A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

MARKOV-FOLYAMATOK ÉS AZ ANALÍZIS EGYES VELÜK KAPCSOLATOS PROBLÉMÁI[1]

Írta: E. B. DINKIN

1. A *Markov*-folyamatok elméletének kezdeti kialakulásától fogva nyilvánvaló volt, hogy szoros kapcsolat áll fenn a *Markov*-folyamatok és az analízis egyes problémái között. Nem hiába viselte A. N. KOLMOGOROV ebben a tárgykörben alapvető munkája, amelyet 1931-ben tett közzé, „A valószínűségelmélet analitikus módszereiről" címet [39] (orosz fordítás: [38]). Jelentős részében az említett összefüggéseket tanulmányozza A. JA. HINCSIN 1933-ban megjelent, „A valószínűségelmélet aszimptotikus törvényei" című könyve is [52] (orosz fordítás: [51]).

Az ötvenes években — és különösen az utolsó öt évben — a *Markov*-folyamatok elmélete az intenzív fejlődés új szakaszába lépett. Ha korábban a valószínűségelmélet és az analízis közötti kapcsolatok bizonyos fokig egyoldalúaknak voltak is mondhatók (a valószínűségelmélet saját céljaira felhasználta az analízis eredményeit és módszereit), napjainkban mindinkább kialakul a fordított helyzet is: az analízis egyes problémáinak vizsgálatában valószínűségelméleti módszereket alkalmaznak. Így nemcsak heurisztikus következtetésekre jutnak a valószínűségelmélet módszerei révén, hanem számos esetben szigorú bizonyítást is kapnak analitikus eredményekre. A lineáris operátorok félcsoportjai elméletének módszereit felhasználva lehetségessé vált a *Markov*-folyamatok tág osztályait korábbiaknál alaposabban osztályozni. Új, mély összefüggésekre bukkantak rá a *Markov*-folyamatok elmélete és a potenciálelmélet között. Kritikai felülvizsgálásnak vetették alá az elmélet alapjait: a „szigorúan *Markov*-folyamat" fogalom, amely újdonság volt, rendkívüli fontosságra tett szert a *Markov*-folyamatok egész elmélete szempontjából. Ezekben az újabb irányokban intenzív munka folyik az egész világon; sok kiváló matematikus veti latba képességeit: FELLER, DOOB, HUNT, RAY, CHUNG, KAC és még sokan

[1] Ez a cikk kibővített szövege annak a szemleszerű előadásnak, amelyet a szerző 1959. október 20-án mondott el a Moszkvai Matematikai Társaság ülésén (ezt az ülést a Moszkvai Egyetemen E. B. Dinkin vezetésével működő szeminárium tudományos munkabeszámolójának szentelték). (*Uszpehi Matematicseszkih Nauk* **15** (1960): 2, 3—24).

mások az USA-ban, ITO, YOSIDA, MARUYAMA és tanítványai Japánban, KENDALL, REUTER és mások Angliában, FORTET Franciaországban. A szovjet matematikusok is aktívan részt vesznek ebben az alkotó versengésben. A *Markov*-folyamatok elméletének új irányaival foglalkozó matematikusok egy csoportja a Moszkvai Egyetemen a szerző vezetésével szemináriumot létesített. A jelen szemlében azokról az alapvető eredményekről lesz szó, amelyeket e szeminárium résztvevői értek el az 1955/56. tanévtől kezdve. Így figyelmünket különösen azokra az új eredményekre fordítjuk, amelyek az utóbbi néhány évben születtek. Természetesen szemlénkben szó lesz külföldi matematikusoknak olyan munkáiról is, amelyek a szeminárium tematikájával vannak kapcsolatban. E tekintetben azonban nem tarthatunk igényt a teljességre.

A bevezető 1. §-ban röviden összefoglaljuk a *Markov*-folyamatok elméletéből számunkra szükséges alapfogalmakat. A szeminárium munkájának legfőbb irányairól a 2—7. §-ban adunk beszámolót. A befejező 8. § bizonyos tájékoztatást tartalmaz a szeminárium résztvevőiről és történetéről.

1. §. Bevezetés

2. Mit értünk *Markov*-folyamaton? Hadd kezdjem a *Markov*-folyamatok egy fontos osztályával (az úgynevezett diffúziós folyamatokkal), amelyek a *Brown-mozgásnak* nevezett fizikai jelenséget írják le. Ismeretes, hogy valamely folyadékban elkevert festék részecskéi kaotikusan mozognak, szakadatlanul változtatva mozgásuk irányát. Ennek a mozgásnak az oka a részecskék ütközései a folyadék molekuláival. A *Brown*-mozgás első matematikai elméletét EINSTEIN és SMOLUCHOWSKI alkotta meg. Az A. N. KOLMOGOROVtól származó korszerűbb formában ez az elmélet a következő. Alapvető matematikai fogalom a $P(t, x, \Gamma)$ függvény, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy az x pontból elindult részecske t idő múlva a Γ halmazba kerül. E függvény tulajdonságaira tett néhány feltevésből azután levezethető, hogy

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, dy,$$

ahol $p(t, x, y)$ a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial p^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1}$$

parabolikus differenciálegyenlet alapmegoldása. A most megfogalmazott eredmény lehetővé teszi, hogy a *Brown*-mozgással kapcsolatos egész sor fontos kérdésre választ adjunk a differenciálegyenletek elméletének módszereivel. Emellett azonban egész sor más, nem kevésbé fontos probléma nem tárgyalható a vázolt elmélet keretében. Például érdekelhet minket az is, mennyire gyorsan fognak a festékrészecskék leülepedni valamilyen elnyelő felületre. Hacsak nem vezetünk be bizonyos kiegészítő feltételeket, akkor ennek a problémának a megoldását csupán a $P(t, x, \Gamma)$ függvény felhasználásával nem lehet megkapni.

