

VÉGTELEN SOROK CAUCHY-SZORZATÁNAK HARDY-FÉLE PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: PÁL LÁSZLÓ

1. Megállapodás szerint e dolgozatban adott $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{l=0}^{\infty} b_l, \sum_{m=0}^{\infty} c_m, \dots$ végtelen sorokat jelöljük tagjaiknak megfelelően a $A, B, C, \dots$ betűkkel, függetlenül attól, hogy e sorok konvergensek-e vagy sem valamilyen adott értelemben.

ÉRTELMEZÉS: Az

$$(1) \quad A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{és} \quad B = \sum_{l=0}^{\infty} b_l$$

végtelen sorok „Cauchy-féle szorzatsorának” nevezzük — és $C(A, B)$ -vel jelöljük — a

$$(2) \quad C = \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=m} a_k b_l \right)$$

végtelen sort¹.

A továbbiakban a Cauchy-féle szorzatsort — a (2)-beli jelölésnek megfelelően — röviden „C-szorzatsornak” fogjuk nevezni.

Ismeretes, hogy a C-szorzatképzés nem rendelkezik az ún. perfekt tulajdonsággal, azaz lehetséges, hogy konvergens (1)-beli sorokra a (2) szorzatsor divergens.

Legyenek például

$$(3) \quad A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \quad \text{és} \quad B = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\sqrt{l+1}}.$$

E sorok a Leibniz-féle kritérium szerint konvergensek, azonban a

$$(4) \quad C(A, B) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{m+1-k}} \right] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

szorzatsoruk divergens, ugyanis a

$$(5) \quad |c_m| \geq (m+1) \frac{1}{\sqrt{m+1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}} = 1, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenségek miatt a (4) sor tagjai nem tartanak zéróhoz.

¹ E szorzatképzés természetes módon adódik hatványsorok szorzásakor, ha a szorzatsort is hatványsor alakjában írjuk fel, azaz a szorzatsorban egy tagba foglaljuk az azonos x^m hatványokat adó tagszorzatokat:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) x^m.$$

E példában szereplő A és B sorok mindketten szükségképpen feltételesen konvergensek, ugyanis a klasszikus MERTENS [1] tétel szerint, ha az (1) alatti sorok konvergensek és legalább egyikük abszolút konvergens, akkor C -szorzatuk szükségképpen konvergens sor lesz.

Megemlítjük még, hogy a C -szorzatsor összegproblémája régóta megoldott kérdés, ugyanis érvényes a következő ABELTől [2] eredő

[1, 1] TÉTEL. *Ha az (1) sorok konvergensek és C -szorzatsoruk is konvergens, akkor a szorzatsor összege szükségképpen a tényezősorok összegeinek szorzata.*

Nyitott marad azonban a kérdés, hogy milyen további alkalmas feltételek biztosítják két feltételesen konvergens sor C -szorzatsorának konvergenciáját?

Az első ilyen irányú kutatások PRINGSHEIMTől erednek. Vizsgálatai lényegében abban az esetben adnak elegendő feltételeket a C -szorzat konvergenciájára, amikor a feltételesen konvergens tényezősorok közül legalább az egyik abszolút konvergenssé válik tagjainak olyan zárójelzése mellett, amelyben az egyes zárójeleken belüli eredeti tagok száma egy rögzített érték alatt marad valamennyi zárójelre nézve [3]. A további Pringsheim-féle vizsgálatok az előbb említett általános esetnek arra a speciális esetére vonatkoznak, amikor a tényezősorok *Leibniz*-típusú alternáló sorok [4]. Idevágó eredményei — melyekre HARDY adott először elegáns bizonyítást — az alábbi tételben foglalhatók össze:

[1, 2] TÉTEL. *Ha $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ monoton fogyó zérussorozatok, akkor a Leibniz-típusú*

$$(6) \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \quad \text{és} \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n$$

sorok C -szorzatsorának konvergenciájára

1. *szükséges és elegendő, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ szorzatsor tagjai zéróhoz tartsanak, azaz*

$$(7) \quad |c_n| = (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

2. *szükséges és elegendő, hogy*

$$(8) \quad \begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n) \beta_n &\rightarrow 0 \\ (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n) \alpha_n &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. *elegendő (de nem szükséges), hogy*

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n < \infty$$

legyen,

4. *szükséges (de nem elegendő), hogy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ rögzített kitevőre*

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \beta_n)^{1+\varepsilon} < \infty$$

fennálljon.

E tételből látható, hogy alternáló sorok esetében a tényezősorok tagjaira tett alkalmas nagyságrendi feltételek mellett biztosítani tudjuk a C -szorzatsor konvergenciáját. Ebből az észrevételből kiindulva felvetődik a kérdés, hogy nem lehet-e hasonló jellegű eredményt tetszőleges (tehát nem szükségképpen alternáló) feltételeken konvergens sorok esetében is elérni?

