mathcal{R}_\alpha^*: \alpha \in A \setminus A^*\}$$

is IS-ja X^* -nak.

Legyen $x \in X^*$ és U^* x -nek tetszőleges nyílt környezete X^* -ban, vagyis

$$x \in U^* \subseteq X^* \quad \text{és} \quad U^* = X^* \cap U$$

x -nek valamely X -beli nyílt U környezetére. Ekkor létezik olyan véges, nem-üres $A_1 \subseteq A$ halmaz, és léteznek olyan

$$\Gamma_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha), \Phi_\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A_1)$$

félterek, hogy

$$x \in \bigcap \{ \Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1 \} \subseteq U.$$

Mivel

$$x \in (F_\alpha \setminus G_\alpha) \cap (\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha) \quad (\alpha \in A^* \cap A_1),$$

azért

$$\Phi_\alpha \subseteq G_\alpha, \Gamma_\alpha \supseteq F_\alpha \quad (\alpha \in A^* \cap A_1),$$

tehát

$$(4.2.2) \quad X^* \subseteq \bigcap \{ \Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A^* \cap A_1 \}.$$

Az

$$E^* = X^* \cap E \quad (E \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha), \alpha \in A)$$

jelöléssel (4.2.2)-ből

$$\begin{aligned} X^* \cap \left(\bigcap \{ \Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1 \} \right) &= X^* \cap \left(\bigcap \{ \Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1 \setminus A^* \} \right) = \\ &= \bigcap \{ \Gamma_\alpha^* \setminus \Phi_\alpha^* : \alpha \in A_1 \setminus A^* \}, \end{aligned}$$

ahol

$$\Gamma_\alpha^* \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha^*), \Phi_\alpha^* \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha^*) \quad (\alpha \in A_1 \setminus A^*);$$

tehát

$$x \in \bigcap \{ \Gamma_\alpha^* \setminus \Phi_\alpha^* : \alpha \in A_1 \setminus A^* \} \subseteq U^*,$$

s ezzel, mivel $A_1 \setminus A^*$ véges, nem-üres részhalmaza $A \setminus A^*$ -nak (ha eltekintünk a triviális $U^* = X^*$ esettől), a bizonyítást befejeztük.

(4.3) **ELSŐ KOROLLÁRIUM.** *Bármely — szükségképpen véges iránydimenziójú — X tér tetszőleges véges, de 1-nél nagyobb számosságú $\mathfrak{R}$ IS-jának bármely $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ irányából származó minden*

$$X^* = F \setminus G \quad ((G, F) \in \mathcal{R}, R \subset F)$$

altérre

$$\dim X^* < \overline{\mathfrak{R}}.$$

(4.4) **MÁSODIK KOROLLÁRIUM.** *Bármely $1 < \dim X < \aleph_0$ iránydimenziójú X tér tetszőleges minimális IS-jában szereplő minden nem-üres M félterre*

$$\dim \text{Gr } M < \dim X.$$

Ezek után rátérhetünk a $\dim X$ és $\text{ind } X$ közötti kapcsolat levezetésére.

(4.5) **TÉTEL.** *Minden véges iránydimenziójú, szeparábilis metrikus X tér MENGER—URISZON-dimenziója létezik és véges, sőt*

$$(4.5.1) \quad \text{ind } X \leq \dim X.$$

A bizonyítást a $\dim X$ -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

^{1°} Ha $\dim X = 1$ és $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}\}$ az X tér egy minimális IS-ja, akkor bármely $x \in X$ ponthoz és annak bármely U környezetéhez találhatók olyan $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}), F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ félterek, hogy $x \in G \setminus F \subseteq U$. A

$$\text{Gr } (G \setminus F) = (G \setminus F) \cap (G \setminus F) \subseteq (F(G) \setminus \bar{G}(F)) \setminus (G \setminus F) = (F(G) \setminus G) \cup (F \setminus \bar{G}(F))$$

inklúzióból és a (4.1) lemmából világos, hogy $\text{Gr } (G \setminus F)$ legfeljebb két pontból

álló metrikus, tehát diszkrét tér; ebből pedig

$$\text{ind Gr } (G \setminus F) \leq 0$$

következik, tehát $\text{ind } X \leq 1$, s ezzel tételünket — (1. 14), (b)-t is figyelembe véve — a $\text{Dim } X \leq 1$ esetre bebizonyítottuk.

2° Legyen $\text{Dim } X = n$ ($n > 1$) természetes szám), és tegyük fel, hogy a tétel a $\text{Dim } X \leq n - 1$ esetre igaz. Legyen

$$\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_k : k = 1, 2, \dots, n\}$$

az X tér egy minimális IS-ja, $x \in X$ tetszőleges pont és $U \subseteq X$ az x pont tetszőleges környezete. Legyenek a

$$G_k \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_k), F_k \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

félterek olyanok, hogy

$$x \in \bigcap_{k=1}^n (G_k \setminus F_k) \subseteq U$$

(l. az (1. 11)-beli megjegyzést). Mármost

$$(4.5.2) \quad \text{Gr } \bigcap_{k=1}^n (G_k \setminus F_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \text{Gr } (G_k \setminus F_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^n [(F(G_k) \setminus G_k) \cup (F_k \setminus \bar{G}(F_k))],$$