3. A *Brown*-mozgás eddigieknél pontosabb matematikai modelljének nemcsak azokkal a valószínűségekkel kell számolnia, amelyek egyetlen időpontra vonatkoznak, hanem a folyamat egész lefolyására vonatkozó valószínűségeket is figyelembe kell vennie. Ekkor az elmélet tárgya már a mozgás x_t realizációja lesz. A mozgás véletlenszerű jellegét az a feltevés fejezi ki matematikai formában, hogy $x_t = x_t(\omega)$, ahol ω valamilyen Ω halmaz — „az elemi események tere" — egy eleme, és ezen a halmazon a P_x valószínűségi mértékek bizonyos összessége van megadva. Azokat az A halmazokat, amelyekre a $P_x(A)$ értékek definiálva vannak, a folyamattal kapcsolatos eseményeknek nevezzük, és a $P_x(A)$ értéket úgy értelmezzük, mint az A esemény valószínűségét azon feltétel mellett, hogy a mozgás az x pontból indul el. A folyamattal kapcsolatos események közé tartozik például az $\{x_t \in \Gamma\}$ esemény. A $P_x\{x_t \in \Gamma\} = P(t, x, \Gamma)$ valószínűséget a folyamat átmenet-függvényének nevezzük. Az első modellben ezt a folyamat egyetlen matematikai jellemzőjének tekintettük, most azonban alárendelt szerepet kap.

Az a matematikai fogalom, amelyet megkaptunk, a tulajdonképpeni *Markov*-folyamat, korszerű felfogásban. *Markov*-folyamatnak nevezzük az (x_t, P_x) párt, ahol $x_t = x_t(\omega)$ egy függvény, amely $t \geqq 0$ és $\omega \in \Omega$ esetén van értelmezve, P_x pedig az Ω eseménytér bizonyos részhalmazain értelmezett valószínűségi mértékek összessége. Az a fázistér, amelybe az x_t függvény értékei esnek, a *Brown*-féle mozgás esetében a háromdimenziós tér bizonyos tartománya. Általában azonban ez egy tetszőleges E halmaz, amelyben értelmezve van „mérhető részhalmazok" bizonyos rendszere. Az az alapfeltevés, amelyet az x_t függvénynek és a P_x mértéknek ki kell elégítenie, a *Markov*-féle elv: ismert jelen esetében a jövő független a múlttól. Pontosabban, x_t ismert értéke mellett a részecske további mozgásának prognózisa nem függ a t időpontig lefolyt mozgás jellegétől.

4. Az az általános szkéma, amely a *Markov*-folyamatokat kapcsolatba hozza az analízissel, a fázistérben értelmezett függvények eltolásának fogalmára van alapozva. Rögzítsünk valamilyen t időpontot. Legyen $f(x)$ a fázistérben értelmezett mérhető függvény. Ekkor $f(x_t)$ valamilyen függvény az Ω térben. Ennek a függvénynek a P_x mérték szerinti integrálja az eltolt függvény értéke az x pontban. Képletben ez így írható fel:

$$T_t f(x) = M_x f(x_t) = \int_E f(y) P(t, x, dy);$$

ahol $P(t, x, \Gamma)$ az átmenet-függvény. A T_t függvény-eltolás egy lineáris operátor. A *Markov*-féle elvből következik, hogy $T_s T_t = T_{s+t}$ $(s, t \geqq 0)$, vagyis a T_t operátorok félcsoportot alkotnak. Tekintsük most a „végtelen kicsi eltolás operátorát", amelynek definíciója

$$Af(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}. \tag{2}$$

Ezt az operátort a *Markov*-folyamat *infinitezimális* operátorának nevezzük. Ha Af definiálva van, akkor $T_t f$ megoldása a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \tag{3}$$

egyenletnek, $u(0, x) = f(x)$ kezdeti feltétel mellett.

Diffúziós foyamat esetében, (amely *Brown*-mozgást ír le) az infinitezimális operátort az

$$(4) \qquad Af = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

képlet adja[2] (ahol az $a_{ij}(x)$ számok minden x-re pozitív szemidefinit matrixot képeznek). Ebben az esetben a (3) egyenlet lényegében véve egyenértékű az (1) egyenlettel.

Általában a folyamat átmenet-függvényét úgy tekinthetjük, mint a (3) egyenlethez tartozó alapmegoldást, vagy *Green*-függvényt. Az a körülmény azonban, hogy a P_x mértékek bizonyos rendszere rendelkezésünkre áll, megengedi, hogy elméletünk keretei között sokkalta gazdagabb konstrukciókat és transzformációkat vezessünk be, mint ahogy az csupán a differenciálegyenletek elméletének keretében lehetséges volna. Például abban a képletben, amely a T_t eltolás-operátort definiálja, a t állandót helyettesíthetjük a τ véletlen időponttal. A T_τ operátorok már nem fejezhetők ki átmenet-függvény segítségével. Mindazonáltal ilyen operátorok révén lehetséges például kifejezni a *Dirichlet*-probléma megoldását tetszőleges elliptikus egyenlet és tetszőleges tartomány esetében.

2. §. A Markov-folyamatok elméletének általános problémái

5. Ezek a problémák a *Markov*-folyamatok elméletének megalapozásával kapcsolatosak, és túlnyomórészt halmazelméleti jellegűek. Három ilyen problémára térek itt ki.

Az első közülük a folyamat realizációi jellegének kérdése. Példaként tekintsünk egy diffúziós folyamatot, amelynek infinitezimális operátorát a (4) képlet definiálja. Vajon folytonos lesz-e ennek a folyamatnak minden realizációja? Ez a probléma alapvető jelentőségű nemcsak a *Brown*-mozgás vizsgálata szempontjából, hanem a (4) differenciáloperátorral kapcsolatos bármely analitikus probléma kvalitatív megoldása szempontjából is. Milyen is a válasz erre a kérdésre? Mindenekelőtt, a kérdés nem egészen helyesen van felvetve. Arról van szó, hogy a realizációk halmazát nem határozza meg egyértelműen az infinitezimális operátor, vagy az átmenetfüggvény. Ezért sokkal helyesebb így tenni fel a kérdést: létezik-e olyan (4) infinitezimális operátorral rendelkező *Markov*-folyamat, amelynek minden realizációja folytonos? Erre a kérdésre igenlő a válasz. A *Markov*-folyamatok elméletében diffúziós folyamaton a (4) infinitezimális operátorral rendelkező folyamatok közül mindig azokat értjük, amelyeknek minden realizációja folytonos. Ezt a folytonos realizációjú folyamatot az A operátor lényegében véve egyértelműen meghatározza.

Egy általános kritériumot, amely lehetővé teszi annak megállapitását, milyen átmenet-függvényeknek felelnek meg a folytonos realizációjú *Markov*-folyamatok, 1952-ben E. B. DINKIN vezetett be [35]. Nem sokkal később ugyanerre az eredményre jutott KINNEY amerikai matematikus [82] is. Ez a kritérium egészen egyszerű, de csak elégséges és nem szükséges. 1957-ben L. V. SZEREGIN [43] egy másik, kissé bonyo-

[2] Pontosabban, az A operátort a (4) képlet az összes kétszer folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozólag adja meg. Mindamellett értelmezési tartományába esnek bizonyos, nem ennyire sima függvények is. Ily módon az infinitezimális operátor bizonyos kiterjesztése a (4) differenciáloperátornak.

lultabb, ugyanakkor azonban erősebb kritériumot vezetett be, amely az esetek tág osztályában nemcsak elégséges, hanem szükséges is a realizációk folytonosságához.