Az első ilyen értelmű mélyebben fekvő eredményt HARDY [5] találta, amennyiben aránylag egyszerűen igazolta a következő állítást:

[1, 3] TÉTEL. Ha az $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $B = \sum_{l=0}^{\infty} b_l$ sorok konvergenssek és tagjaikra érvényesek az

$$(11) \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{és} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

nagyságrendi feltételek ², akkor C -szorzatsoruk konvergens.

Az [1, 2] és [1, 3] tételek figyelembevételével HARDY a következő kérdéskört veti fel ³:

Tekintsük az egyszerűség kedvéért az alábbi két sor C -szorzásának speciális problémáját:

$$(12) \quad \pm 1^{-s} \pm 2^{-s} \pm 3^{-s} \pm \dots, \quad \pm 1^{-t} \pm 2^{-t} \pm 3^{-t} \pm \dots$$

Ha $0 < s \leq \frac{1}{2}$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$ vagy általánosabban, ha s és t pozitívak és $s + t \leq 1$, akkor biztosan meg tudjuk választani a (12) alatti sorok előjelezését olyan módon, hogy maguk e sorok konvergenssek, azonban C -szorzatuk oszcilláló. Elegendő tekintenünk a váltakozó előjelű $1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \dots$, $1^{-t} - 2^{-t} + 3^{-t} - \dots$ sorokat. A szorzatsor γ_n -el jelölt n -edik tagjának abszolút értékére ez esetben azt kapjuk, hogy

$$(13) \quad |\gamma_n| = \sum_{r=1}^n r^{-s}(n+1-r)^{-t},$$

amely n -nel együtt végtelenhez tart, ha $s + t < 1$ illetőleg $s + t = 1$ esetén az

$$(14) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^s(1-x)^{1-s}} = \frac{\pi}{\sin s\pi}$$

véges határértékhez (és így a szorzatsor evidensen divergens).

Másrészt, ha $s = 1$, $t = 1$, akkor az [1, 3] tétel alapján a szorzatsor mindig konvergens lesz, amennyiben a (12) sorok előjelezését úgy választjuk meg, hogy a tényezősorok konvergenssek legyenek.

Tekintsük végül azokat az eseteket, amikor $s + t > 1$, de s és t közül legalább az egyik kisebb 1 -nél, (pl. $s = t = \frac{3}{4}$, vagy $s = \frac{1}{2}$, $t = 1$). Ilyenkor vagy az igaz, hogy konvergens (12) alatti sorokra a C -szorzatsor is mindig konvergens, vagy pedig lehet találni a (12) soroknak olyan „konvergens előjelezését”, melyre szorzatsoruk divergens.

² A LANDAU-féle O és o szimbólumokat a szokásos értelemben használjuk.

³ A közölt kérdésfelvetés és az arra vonatkozó sejtés, értelemszerű fordítás az [5] alatt megadott dolgozat 419–420. oldalairól.

HARDY sejtése az volt, hogy az utóbb említett eset áll fenn, azonban megjegyezte, hogy sejtésének igazolására nem tud konkrét példát konstruálni.

E dolgozat következő 2. pontjában az említett Hardy-féle problémát a modern ortogonális sorelmélet segítségével fogjuk megvizsgálni és kimutatjuk, hogy $s > \frac{1}{2}$ és $t > \frac{1}{2}$ esetén zéró a valószínűsége annak, hogy a (12)-beli soroknak meg tudjuk adni olyan előjelezéseit, amelyekre e sorok maguk konvergens, de ugyanakkor C -szorzatuk divergens. A dolgozat további 3. pontjában a [2, 9] tétel további általánosításával és módosításaival fogunk foglalkozni.

2. Mindenekelőtt ismertetjük az ortogonális sorok elméletének néhány alapvető fogalmát és tételét, melyeket a későbbiekben fel fogunk használni.

[2, 1] ÉRTELMEZÉS: Adott $[a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) intervallumon értelmezett, mérhető és négyzetesen integrálható függvényekből álló $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ függvénysorozatot (a közönséges értelemben) ortonormált függvénysorozatnak nevezzük, ha e sorozat elemeire érvényesek a következő egyenlőségek ⁴:

$$(15) \quad \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0; & \text{ha } n \neq m \\ 1; & \text{ha } n = m \end{cases}$$

[2, 2] ÉRTELMEZÉS: Ha $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ adott ortonormált függvénysorozat valamely $[a, b]$ intervallumon és $\{c_n\}$ adott számsorozat, akkor a

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots$$

függvénysort a $\{\varphi_n(x)\}$ rendszer szerint haladó ortogonális sornak nevezzük.

Mivel egy ortonormált $\{\varphi_n(x)\}$ rendszer függvényeit az $[a, b]$ alapintervallum egy nullaértékű halmazán tetszőleges módon adhatjuk meg, ezért a (16) sorok pontonkénti konvergenciájának csak a majdnem mindenütt való konvergencia szempontjából van általában értelme.