és az indukciós feltevés és (4. 3) szerint

$$(4.5.3) \quad \begin{aligned} n-1 &\geq \text{Dim } (F(G_k) \setminus G_k) \geq \text{ind } (F(G_k) \setminus G_k) \\ n-1 &\geq \text{Dim } (F_k \setminus \bar{G}(F_k)) \geq \text{ind } (F_k \setminus \bar{G}(F_k)) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

HUREWICZ (0. 7) tételét alkalmazva (4. 5. 2)-re

$$(4.5.4) \quad \text{ind Gr } \bigcap_{k=1}^n (G_k \setminus F_k) \leq \max_{k=1, 2, \dots, n} \{\max [\text{ind } (F(G_k) \setminus G_k), \text{ind } (F_k \setminus \bar{G}(F_k))]\}.$$

Végül (4. 5. 3)-ból és (4. 5. 4)-ből

$$(4.5.5) \quad \text{ind Gr } \bigcap_{k=1}^n (G_k \setminus F_k) \leq n-1,$$

tehát $\text{ind } X \leq n = \text{Dim } X$ következik, qu.e.d.

5. §. Az euklidészi terek iránydimenziója. A II. fejezet főfeladatának ismertetése

A (4. 5) tétel első alkalmazásaként megállapítjuk az euklidészi terek iránydimenzióit:

(5. 1) TÉTEL.

$$\text{Dim } E_n = n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bizonyítás. (0. 5), (4. 5) és (3. 1. 3) szerint

$$n = \text{ind } E_n \leq \text{Dim } E_n \leq n.$$

Ezzel — miután $\text{Dim } X$ monotonitását már bebizonyítottuk — végérvényesen tisztáztuk az iránydimenzió fogalmának dimenzió-jellegét, a HUREWICZ—WALLMAN-féle (0. 11) kritérium szellemében.

(A 10. §-ban bizonyítandó 3. beágyazási tétel (5. 1)-nek egy a Menger—URISZON-elmélettől független bizonyítását teszi lehetővé, l. (10. 2)).

Második alkalmazásként a HILBERT-tér iránydimenzióját nyerjük:

(5. 2) TÉTEL. A HILBERT-tér iránydimenziója $\aleph_0$.

Bizonyítás. A H HILBERT-térre (3. 2) szerint $\text{Dim } H \leq \aleph_0$, (5. 1) szerint pedig $\text{Dim } H \geq n$ ($n=1, 2, \dots$) érvényes, tehát $\text{Dim } H = \aleph_0$, qu.e.d.

A 3. §-ban példákat adtunk a $\text{Dim } X > \text{ind } X$ esetre. $\text{Dim } X$ azonban nem lehet „sokkal nagyobb” $\text{ind } X$ -nél, ha X szeparábilis metrikus tér: a (4. 5. 1) egyenlőtlenséget egy $\text{ind } X$ és $\text{Dim } X$ közötti aszimptotikus összefüggéssé egészíthetjük ki:

(5. 3) TÉTEL. $Ha X$ szeparábilis metrikus tér és $\text{ind } X < \infty$, akkor

(5. 3. 1) $\text{ind } X \leq \text{Dim } X \leq 1 + 2 \text{ ind } X$.

Bizonyítás. A jobb oldali egyenlőtlenség Menger—NÖBELING tételéből (amely szerint X topologikusan beágyazható az $E_{1+2 \text{ ind } X}$ térbe) és $\text{Dim } X$ monotonitásából következik.

(5. 4) Az (5. 3) tételnek két fontos, közvetlen következményét fogalmazzuk meg:

1° A Menger—NÖBELING-tétel akkor is igaz marad, ha szövegében $\text{ind } X$ -et $\text{Dim } X$ -szel helyettesítjük, hiszen ezzel a tételt legfeljebb gyengítjük.

2° Szeparábilis metrikus X terekre az „ $\text{ind } X$ létezik és véges” és „ $\text{Dim } X$ véges” kijelentések ekvivalensek, vagyis ez a két dimenziófogalom az euklidészi terek altereinek osztályát, mint a szeparábilis metrikus terek osztályának részét, egyaránt a dimenzió végességével karakterizálja.

(5. 5) Míg azonban a Menger—URISZON szerint legfeljebb n -dimenziós szeparábilis metrikus terek minden (0. 9) szerinti univerzális euklidészi térének Menger—URISZON-dimenziója legalább $2n+1$, addig a legfeljebb n iránydimenziójú szeparábilis metrikus terek osztályánál (az egyes tereknél fellépő $\text{Dim } X > \text{ind } X$ eltolódás miatt) ezen „beágyazási szám” csökkenése várható.

Dolgozatunk II. fejezetének főfeladata annak bizonyítása lesz, hogy ez a „beágyazási szám” az egyáltalán számításba vehető minimumra, vagyis n -re csökkenthető; más szóval: a legfeljebb n -iránydimenziójú szeparábilis metrikus tereknek az E_n tér univerzális tere.

E feladat elvégzéséhez vizsgálatainkat az eddigi jórészt tetszőleges IS-k és tetszőleges terek helyett rendes IS-k-ra és ennek megfelelően a gyengén rendes, ill. rendes terek (a metrikus tereket is tartalmazó) osztályára kell konkretizálnunk. Ez a második fejezet tartalma.

(Beérkezett: 1966. november 15.)