A *Dinkin—Kinney*-féle kritériumra támaszkodva egyszerű elégséges feltétele adható meg a realizációk folytonosságának az infinitezimális operátor segítségével. Ennek a feltételnek a leglényegesebb része az a követelmény, hogy az operátor lokális jellegű legyen, vagyis $Af(x_0)$ értéke ne változzék meg, amidőn a függvény az x_0 pont bizonyos környezetén kívül megváltozik. Ez a feltétel nyilván teljesül az összes differenciáloperátorokra. Ebből megkapható a diffúziós folyamatok realizációinak folytonosságáról szóló fentebb említett tétel. DINKIN, KINNEY és SZEREGIN munkáiban a folytonosság feltételei mellett feltételek találhatók arra is, hogy a folyamat összes realizációi jobbról folytonosak legyenek, vagy pedig ne legyen másodfajú szakadásuk. A *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályánál a relációk jobbról való folytonosságára egészen finom feltételeket kapott A. A. JUSKEVICS [57], [58].

6. A másik probléma, amely a *Markov*-folyamatok elméletében felmerült, az a kérdés, mi a hatásköre a *Markov*-féle elvnek, annak, hogy ismert jelen mellett a jövő független a múlttól.

A folyamat minden realizációját vágjuk szét két részre: a valamilyen Γ halmaz első elérésének τ időpontjáig tartó részre, és az ezen időpont utáni részre. Tegyük fel, hogy ismerjük x_τ-t. Lényeges-e a mozgás ismerete a τ időpontig ahhoz, hogy megjósolhassuk a mozgás lefolyását a τ időpont után? A fizikai szemlélet negatív választ kíván. Mindazonáltal ilyen válasz egyáltalán nem következik a *Markov*-folyamat definíciójából, minthogy abban a t rögzített időpont szerepel, nem pedig a τ véletlen időpont. Azokat a *Markov*-folyamatokat, amelyek esetében az a feltétel, hogy ismert jelen mellett a jövő a múlttól független, nemcsak állandó időpontra, hanem a τ véletlen időpontok jól definiált osztályára is teljesül, szigorú értelemben vett *Markov*-folyamatoknak vagy röviden szigorúan *Markov*-folyamatoknak nevezzük.

Az első munka, amely szabatosan megfogalmazza és bizonyítja bizonyos folyamatok szigorú *Markov*-tulajdonságát, J. L. DOOB [64] dolgozata volt. DOOB e munkájában *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályát vizsgálta, melyben a fázistér megszámlálható volt. Ugyanebből a szempontból 1953-ban A. A. JUSKEVICS tanulmányozott általánosabb típusú folyamatokat, amelyeknél az állapotok halmaza szintén megszámlálható volt [56]).

A szigorúan *Markov*-folyamatokat, mint a *Markov*-folyamatok önálló osztályát az 1955—1956. években kezdte tanulmányozni E. B. DINKIN [22], [23], [26], valamint E. B. DINKIN és A. A. JUSKEVICS [36] [3]. DINKIN megmutatta, hogy a szigorú *Markov*-tulajdonságból kiindulva, valamint ehhez hozzávéve a folyamat realizációinak folytonosságára vonatkozó bizonyos követelményeket, ki lehet számítani a folyamatok infinitezimális operátorait. E. B. DINKIN és A. A. JUSKEVICS dolgozatában először szerepel a szigorú értelemben vett *Markov*-folyamatok általános definíciója, valamint példákat adnak olyan *Markov*-folyamatokra, amelyek nem szigorúan *Markov*-félék, végül szó van azokról a feltételekről is, amelyek elegendőek ahhoz, hogy egy *Markov*-folyamat szigorúan *Markov*-féle legyen.

[3] 1956-ban három amerikai dolgozat is megjelent (HUNT [78], CHUNG [62], RAY [86]) melyeknek szerzői — JUSKEVICStől és DINKINtől függetlenül — a szigorú Markov-tulajdonság különböző formáit tanulmányozták a *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályára.

Ezek a feltételek a következők. Meg kell követelni, hogy bizonyos topológiában a folyamat összes realizációi jobbról folytonosak legyenek, az eltolás-operátorok pedig a folytonos, korlátos függvényeket újból folytonosakba vigyék át. Nem nehéz belátni, hogy diffúziós folyamatok esetében mindkét feltétel teljesül, úgyhogy a diffúziós folyamatok egyszersmind szigorúan *Markov*-félék is.

Az utolsó három évben egész sor munka jelent meg, amelyben további analízisnek vetik alá a szigorú *Markov*-tulajdonságot (A. A. JUSKEVICS [57], [59], R. BLUMENTHAL [60], E. B. DINKIN [27], G. MARUYAMA [84], P. LEVI [83], D. RAY [87]). Igen érdekes D. RAY munkája, amelyben megmutatja, hogy elég általános feltételek mellett kiterjeszthető a *Markov*-folyamat fázistere úgy, hogy a folyamat szigorúan *Markov*-félévé váljék.

A szigorúan *Markov*-folyamatokról szóló alapvető eredmények, valamint a realizációk folytonosságának legfőbb kritériumai helyet kaptak E. B. DINKIN [33] monográfiájában is.

7. A harmadik halmazelméleti probléma, amelyet érinteni akarok, a fázistér legtermészetesebb topologizálásának kérdése. A *Markov*-folyamat definíciójában semmiféle topológia sem szerepel. Az E fázistér tetszőleges absztrakt halmaz, amelyben mérhető részhalmazok bizonyos rendszere van megadva. Mindazonáltal, amint már láttuk a *Markov*-folyamatok tanulmányozásakor, be kell vezetni ilyen vagy olyan topológiát a fázistérben. 1959-ben E. B. DINKIN [31] a következő javaslatot tette a legtermészetesebb topológia definíciójára: a Γ halmazt nyíltnak nevezzük, ha tetszőleges $x \in \Gamma$ mellett az x-ből kiinduló realizáció 1 valószínűséggel Γ határain belül marad pozitív időtartam lefolyása alatt. [4] E legtermészetesebb topológiáról érdekes tulajdonságok bizonyíthatók be az úgynevezett standard folyamatok tág osztályára, — ide tartoznak az összes, az alkalmazásokban előforduló folyamatok, speciálisan az összes diffúziós folyamatok is. Kimutatható, hogy ilyen folyamatok esetében az x pont akkor és csak akkor tartozik a Γ halmaz természetes lezárásába, ha az x-ből kiinduló részecske 1 valószínűséggel eléri Γ-t tetszőleges kis időtartam alatt. Az $f(x)$ függvény akkor és csak akkor folytonos e legtermészetesebb topológiában, amidőn $f(x_t)$ 1 valószínűséggel t jobbról folytonos függvénye. Ez utóbbi eredmény I. V. GIRSZANOVtól származik [15].