Ismeretes, hogy az egyik legfontosabb ilyen típusú konvergenciatétel, mely az általános (16)-beli ortogonális sorokra érvényes, és még abszolút értékben monoton fogyó $\{c_n\}$ együtthatósorozat esetén sem élesíthető [6] a következő RADEMACHER [7] és MENSOV [8] által bizonyított

[2, 1] TÉTEL. Ha $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tetszőleges ortonormált függvényrendszer az $[a, b]$ intervallumon, és $\{c_n\}$ olyan együtthatósorozat, melyre a

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty$$

feltétel teljesül, akkor a $\sum c_n \varphi_n(x)$ ortogonális sor az $[a, b]$ -nek majdnem minden x pontjában konvergens⁵.

E fontos tétel bizonyítása az ún. Mensov-féle lemma segítségével igen egyszerűen nyerhető, amelyet a későbbiek érdekében külön tételként is felhasználunk. E lemma állítása a következő:

⁴ A mérhetőség, integrálhatóság és az integrál fogalmát a Lebesgue-féle értelemben használjuk.

⁵ A továbbiakban a majdnem mindenütt kifejezés helyett az m. m. rövidítést használjuk.

[2, 2] TÉTEL. Legyen $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_N(x)$ tetszőlegesen adott, véges sok függvényből álló ortonormált rendszer az $[a, b]$ intervallumon, $c_0, c_1, \dots, c_N$ pedig tetszőlegesen előírt számokból álló együtthatórendszer. Ekkor mindig megadható olyan $\delta_N(x)$ nem-negatív függvény, amely az $[a, b]$ számközön négyzetesen integrálható, és a

$$(18) \quad \sum_{n=0}^N c_n \psi_n(x)$$

összeg bármely i, j ($0 \leq i < j \leq N$) indexpárra vett

$$(19) \quad \sum_{n=i}^j c_n \psi_n(x) = s_{ij}(x)$$

születét abszolút értékben majorizálja, azaz

$$(20) \quad \max_{0 \leq i \leq j \leq N} |s_{ij}(x)| \leq \delta_N(x),$$

és egyben eleget tesz az alábbi egyenlőségnek:

$$(21) \quad \int_a^b \delta_N^2(x) dx = O\left((\log^2 N) \sum_{n=0}^N c_n^2\right).$$

Mivel a [2, 1] és [2, 2] tételek bizonyításai a szóban forgó $\{\varphi_n\}$ és $\{\psi_n\}$ rendszerekről pusztán a (15)-beli ortogonalitási relációkat használják fel, ezért magától értetődő módon általánosíthatók az ortogonalitás fogalmának általánosabb értelmezésével. Számunkra elegendő lesz a [2, 1] és [2, 2] tételek kétváltozós $\{\varphi_n(x, y)\}$ és $\{\psi_n(x, y)\}$ ortonormált rendszerekre értelemszerűen kiterjesztett formája, amelyhez pusztán a megfelelő ortogonalitás fogalmát ismertetjük:

[2, 3] ÉRTELMEZÉS: A $\{\varphi_n(x, y)\}_{n=0}^\infty$ kétváltozós függvények a síknak egy mérhető $N = \{(x, y)\}$ pontthalmazán ortonormált rendszert alkotnak, ha azon mérhető, négyzetesen integrálhatóak és az

$$(22) \quad \iint_N \varphi_n(x, y) \varphi_m(x, y) dx dy = \begin{cases} 0; & \text{ha } n \neq m \\ 1; & \text{ha } n = m \end{cases}$$

egyenlőségek bármely (n, m) indexpárra érvényesek.

Magától értetődő, hogy konkrétan megadott speciális ortonormált függvényrendszerek esetében nemcsak a (15) és (22) relációkra támaszkodhatunk, hanem a konvergenciakérdések vizsgálatánál kihasználhatjuk a szóban forgó függvényrendszer egyéb speciális tulajdonságait is.

Különösen fontos lesz számunkra a Rademacher-féle [7] ortonormált függvényrendszer szerint haladó ortogonális sorok, az ún. Rademacher-sorok konvergenciaelmélete.

[2, 4] ÉRTELMEZÉS: A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett

$$(23) \quad r_n(x) = \text{sign}(\sin 2^n \pi x), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

függvényrendszert *Rademacher-féle* rendszernek nevezzük, ahol a

$$\operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} +1; & \text{ha } \alpha > 0 \\ 0; & \text{ha } \alpha = 0 \\ -1; & \text{ha } \alpha < 0 \end{cases}$$

szimbólum jelenti az α előjelét.

Az értelmezésből adódik, hogy a $[0, 1]$ intervallumot a $k/2^n$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, 2^n$) osztáspontokkal 2^n számú egyenlő szakaszra bontva, az $r_n(x)$ n -edik *Rademacher-függvény* az egyes szakaszokon felváltva a $+1$ és -1 állandó értékeket veszi fel, míg az osztáspontokon az értéke 0, azaz

$$(24) \quad r_n(x) = \begin{cases} (-1)^k; & \text{ha } x \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \\ 0; & \text{ha } x = \frac{k}{2^n} \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$$

Ha tehát valamely $x \in [0, 1]$ valós számnak a diadikus kifejtése

$$(25) \quad x = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots \quad (\alpha_i = 0, 1),$$

akkor

$$(26) \quad r_n(x) = \begin{cases} 1; & \text{ha } \alpha_n = 0 \\ -1; & \text{ha } \alpha_n = 1 \\ 0; & \text{ha } \alpha_n \text{ kétértelmű.} \end{cases}$$

Az értelmezés alapján azonnal látható, hogy az $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *Rademacher-rendszer* ortonormált a $[0, 1]$ intervallumon.

Az e rendszer szerint haladó ún. *Rademacher-féle* sorok nevezetes konvergencia-tulajdonsággal rendelkeznek.

[2, 3] TÉTEL. Ha $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan együtthatósorozat, melyre

$$(27) \quad \sum c_n^2 < \infty,$$

akkor az ilyen együtthatókkal képezett

$$(28) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$$

Rademacher-sor konvergens m. m. $x \in [0, 1]$ helyen [7].

[2, 4] TÉTEL. Ha a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ együtthatósorozatra

$$(29) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$$

akkor a (28) *Rademacher-sor* m. m. divergens a $[0, 1]$ -ben [9].

E két tételnek alapvető jelentősége van, amennyiben a feltételeken konvergens sorok konvergenciaelméletét a valószínűségelmélet szempontjából tekintjük.

Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy az $r_n(x)$ Rademacher-függvények a $[0, 1]$ szakasz diadikusan irracionális $x \left(\neq \frac{p}{2^q} \right)$ pontjaiban $+1$ vagy a -1 értékeket vesznek fel a (26)-nak megfelelően, és így egy ilyen x helyen a $\sum c_n r_n(x)$ sor az illető helytől függően a $\sum |c_n|$ sornak egy

$$(30) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm |c_n|$$

előjelezéssel ellátott sorát szolgáltatja. Az így kapott sornak az x helytől függő előjelezését (26) alapján a következőképpen is jellemezhetjük:

Minden $[0, 1]$ -beli x értéket írjunk fel az

$$(31) \quad x = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

végteles diadikus tört alakban, és minden x -hez ennek megfelelően rendeljük hozzá a $(+1)$ és (-1) számokból alkotott ama

$$(32) \quad \Delta = \Delta(x) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\pm 1, \pm 1, \dots\}$$

előjelsorozatot, melyre

$$(33) \quad \delta_n = \begin{cases} 1; & \text{ha } \alpha_n = 0 \\ -1; & \text{ha } \alpha_n = 1 \end{cases}$$

és fordítva minden adott (32)-beli Δ előjelsorozathoz rendeljük hozzá azt a végteles diadikus tört alakjában felírt $[0, 1]$ -beli

$$(34) \quad x = x(\Delta) = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

számot, melynek α_n jegyeire

$$(35) \quad \alpha_n = \frac{1 - \delta_n}{2}.$$

Ilyen módon az összes előjelsorozatoknak a halmazát a diadikusan racionális $p2^{-q}$ ($q=0, 1, 2, \dots; p=0, 1, \dots, 2^q$) helyektől tekintve ⁶ kölcsönösen egyértelműen leképeztük a $[0, 1]$ -beli valós számok halmazára.

Figyelembe véve, hogy a diadikusan racionális pontok halmaza megszámlálható és így nullamértékű halmaz a $[0, 1]$ -ben, a tekintett leképezés segítségével a (32)-beli előjelsorozatok bármely adott $\mathcal{D} = \{\Delta\}$ halmazának megfelel a $[0, 1]$ intervallumnak egy $H = H(\mathcal{D})$ részhalmaza, és amennyiben e H halmaz mérhető, a $\mathcal{D}$ -hez hozzárendelhetünk egy mértéket is, nevezetesen a H halmaz mértékét. E leképezés és mérték segítségével természetes módon adódik a következő

[2, 5] ÉRTELMEZÉS: A $+1$ és -1 „előjelekből” alkotott $\Delta = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\pm 1\}$ előjelsorozatoknak egy $\mathcal{D} = \{\Delta\}$ halmazáról akkor mondjuk, hogy majdnem minden előjelsorozatot („végtelen előjeleloszlást”) tartalmaz, ha $\mathcal{D}$ -beli Δ elemeknek (34) és (35) alapján megfelelő $x = x(\Delta)$ pontok $H = H(\mathcal{D})$ halmaza 1 mértékű halmaz a $[0, 1]$ -ben.

Értelmezésünk után a [2, 3] és [2, 4] tételek a következő szimilátes és egységes formában mondhatók ki

⁶ Az $x = p2^{-q}$ értékek diadikus kifejtése nem egyértelmű.