I. V. GIRSZANOV [15] és M. G. SUR [54] bebizonyították, hogy az $f(x)$ függvény folytonossága a természetes topológiában olyan tulajdonság, amely eltoláskor megmarad. Ez a feltétel — ti., hogy az eltolások az összes folytonos függvényt folytonosba viszi át —, igen fontos szerepet játszanak a *Markov*-folyamatok elméletében (láttuk, hogy ez az egyik a két feltétel közül, amelyek biztosítják egy *Markov*-folyamat szigorúan *Markov* jellegét). Durván szólva ez a feltétel azt jelenti, hogy egymáshoz közeli pontokból kiindult realizációk egyformán viselkednek. Ennek a feltételnek a szerepére először W. FELLER mutatott rá. Ezért azokat a folyamatokat, amelyek eleget tesznek ennek a feltételnek, *Feller*-folyamatoknak nevezzük. SUR és GIRSZANOV eredményének, amely azt mondja ki, hogy természetes topológiában az összes standard folyamatok *Feller*-félék, jelentős elvi érdekessége is van.

A természetes topológia egyáltalán nem az egyetlen topológia, amely a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából érdekes. Speciálisan, érdekes valamely a folyamat-

[4] A *Brown*-mozgás esetében, amely a *Laplace*-operátornak felel meg, ez a topológia egybeesik azzal a topológiával, amelyet korábban H. CARTAN [61] és J. L. DOOB [65], [66] tanulmányoztak.

tal invariáns módon kapcsolatban álló bizonyos egyenletes struktúrának a definíciója, amelyet I. V. GIRSZANOV javasolt [15]. A *Brown*-mozgás esetében ezt a struktúrát a közönséges euklidészi metrika indukálja.

3. §. Az infinitezimális operátor alakja. Általánosított diffúziós folyamatok

8. Milyen operátorok lesznek *Markov*-folyamatok infinitezimális operátorai? Ennek a kérdésnek sarkalatos jelentősége van a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából, minthogy egészen általános feltételek mellett az infinitezimális operátor alapján egyértelműen előállítható az átmenet-függvény (lásd [25]), az átmenetfüggvény révén pedig áttekinthető az ennek a függvénynek megfelelő folyamatok teljes osztálya. Másrészről ez a kérdés az analízis szempontjából is érdekes, mert ez a következő kérdéssel ekvivalens: milyen operátorokra lehet alkalmazni valószínűségelméleti vizsgálati módszereket?

Az infinitezimális operátor alakja tanulmányozásának fontos eszköze E. B. DINKIN egy általános tétele [22], [26].

E tétel állítása a következő képletbe foglalható:

$$Af(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{T_{\tau_U} f(x) - f(x)}{M_x \tau_U}. \tag{5}$$

Itt U az x pont környezete; τ_U az U-ból való első kilépés időpontja; a határátmenet során U az x-re húzódik össze.

Ennek a képletnek figyelemre méltó a hasonlósága a (2) képlethez, amely az infinitezimális operátort definiálja. Mindazonáltal — nem tekintve most a formális hasonlóságot — az átmenet az egyik képletről a másikra távolról sem triviális. Ennél az átmenetnél lényegesen fel kell használni azt, hogy a tekintett folyamat szigorúan *Markov*-féle és jobbról folytonos. Teljes szigorúsággal csak azt mondhatjuk, hogy az alaptétel idézett alakja csupán *Feller*-folyamatokra érvényes, de kicsit más alakjában átvihető nem-*Feller*-folyamatokra is.

Az (5) képlet jobb oldalán álló főtag a következő alakban is írható:

$$T_{\tau_U} f(x) = M_x f[x(\tau_U)] = \int_E f(y) \Pi_x(dy),$$

ahol Π_x a valószínűségeloszlást jelenti arra a pontra nézve, amelybe a részecske U-ból való kilépésének pillanatában esik. Ha a folyamat folytonos, akkor ez az eloszlás U határán összpontosul. Ebben az esetben az A infinitezimális operátor előállítására nyert recept, amelyet az (5) képlet ad meg, erősen emlékeztet annak a jól ismert receptjére, hogyan lehet megkapni a közönséges *Laplace*-operátort a gömbre történő átlagolás operátorából; a különbség csupán az, hogy az általános esetben az átlagolást nem egyenletes mérték szerint végezzük el, mint a *Laplace*-operátor esetében, hanem bizonyos nem egyenletes mérték szerint. Kézenfekvő minden olyan operátort, amelyet ilyen recept segítségével kaptunk, *általánosított másodrendű elliptikus differenciáloperátornak* nevezni. Ezt az elnevezést még az is jogosulttá teszi, hogy az ilyen operátorok a közönséges elliptikus operátorok számos tulajdonságával rendelkeznek, valamint az is, hogy ha bizonyos tartományban az (5) jobb oldalán álló határérték létezik oly függvényekre, amelyeket a koordináták és a koordináták páronkénti szorzatai adnak meg, akkor minden kétszer differenciálható függvényre ez a határérték leírható közönséges elliptikus differenciáloperátorral (amely esetleg degenerált).

Így, ha egy *Feller*-folyamat folytonos, akkor annak infinitezimális operátora általánosított, másodrendű elliptikus differenciáloperátor.

Ebben az értelemben *bármely folytonos Feller-folyamat úgy tekinthető, mint egy általánosított diffúziós folyamat.*

9. Az a gondolat, hogy bármely, folytonos realizációjú *Feller*-folyamat általánosított diffúziós folyamat is, további támogatásra talál a számegyenesen értelmezett folyamatok esetében.