[2, 5] TÉTEL. Ha $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nem-negatív valós számoknak egy adott sorozata, akkor a

$$(36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$$

végteles sor majdnem minden előjelezés mellett konvergens, illetve divergens, aszerint, hogy a

$$(37) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

pozitív tagú sor konvergens, illetve divergens.

Még szemléletesebbé válik az utóbbi tétel jelentősége, ha figyelembe vesszük a Rademacher-rendszer függvényeinek a valószínűségelmélettel való kapcsolatát [10].

A [2, 4] értelmezés alapján az első n darab Rademacher-függvény a 2^n számú n elemű álló

$$(38) \quad r_1(x) = \pm 1, r_2(x) = \pm 1, \dots, r_n(x) = \pm 1$$

előjelvariációk mindegyikét egy-egy 2^{-n} mértékű intervallumon veszi fel. E mérték egyben annak a valószínűsége, hogy véletlen módon kapott n elemű előjelvariáció egy előre megadott n -elemű előjelvariáció legyen.

A valószínűség abszolút additivitását felhasználva megengedhetünk megszámlálhatóan végteles sok elemű előjelvariációkat is, és így az előzővel összhangban a következő megállapítást tehetjük:

[2, 6] ÉRTELMEZÉS: Ha $\mathcal{D} = \{A\}$ a $\Delta = \{\delta_n\} = \{\pm 1\}$ előjelsorozatoknak egy adott halmaza, akkor annak valószínűsége, hogy egy véletlen módon kapott $\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots$ előjelsorozat a $\mathcal{D}$ eleme legyen, egyenlő ama $M = \{x\} \subseteq [0, 1]$ pontalmaznak a mértékével, amelynek x pontjaira az $r_1(x), r_2(x), \dots \equiv \pm 1, \pm 1, \dots$ sorozat $\mathcal{D}$ -be tartozik, feltéve, hogy az M halmaz mérhető.

Utóbbi értelmezésünk után a [2, 5] tétel valószínűségelméleti megfogalmazása a következő formát ölti:

[2, 6] TÉTEL. A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ végteles sorból véletlen előjelezéssel kapott $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ végteles sor 1 valószínűséggel konvergens, illetve divergens aszerint, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ sor konvergens, illetve divergens.

A [2, 5] és [2, 6] tételek más szóval azt fejezik ki, hogy a konvergens sorokat „lényegében” a négyzetesen konvergens sorok alkotják.

Mindeme előkészítések után térjünk vissza az 1. pontban felvetett Hardy-féle problémára.

A [2, 5] és [2, 6] tételt a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t}$ hiperharmonikus sorra alkalmazva közvetlenül nyerhető a

[2, 7] TÉTEL. A rögzített $t > 0$ értékre vett $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t}$ hiperharmonikus sorból véletlen előjelezéssel nyert $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-t}$ sor 1 valószínűséggel konvergens, ha $t > \frac{1}{2}$, és 1-valószínűséggel divergens, ha $t \leq \frac{1}{2}$.

Utóbbi tétel figyelembevételével a Hardy-féle probléma alapján természet-szerűen vetődik fel a következő kérdés: Mit tudunk állítani a lényegében konvergens hiperharmonikus sorok C -szorzatsorairól? A válasz érdekében igazoljuk, hogy érvényes a következő

[2, 8] TÉTEL. Ha $s > \frac{1}{2}$ és $t > \frac{1}{2}$, akkor az egymástól függetlenül véletlen előjelezéssel ellátott 1 valószínűséggel konvergens

$$(39) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \pm (n^{-s}) \quad \text{és} \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} \pm (k^{-t})$$

sorok C -szorzata is szintén konvergens.

Bizonyítás: Az s és t -re tett feltevéseink alapján a

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2t}$$

sorok konvergens hiperharmonikus sorok és így a [2, 3] tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a

$$(41) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n^s} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(y)}{k^t}$$

Rademacher-sorok a $0 \leq x \leq 1$, illetve a $0 \leq y \leq 1$ intervallumokon m. m. konvergenssek.

Ha tehát igazolni tudjuk, hogy a (41) alatti függvénysorok

$$(42) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s(m+1-k)^t} r_k(x) r_{m+1-k}(y) \right)$$

C -szorzatsora a sík N egységnégyzetének, azaz a

$$(43) \quad N = \{(x, y); \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

halmaznak majdnem minden (x, y) pontjában konvergens, akkor az ismert Fubini-féle tétel alapján [11] állításunk bizonyítást nyer.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a (39)-beli sorokból nyert abszolút sorok olyan

$$(44) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$$

monoton fogyó pozitív tagú sorok, hogy még a

$$(45) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \log^2 n$$

$$\text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \log^2 n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2t}} \log^2 n$$

sorok is konvergenssek. Valóban az s és t kitevőkre tett feltevéseink alapján megadhatók olyan pozitív σ és τ értékek, melyekre

$$(46) \quad s = \frac{1}{2} + \sigma, \quad t = \frac{1}{2} + \tau$$

és így a (45) alatti sorok a konvergens

$$(47) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\sigma}} \frac{\log^2 n}{n^{\sigma}} \right) = o(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1+\tau}} \frac{\log^2 n}{n^{\tau}} \right) = o(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\tau}} < \infty$$

sorokat szolgáltatják.

Észrevételünk után tételünk bizonyítást nyer, amennyiben igazoljuk a következő általánosabb állítást:

[2, 9] TÉTEL. Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ olyan monoton fogyó nullsorozatok, amelyekre a

$$(48) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \log^2 n < \infty$$

feltételek teljesülnek, akkor a m.m. $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 1]$ értékekre konvergens

$$(49) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(y)$$

Rademacher-soroknak C -sorozatsora, azaz a

$$(50) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} r_k(x) r_{n+1-k}(y) \right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, y)$$

függvénysor m. m. $(x, y) \in N$ pontban konvergens.

E tétel bizonyítása érdekében először is vegyük figyelembe, hogy az (50) alatti C -sorozatsorban a zárójeleket elhagyva olyan

$$(51) \quad \sum_{i,k} a_i b_k r_i(x) r_k(y) = \sum_{i,k} a_i b_k R_{ik}(x, y)$$

kétváltozós függvénysort kapunk, amelyben szereplő

$$(52) \quad R_{ik}(x, y) = r_i(x) r_k(y)$$

függvények az N egységnégyzeten ortonormált függvényrendszert alkotnak, azaz bármely két (i, k) és (l, m) természetes számokból álló rendezett számpárra érvényesek a (22) formuláknak megfelelő

$$(53) \quad \iint_N R_{ik} R_{lm} dx dy = \iint_N r_i(x) r_k(y) r_l(x) r_m(y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \left(r_k(y) r_m(y) \int_0^1 r_i(x) r_l(x) dx \right) dy = \begin{cases} 0; & \text{ha } (i, k) \neq (l, m) \\ 1; & \text{ha } (i, k) = (l, m) \end{cases}$$

egyenlőségek.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ monoton fogyó zérószorozatok, és így minden n indexre $a_n > 0$ és $b_n > 0$, az (52) alatti jelöléssel a szóban forgó (50)-beli C -szorzatsor a

$$(54) \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sum_{i+k=n+1} a_i b_k R_{ik}(x, y)}{\left(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, y)$$

alakban írható, ahol a

$$(55) \quad \Phi_n(x, y) = \frac{\sum_{i+k=n+1} a_i b_k R_{ik}(x, y)}{\left(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

függvények az (53) relációk alapján evidensen szintén egy ortonormált függvény-rendszert alkotnak a N egységnegyzenen.

Mindezek után a [2, 9] tétel állítása igazolást nyer, ha a [2, 1] tétel kétváltozós formájának figyelembevételével ki tudjuk mutatni, hogy az (54) alatti $\sum c_n \Phi_n(x, y)$ ortogonális sor $\{c_n\}$ együtthatóinak segítségével képezett

$$(56) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2 \right) \log^2 n$$

pozitív tagú sor konvergens.

Ennek érdekében jelöljük a (48)-beli feltevés miatt konvergens $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ sorok összegét α -, illetve β -val, és becsljük meg felülről az (56) sor tagjait.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ monoton fogyó zérószorozatok, így a szóban forgó becslést a következő egyszerű formában végezhetjük el $n \geq 2$ esetén⁷:

$$(57) \quad c_n^2 \log^2 n \leq (\log n)^2 \left(\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} b_k^2 a_{n+1-k}^2 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} a_k^2 b_{n+1-k}^2 \right) < \\ < (\log n)^2 \left(a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + b_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) = \left(\beta a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^2 + \alpha b_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^2 \right) \log^2 n.$$

Innen azonnal adódik az (56) alatti sorra a következő majorizáció:

$$(58) \quad \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} a_{\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor}^2 \log^2 (2k+1) + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} b_{\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor}^2 \log^2 (2k+1) < \\ < 2(\alpha + \beta) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 (2k+1) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \log^2 (2k+1) \right\} < \\ < 2(\alpha + \beta) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log^2 (3k) \right\} < 2(\alpha + \beta) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) (2 \log^2 3 + 2 \log^2 k) \right\} < \\ < O(1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log^2 k < \infty,$$

⁷ $[\omega]$ = entier $\omega = \omega$ egész része jelölést felhasználva.

amivel az (56) alatti sor konvergenciáját, és így a [2, 8] és [2, 9] tételeinket igazoltuk. Egyben a valószínűségelmélet megvilágításában választ nyertünk az 1. pontban felvetett Hardy-féle problémára, amely megmutatja a HARDY által sejtett példa effektív megadásának nehézségét, miszerint az ő általa említett példának a megadhatósága 0 valószínűséggel rendelkezik.