Azt találjuk, hogy ebben az esetben az infinitezimális operátor egy általánosított második derivált,

$$Af(x) = D_v D_u f(x), \tag{6}$$

ahol $D_u f$ az u függvény szerinti derivált, vagyis az f növekménye és az u függvény növekménye hányadosának határértéke. Ebben a képletben az u és v tetszőleges növekvő függvények; az u függvénynek folytonosnak kell lennie (a v függvény szakadásos is lehet). Ha az u és v függvények kétszer differenciálhatók, akkor a (6) operátor a következő alakban írható:

$$Af(x) = a(x)\frac{d^2f}{dx^2} + b(x)\frac{df}{dx}, \tag{6'}$$

vagyis közönséges diffúziós folyamattal van dolgunk. Úgy fogható fel a dolog, hogy a (6) képlettel megadott általános folytonos egydimenziós folyamat diffúziós folyamat is, amelynél az $a(x)$ és $b(x)$ együtthatók (bizonyos értelemben) általánosított függvények.

A (6) képlet könnyen levezethető az (5) képletből. Mégis, legelőször ezt W. FELLER egészen más, tisztán analitikus módszerrel vezette le. ([73], lásd még [77]). FELLER jelentős dolgozata a *Markov*-folyamatok elmélete fejlődésének egyik legfontosabb ösztönzője volt az utóbbi években.

10. A közelmúltban egész sor eredményt kaptak a (6) operátornak megfelelő folytonos folyamatok tulajdonságaival kapcsolatban.

Speciálisan A. B. VENTCEL [5] kimutatta, hogy az ilyen folyamatok átmenetfüggvénye a következő alakban írható:

$$P(t, x, \Gamma) = \int p(t, x, y)\, dv(y),$$

ahol $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_v D_u p$$

egyenlet alapmegoldása.

A. D. VENTCEL [4] dolgozatában jelentős további eredményt ért el egy másik problémával kapcsolatban is, amelyet még a 30-as években vizsgált I. G. PETROVSZKIJ [41] jelentős munkájában. Ennek a problémának a valószínűségelméleti értelmezése a következő: ki kell számítani, hogy mi a nagyságrendje a mozgó részecske t idő alatt az x kiindulási ponttól való maximális eltérésének, amidőn $t \to 0$. Az x tengely transzformálása révén az általános eset visszavezethető az $u(x) \equiv x$ esetre (ebben az esetben $b(x) \equiv 0$). I. G. PETROVSZKIJ teljesen megoldotta a problémát annak a folyamatnak az esetére, amely a d^2/dx^2 operátornak felel meg. Nem nehéz megmutatni, hogy tetszőleges, reguláris $a(x)$ együttható esetén a mozgó részecske viselkedése ugyanolyan lesz, mint PETROVSZKIJ esetében. A. D. VENTCEL megvizsgálta a (6) operátornak megfelelő általános folyamatokat és megmutatta, hogy ezek esetében lényeges kvalitatív eltérések lehetnek a *Petrovszkij*-féle esettől. Durván szólva, a *Petrovszkij*-féle esetben a részecske maximális eltérése a kiindulási helyzettől (t idő alatt) $t^{\frac{1}{2}}$ rendű. VENTCEL megmutatta, hogy ha az $a(x)$ együtthatónak szingularitása van a mozgás kiindulási pontjában, akkor az említett eltérésnek tetszőleges t^α rendje lehet, ahol $0 < \alpha < 1$. Azon pontokban pedig, amelyekben $v(x)$-nek szakadása van, az eltérésnek rendje t.

A valószínűségelméleti szkémába belefoglalhatók az

$$a(x)\frac{d^2f}{dx^2} + b(x)\frac{df}{dx} + c(x)f \qquad (c \leqq 0)$$

típusú, az eddigieknél általánosabb differenciáloperátorok is. Ilyen operátoroknak azok a *Markov*-folyamatok felelnek meg, amelyek valamilyen véletlen időpontban megszakadnak. Amint azt nemrég E. B. DINKIN megmutatta [90], az ilyen típusú, az egyenesen értelmezett megszakadó folytonos folyamatok általános alakját úgy lehet megkapni, hogy a (6) képletet az

$$Af = D_r D_u \left(\frac{f}{\pi}\right) \tag{7}$$

képlettel behelyettesítjük, ahol $1/\pi$ bizonyos általánosított értelemben alulról konkáv függvény.

11. Amikor az (5) alaptételből levezetjük a (6) képletet, egyszersmind egyszerű kifejezést is kapunk az u és v függvényekre a folyamat egyes szemléletes valószínűségi jellemzőinek segítségével. Tegyük fel, hogy a mozgás bizonyos szakaszon folyik le, ekkor ilyen szemléletes jellemzők lesznek: annak a $p(x)$ valószínűsége, hogy az x pontból kiindulva a jobb oldali végpontot korábban elérjük, mint a bal oldalit; az $m(x)$ átlagos idő, amely eltelik az x-ből való kilépés időpontjától kezdve a határ eléréséig.

Két analóg, szemléletes jellemzőt bevezethetünk többdimenziós folyamatok esetében is. A *III. Össz-szövetségi Matematikus Gyűlésen* tartott összefoglaló előadásában E. B. DINKIN felvetette a következő problémát [29]: a többdimenziós folyamatok milyen osztályai esetében áll fenn, hogy ez a két jellemző teljesen meghatározza a folyamatot? 1958-ban I. V. GIRSZANOV [14] bebizonyította, hogy egyik ilyen típusú osztály azon többdimenziós diffúziós folyamatok osztálya, amelyek esetében az $a_{ij}(x)$ matrix nem elfajult.

12. Főképpen a folytonos realizációjú folyamatokkal foglalkoztam eddig. Lényeges eredmények sorakoznak azonban a nem-folytonos realizációjú folyamatokra vonatkozóan is. Többek között E. B. DINKIN [28] megadta a tisztán ugrásokból álló folyamatok teljes osztályozását. Ezek olyan folyamatok, amelyekben a mozgás teljesen ugrások formájában történik, vagyis amelyekben egy részecske, mely bizonyos pozitív időn át a kiindulási pontban tartózkodik, később újabb pontra ugrik át, abból pedig egy másik pontba és így tovább. Az ilyen folyamatok tanulmányozásakor az alapvető nehézségeket az okozza, hogy esetünkben transzfinit ugrássorozatok lehetségesek. Az ilyen folyamatok vizsgálatának menete néhány éven át egyhelyben állott. Ma azonban teljesen megoldották már a problémákat.