3. A [2, 9] tétel bizonyításában erősen kihasználtuk a (49)-beli tényezősorok $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ együtthatóinak monoton fogyó voltát.

E pontban megmutatjuk, hogy a [2, 9] tétel érvényessége akkor is megmarad, ha az abban szereplő $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ együtthatósorozatok monotonítására tett feltevésünket elejtjük, sőt azt is igazoljuk, hogy a tényezősorokból adódó C -szorzatsor konvergenciája még akkor is megmarad, ha az abban szereplő zárójeleket felbontjuk.

[3, 1] TÉTEL. Ha $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tetszőleges olyan sorozatok, melyekre a

$$(59) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \log^2 n < \infty$$

feltételek teljesülnek, akkor a m. m. $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 1]$ értékekre konvergens

$$(60) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(y)$$

Rademacher-sorok C -szorzatsora még akkor is konvergens lesz m. m. $(x, y) \in N$ pontban, ha az abban szereplő tagok zárójeleit felbontjuk.

Bizonyítás. A szóban forgó (60)-beli sorok C -szorzatsorát az (54) alatt megismert átalakítással felírva olyan

$$(61) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, y)$$

$N = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ -ben ortogonális sort kapunk, amelyre⁸

$$(62) \quad c_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 b_{n+1-k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{és} \quad \Phi_n(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} r_k(x) r_{n+1-k}(y)}{c_n}.$$

Mivel az (59) feltevések miatt $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens sorok, ezért a [2, 3] tétel alapján a (60) alatti sorok m. m. $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 1]$ értékekre konvergensnek lévén, CESÁRO [12] ismert tétele szerint az (61) alatti ortogonális sor m. m. $(x, y) \in N$ pontban $(C, 1)$ szummábilis a tényezősorok összegeinek a szorzatához.

Ha tehát a (61)-beli C -szorzatsor részletösszegeire bevezetjük az

$$(63) \quad s_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k(x, y)$$

⁸ Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy valamennyi n indexre $c_n \neq 0$.

jelölést, azt kapjuk, hogy e részletösszegek

$$(64) \quad \sigma_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k(x, y)$$

számtani közepei m. m. $(x, y) \in N$ pontban konvergensek. Ha figyelembe vesszük még, hogy a (61) ortogonális sorra (62) és (59) alapján

$$(65) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 b_{n+1-k}^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right) < \infty,$$

akkor alkalmazhatjuk KOLMOGOROV [13] egy nevezetes eredményét, amely szerint ha egy ortogonális sor majdnem mindenütt $(C, 1)$ szummábilis és az együtthatóinak négyzeteiből alkotott sor konvergens, akkor a sor részletösszegeinek 2^n indexű részsorozata m. m. konvergens.

Arra jutunk tehát, hogy pusztán a $\sum a_n^2 < \infty$ és $\sum b_n^2 < \infty$ feltevések mellett a (60) sorok (61) alatti C -szorzatsorának

$$(66) \quad s_{2^n}(x, y) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k \Phi_k(x, y)$$

részletösszegei m. m. $(x, y) \in N$ pontban konvergensek, midőn $n \rightarrow \infty$.

Bevezetve tehát a

$$(67) \quad R_{i,k}(x, y) = r_i(x) r_k(y) = R_{i,k}$$

N -ben ortonormált függvényeket, a (66)-ban szereplő függvénysorozat két egymás után következő elemének különbségére a (61)-beli C -szorzatsor alábbi (általános értelemben vett) szeletét nyerjük:

$$(68) \quad \begin{aligned} s_{2^{k+1}} - s_{2^k} &= \sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}+1} c_i \Phi_i(x, y) = \\ &= (a_1 b_{2^{k+1}} R_{1,2^{k+1}} + a_2 b_{2^k} R_{2,2^k} + \dots + a_{2^{k+1}} b_1 R_{2^{k+1},1}) + \\ &+ (a_1 b_{2^{k+2}} R_{1,2^{k+2}} + a_2 b_{2^{k+1}} R_{2,2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+2}} b_1 R_{2^{k+2},1}) + \\ &+ \dots + \\ &+ (a_1 b_{2^{k+1}} R_{1,2^{k+1}} + a_2 b_{2^{k+1}-1} R_{2,2^{k+1}-1} + \dots + a_{2^{k+1}} b_1 R_{2^{k+1},1}). \end{aligned}$$

Ha ebben az összegben a zárójeleket elhagyjuk és az így kapott összegnek n -edik részletösszegét $s_{k,n}^*(x, y)$ -nal jelöljük, akkor a [3, 1] tétel igazolása érdekében elegendő belátnunk, hogy az n index választásától függetlenül

$$(69) \quad s_{k,n}^*(x, y) - s_{2^k}(x, y) \rightarrow 0$$

m. m. $(x, y) \in N$ -re, midőn $k \rightarrow \infty$.

A [2, 2] tételben kimondott *Mensov*-lemmának kétváltozós ortonormált rendszerekre való alkalmazása alapján minden k indexhez megadható egy olyan $\delta_k(x, y) \in \mathcal{L}^2(N)$ függvény, hogy bármely n -re a N egységnégyzet minden (x, y) pontjában

$$(70) \quad |s_{k,n}^*(x, y) - s_{2^k}(x, y)| \leq \delta_k(x, y),$$

és ugyanakkor bármely k -ra (68) szerint az

$$(71) \quad \iint_N \delta_k^2(x, y) dx dy \leq \\ \leq O(1) \{ \log((2^k + 1) + (2^k + 2) + \dots + 2^{k+1}) \}^2 \sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \left(\sum_{v+\mu=i+1} a_v^2 b_\mu^2 \right)$$

egyenlőtlenségek fennálljanak, ahol az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldalának utolsó tényezőjében a (68)-beli összeg együtthatóinak négyzetösszege áll. Ha ez utóbbi összegben minden belső zárójelbeli összeget durván szólva első és második felére bontjuk, és bevezetjük a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = A < \infty$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = B < \infty$ jelölést, akkor a (71) egyenlőtlenség bal oldalára könnyen tudunk egy alkalmasabb felső becslést adni:

$$(72) \quad \iint_N \delta_k^2(x, y) dx dy \leq \\ \leq O(1) \left\{ \log \left(2^k \frac{2^k + 1 + 2^{k+1}}{2} \right) \right\}^2 \left\{ A \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} b_i^2 + B \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} a_i^2 \right\}.$$

Ha végül feltesszük, hogy $k \geq 2$ úgy $2^{k-1}(2^k + 1 + 2^{k+1}) \leq 2^{k-1}(2 \cdot 2^{k+1}) = 2^3(2^{k-1})^2 \leq (2^{k-1})^3$ és így (72)-ből

$$(73) \quad \iint_N \delta_k^2(x, y) dx dy = O(1) \{ \log^2(2^{k-1}) \} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} (b_i^2 + a_i^2),$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$(74) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \iint_N \delta_k^2(x, y) dx dy = O(1) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} (a_i^2 + b_i^2) \log^2 i \right) = \\ = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log^2 n < \infty$$

és így a BEPPO LEVI tétel szerint a

$$(75) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2(x, y)$$

pozitív tagú függvénysor m. m. $(x, y) \in N$ pontban konvergens, tehát m. m. $(x, y) \in N$ pontra

$$(76) \quad \delta_k(x, y) \rightarrow 0,$$

midőn $k \rightarrow \infty$, amiből (70) és (69) egybevetésével tételünk igazsága adódik.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] F. MERTENS: Über die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **79**, (1875) 182—184.
- [2] N. H. ABEL: Untersuchungen über die Reihe:
- $$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$
- Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1** (1826) 311—339 (317—318).
- [3] A. PRINGSHEIM: Ueber die Multiplications bedingt convergenter Reihen, *Mathematische Annalen* **21** (1883) 327—378.
- [4] A. PRINGSHEIM: Eine Anwendung auf die Multiplication zweier trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **26** (1886) 157.
- [5] G. H. HARDY: The multiplication of conditionally convergent series. *Proceedings of the London mathematical Society* II, **6** (1908) 410—422.
- [6] K. TANDORI: Über die orthogonalen Funktionen I, *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957) 57—130.
- [7] H. RADEMACHER: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen* **87** (1922) 112—138.
- [8] D. MENSOV: Sur les séries de fonctions orthogonales I, *Fundamenta Math.* **4** (1923) 82—105.
- [9] J. HINCIN—A. KOLMOGOROV: Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. *Recueil Math. Moscou* (Mat. Sbornik) **32** (1925) 668—677.
- [10] H. STEINHAUS: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, *Fundamenta Math.* **4** (1923) 286—310.
- [11] G. FUBINI: Sugli integrali multipli, *Rend. Accad. Lincei Roma*, **16** (1907) 608—614.
- [12] E. CESÁRO: Sur la multiplication des series, *Bulletin des sciences mathématiques* II, **14** (1890) 14—
- [13] A. KOLMOGOROV: Une contribution à l'étude de la convergence des series de Fourier, *Fund. Math.* **5** (1924) 96—97.

(Beérkezett: 1967. II. 13.)

ON A PROBLEM OF G. H. HARDY CONCERNING TO C-MULTIPLICATION OF INFINITE SERIES

by L. G. PÁL

Summary

In 2 the following theorem is proved: If two hyperharmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-s}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-t}$ converge with probability 1 (i. e. if $s, t > \frac{1}{2}$) then their Cauchy-product series converges too.

3 contains the following generalization of theorem [2, 9]: If for two given series $A = \sum a_n$ and $B = \sum b_n$ the conditions

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty, \quad \sum b_n^2 \log^2 n < \infty$$

are satisfied, then the Cauchy-product of A and B is convergent.