4. §. Markov-folyamatokkal kapcsolatos harmonikus, szubharmonikus és szuperharmonikus függvények

13. Emlékezzünk vissza a szuperharmonikus függvények szokásos definíciójára. Az $f(x)$ függvény *szuperharmonikus*, ha

a) f-nek tetszőleges, x-ben elhelyezett középpontú gömbfelületre vonatkozó átlaga kisebb vagy egyenlő $f(x)$-szel;

b) $f(x)$ felülről folytonos.

Ha az első feltétel akkor is teljesül, midőn a kisebb vagy egyenlő jelet az egyenlőségjellel cseréljük fel, akkor az f függvényt *harmonikusnak* nevezzük. Ha a feltétel nagyobb vagy egyenlő jellel áll fenn, akkor f-et *szubharmonikusnak* nevezzük. Vizsgálódásunkat konkretizálandó, a jövőben csak szuperharmonikus függvényekről fogunk beszélni.

Minden *Markov*-folyamat kapcsolatba hozható bizonyos függvényosztályokkal, amelyek a közönséges szuperharmonikus függvények analogonjai. Az *a)* és *b)* feltételeket a következőkkel kell helyettesíteni:

a') $T_\tau f(x) \leqq f(x)$ (τ tetszőleges nyílt halmazból történő első kilépés időpontja);

b') $T_{\tau_n} f(x) \to f(x)$, ha $P_x\{\tau_n \to 0\} = 1$.

A diffúziós folyamat esetében, amely a *Laplace*-operátornak felel meg, az *a')*—*b')* feltételek ekvivalensek az *a)*—*b)* feltételekkel. Ennek a ténynek a bizonyítása egyáltalán nem egyszerű, könnyű azonban rávilágítani arra, miért következik *a)* az *a')*-ből. Legyen τ az első kilépés időpontja abból a gömbből, amelyet az S gömb körülvesz. Ekkor a *Laplace*-operátor minden mozgással szemben fennálló invarianciája folytán a részecske a gömb középpontjából kilépve, a határ elérésének időpontjában egyenletes eloszlású lesz az S gömbön. Ezért $T_\tau f(x) = M_x f(x_\tau)$ az S gömbre vett átlagra redukálódik.

A *Markov*-folyamattal kapcsolatos szuperharmonikus függvény fogalmát E. B. DINKIN vezette be [31] munkájában[5]. Itt a szerző bebizonyítja, hogy a *Markov*-folyamatokkal kapcsolatos nem-negatív szuperharmonikus függvények osztálya azonos az úgynevezett excesszív függvények osztályával, amelyet 1957-ben G. A. HUNT vezetett be [79]. HUNT úgy definiálja az excesszív függvényt, mint egy olyan nemnegatív függvényt, amely eltoláskor nem növekedik. Pontosabban, teljesülniük kell a következő feltételeknek:

a") tetszőleges t mellett $T_t f(x) \leqq f(x)$;

b") $T_t f(x) \to f(x)$, amidőn $t \to 0$.

[5] Diszkrét paraméterű *Markov*-folyamatokkal kapcsolatos harmonikus, szubharmonikus és szuperharmonikus függvényeket W. FELLER és J. L. DOOB vizsgáltak [74] illetve [69] munkájukban. Bizonyos speciális diffúziós folyamatok esetére ezeknek a függvényeknek a vizsgálata megtalálható J. L. DOOB [64]—[66] munkáiban.

HUNT egész sor nagy jelentőségű tételt bizonyított be az excesszív függvényekről. Figyelembe véve az excesszív és szuperharmonikus függvények közötti összefüggést, HUNT eredményeiből a következő következtetések vonhatók le:

1. Nevezzük az f függvényt *simának*, ha Af értelmezve van. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy sima függvény szuperharmonikus legyen, az hogy $Af \leqq 0$.

2. Minden nem-negatív szuperharmonikus függvény sima szuperharmonikus függvények valamely nemcsökkenő sorozatának határértéke.

3. Az összes szuperharmonikus függvény folytonos a természetes topológiában.

14. Az excesszív függvény fogalmával szoros kapcsolatban van az excesszív valószínűségi változó fogalma. Ez a fogalom csak a közelmúltban keletkezett (lásd E. B. DINKIN [34], [90]). Hogy ezt definiálhassuk, bizonyos kitérőt kell tennünk. A $t \to t+h$ időtranszformáció alkalmazásával az x_t valószínűségi változó x_{t+h}-ba megy át. Ez a transzformáció kézenfekvő módon kiterjeszthető az összes valószínűségi változóra, amely egy *Markov*-folyamattal kapcsolatos. Így keletkezik aztán egy bizonyos operátor, amely az Ω téren megadott függvényeket transzformál. Ezt szokásos θ_h-val jelölni.

A ξ nem-negatív valószínűségi változót *excesszívnek* nevezzük akkor, ha

α) $\theta_h \xi \leqq \xi$, tetszőleges h-ra;

β) $\theta_h \xi \to \xi$, amidőn $h \to 0$.

Excesszív valószínűségi változóra példa a

$$\xi = \int_0^\infty f(x_t)\,dt, \quad \text{ahol} \quad f \geqq 0$$

valószínűségi változó. Valóban

$$\theta_h \xi = \int_0^\infty f(x_{t+h})\,dt = \int_h^\infty f(x_t)\,dt,$$

amiből világos, hogy az α) és β) feltételek teljesülnek.

Nem nehéz igazolni, hogy ha ξ excesszív valószínűségi változó, akkor

$$f(x) = M_x \xi \tag{8}$$

excesszív függvény.

Egy nagy jelentőségű tételből, amelyet V. A. VOLKONSZKIJ bizonyított be [12], [13], következik, hogy minden korlátos excesszív függvény előállítható (8) alakban. L. V. SZEREGIN példákat adott olyan nem korlátos excesszív függvényekre, melyek (8) alakban nem írhatók fel. Nagyon érdekes volna megvizsgálni azt, hogy milyen tág a nem-korlátos excesszív függvényeknek az az osztálya, amelyet a (8) alakban még előállítható függvények alkotnak.

15. A (8) előállítás speciális esete a szuperharmonikus függvények potenciál alakjában történő előállításának. A háromdimenziós térben a *Newton*-féle potenciál definiálható a

$$V(x) = \int_E \frac{f(y)\,dy}{\|x-y\|} \tag{9}$$

képlettel (az integrálás a *Lebesgue*-mérték szerint történik, $\|x\|$ az x vektor hosszát jelenti, $f(y)$ pedig egy nem-negatív függvény, amely úgy tekinthető, mint valamilyen eloszlás sűrűségfüggvénye.

Megmutatható, hogy a (9) képlet a következő alakra írható át:

$$V(x) = M_x \int_0^\infty f(x_t)\,dt, \tag{10}$$

ahol x_t a *Laplace*-operátornak megfelelő diffúziós folyamat a háromdimenziós térben. A (10) képletnek tetszőleges *Markov*-folyamatra is van értelme, és ez lehetővé teszi, hogy potenciált konstruáljunk tetszőleges ilyen folyamathoz. Megjegyezzük, hogy a (10) előállítás speciális esete a szuperharmonikus függvények excesszív valószínűségi változó segítségével történő előállításának: ξ helyett $\int_0^\infty f(x_t)dt$ veendő.

A szuperharmonikus függvényekre vonatkozó, szemináriumunkban kapott eredmények közül okvetlenül megemlítendő még M. G. Sur egy tétele [55], amely azt mondja ki, hogy Riesz klasszikus tétele — mely szerint tetszőleges szuperharmonikus függvény felbontható egy harmonikus függvény és egy potenciál összegére —, átvihető a szuperharmonikus függvények ama osztályára, amely valamilyen nem elfajult diffúziós folyamattal (vagyis tetszőleges másodrendű elliptikus differenciáloperátorral) van kapcsolatban.

5. §. Additív funkcionálok és a Markov-folyamatok velük kapcsolatos transzformációi

16. A φ_t valószínűségi változók rendszerét a *Markov*-folyamat *additív funkcionáljának* nevezzük, ha

1. $\theta_h\varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_h$;
2. φ_t-t a folyamat t időpontig terjedő szakasza meghatározza.

Markov-folyamat additív funkcionáljára példa a

$$\varphi_t = \int_0^t f(x_t)\,dt.$$

A *Brown*-mozgás esetében ismeretes még egy fontos példa additív funkcionálra, az úgynevezett sztochasztikus integrál,

$$\varphi_t = \int_0^t b(x_t)\,dt,$$

(ezzel kapcsolatban l. [91]-et).

Ha φ_t additív funkcionál, akkor az

$$\alpha_t = e^{\varphi_t}$$

függvényt *multiplikatív funkcionálnak* nevezzük. Az előbbiek szerint ez eleget tesz a 2. feltételnek, az 1. feltétel helyett azonban egy analóg tulajdonság teljesül, amelyben a kivonás jel osztás jellel van felcserélve.

17[6]. A multiplikatív funkcionálok jelentősége a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából nyilvánvaló a következőkből. Legyen

$$\tilde{P}(t, x, \Gamma) = \int_{x_t \in \Gamma} \alpha_t P_x(d\omega).$$

Belátható, hogy ha α_t multiplikatív funkcionál, amelyre $M_x \alpha_t \leqq 1$, akkor létezik egy *Markov*-folyamat, melynek átmenet-függvénye $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ lesz. Általában véve ez a folyamat megszakadó is lehet.

Természetszerűleg felmerül a kérdés: mikor választható meg a $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ átmenet-függvénynek megfelelő folyamat oly módon, hogy ugyanazok a realizációi legyenek, mint a kiindulási folyamatnak?

Azt találjuk, hogy ehhez elégséges, hogy létezzék egy ξ valószínűségi változó, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\alpha_t \theta_t \xi \leqq \xi$, minden t-re,
2. $M_x \xi = 1$, minden x-re,
3. $\theta_h \xi \to \xi$, amidőn $h \to 0$.

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ átmenet-függvényű folyamat megkonstruálható ugyanazzal a realizáció halmazzal, csak — durván szólva — véletlenszerűen meg kell *rövidíteni* ezeket a realizációkat.

Tekintsük most ezeknek a transzformációknak három fontos speciális osztályát.

18. Ha az 1. feltétel egyenlőségjellel teljesül, akkor semmiféle lerövidítést nem kell végezni a realizációkon. Ebben az esetben az új folyamatra való áttérés a P_x mérték transzformációjára vezet, a

$$\tilde{P}_x(A) = \int_A \xi P_x(d\omega) \tag{11}$$

képlet szerint.

Ez az eset speciálisan akkor áll fenn, amidőn a kiindulási folyamat megszakadó diffúziós folyamat, az α_t funkcionált pedig az

$$\alpha_t = \exp\left[-\int_0^t b(x_u)\,dx_u - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(x_u)\,dx_u\right] \tag{12}$$

képlet adja meg. ξ helyett ez esetben $\lim\limits_{t \to \zeta} \alpha_t$ vehető, ahol ζ a folyamat megszakadásának időpontja. A (11) transzformáció arra vezet, hogy a folyamat infinitezimális

[6] A 17—20. pontokban kifejtett eredmények megtalálhatók E. B. DINKIN [34], [92] (lásd még [90]) munkájában.

operátorához hozzá kell venni a $b(x)\frac{d}{dx}$ tagot. Többdimenziós esetben analóg konstrukció segítségével a nem elfajult diffúziós folyamat infinitezimális operátorához tetszőleges elsőrendű differenciáloperátort kell hozzá venni (lásd [16], valamint [42], ahol további irodalmi utalások is találhatók).

19. A folyamat transzformációjára a második fontos példát kapjuk, ha az α_t funkcionál minden t-re eleget tesz az $\alpha_t \leqq 1$ feltételnek. Akkor az 1.—3. feltételek $\xi = 1$-re teljesülnek. Ezt a folyamatokra alkalmazott operációt már korábban is alkalmazta E. B. DINKIN [33] (lásd ezenkívül [32]-t is). Az ekkor kapott folyamatokat a kiindulási folyamat *alfolyamatainak* nevezzük.

Az alfolyamat képezése arra vezethető vissza, hogy a kiindulási folyamat realizációja bizonyos valószínűségeloszlást követve megszakad: α_t ekkor annak a valószínűségét adja meg, hogy a megszakadás a t időpont után következik be.

20. A folyamat transzformációjára adandó harmadik fontos példa az excesszív valószínűségi változókkal kapcsolatos.

Legyen ξ valamilyen excesszív valószínűségi változó és $f(x) = M_x\xi$ a megfelelő excesszív függvény. Ekkor

$$\alpha_t = \frac{f(x_t)}{f(x_0)}$$

multiplikatív funkcionál, az α_t, $\frac{\xi}{f(x_0)}$ pár pedig eleget tesz az 1.—3. feltételeknek. Ily módon a folyamatnak egy érdekes transzformációját kapjuk, amely az infinitezimális operátort az

$$\tilde{A}g = \frac{1}{f} A(fg)$$

képlet szerint transzformálja. Ezt a transzformációt korábban még nem tanulmányozták.

21. Az additív funkcionálokkal kapcsolatos a folyamatok még egy nagyon fontos transzformációja is, amelynek tárgyalása azonban túllépné a tárgyalt szkéma kereteit. Ez az úgynevezett véletlenszerű időmegváltoztatás.

Legyen $\tau(t)$ egy monoton növekvő sztochasztikus függvény. Helyettesítsük az x_t függvényt az $\tilde{y}_t = x_{\tau(t)}$ függvénnyel. Ahhoz, hogy ezen transzformáció után újból *Markov*-folyamatot kapjunk, elégséges, hogy az a φ_t függvény, amely a $\tau(t)$ növekvő függvény inverze, additív funkcionált határozzon meg. (Ez az eredmény csak a kiinduló (x_t, P_x) folyamatra tett bizonyos kikötések mellett van bebizonyítva.)

A *Markov*-folyamatoknál az idő véletlenszerű megváltoztatását először V. A. VOLKONSZKIJ tanulmányozta [9] munkájában. Itt többek közt bebizonyította, hogy az összes egydimenziós folytonos folyamatot megkaphatjuk a d^2/dx^2 operátorral kapcsolatos legegyszerűbb diffúziós folyamatból, éspedig úgy, hogy az x tengelyt monoton transzformációnak vetjük alá, az időt pedig véletlenszerűen megváltoztatjuk. Megjegyezzük, hogy az időnek az a véletlenszerű megváltoztatása, amely a $\varphi_t = \int_0^t f(x_u)\,du$ additív funkcionálnak felel meg, a folyamat infinitezimális operátorának az $f(x)^{-1}$ függvénnyel való megszorzódására vezet.

22. A mondottakból, úgy hiszem, eléggé világos, hogy az additív és multiplikatív funkcionáloknak igen nagy jelentősége van a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából. Ezért nagy érdeklődésre számíthat a következő probléma: adott folyamat esetében meghatározandó az ezen folyamathoz tartozó összes additív funkcionál. V. A. VOLKONSZKIJnak [13] sikerült meghatároznia az egydimenziós *Brown*-mozgáshoz tartozó összes nem-negatív additív funkcionált. Ha azonban lemondunk a nem-negatív jelleg megköveteléséről, vagy pedig több dimenzióra térünk át, akkor a probléma mindmáig megoldatlan. Úgy gondoljuk, hogy ez az egyik legaktuálisabb probléma a *Markov*-folyamatok elméletében.

Nagy érdeklődésre számíthat még a *Markov*-folyamatok transzformációjával kapcsolatos kérdések köre. Ebben az esetben egy bizonyos új kalkulussal van dolgunk, amely a rendelkezésre álló analitikus eszközök tárházát gazdagítja.

6. §. Sztochasztikus integrálegyenletek

23. Legyen x_t, ill. $\tilde{x}_t$ az a folyamat, amely a d^2/dx^2, ill. az

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d}{dx}+m(x)\frac{d}{dx}$$

operátornak felel meg. Amint azt K. ITO [80], [81] megmutatta, az x_t és $\tilde{x}_t$ folyamatok megválaszthatók úgy, hogy az

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_0 + \int_0^t m(\tilde{x}_t)\,dt + \int_0^t \sigma(\tilde{x}_t)\,dx_t \tag{13}$$

összefüggés álljon fenn köztük. Jobb oldalt egy sztochasztikus integrál áll, amellyel már találkoztunk az additív funkcionálokról szóló fejezetben. A (13) egyenletnek egyszerű fizikai értelme van. Ha ezt a következő alakban írjuk:

$$d\tilde{x}_t = m(\tilde{x}_t)\,dt+\sigma(\tilde{x}_t)\,dx_t, \tag{14}$$

akkor azt fejezi ki, hogy a részecske ismert $\tilde{x}_t = x$ helyzetekor a mozgás kis idő alatt lényegében véve egy $m(x)$ sebességű determinált mozgásból, és egy $\sigma(x)$ együtthatóval jellemzett diffúzióból (amely a d^2/dx^2 operátornak felel meg) tevődik össze.

A (13) képletet úgy tekinthetjük, mint egy integrálegyenletet, amely lehetővé teszi $\tilde{x}_t$ kifejezését x_t segítségével. Ennek az egyenletnek a megoldására a szukcesszív approkszimáció módszerét alkalmazhatjuk. Analóg integrálegyenlet írható fel többdimenziós folyamatok esetére is. Ily módon igen alkalmas analitikus apparátust kapunk ahhoz, hogy olyan problémákat, amelyek általános elliptikus, másodrendű differenciáloperátorokkal kapcsolatosak, a *Laplace*-operátorra vonatkozó feladatokra vezessünk vissza. Nem egészen pontosan, inkább szemléletesen mindezeket nagyjából így mondhatjuk el: ITO módszere lehetővé teszi, hogy a folyamat átmenetvalószínűségeire vonatkozó parciális differenciálegyenletek tanulmányozását pótolhassuk a folyamat realizációira vonatkozó közönséges differenciálegyenletek tanulmányozásával. Igaz, hogy ezek a differenciálegyenletek sztochasztikusak, de ugyanúgy tanulmányozhatók, mint a közönséges differenciálegyenletek: visszavezethetjük őket egy olyan integrálegyenletre, amely a szukcesszív approkszimáció módszerével megoldható.

24. A sztochasztikus differenciálegyenletek módszerét ITO sikeresen alkalmazta egész sor konkrét analitikus és valószínűségelméleti probléma megoldásában. Ezt a módszert használva fel, I. V. GIRSZANOV [18] megmutatta, hogy a (4) differenciáloperátor nem elfajult voltával kapcsolatos elég tág megkötések mellett az ennek megfelelő diffúziós folyamat a következő tulajdonságú lesz: az összes korlátos, *Borel*-mérhető függvények a $T_t(t>0)$ eltolással folytonos függvényekbe mennek át. Ez annak a *Feller*-féle feltételnek egy erősebb alakja, amelyről a 2. § végén szó volt; az ezen tulajdonsággal rendelkező folyamatokat *erősen Feller-folyamatoknak* nevezzük. Az erősen *Feller*-folyamat fogalmát I. V. GIRSZANOV vezette be és tanulmányozta [17] munkájában.

A. V. SZKOROHOD [88], [89] a sztochasztikus differenciálegyenletek módszerével tanulmányozta egyes egydimenziós diffúziós folyamatok peremérték-problémáit.

M. I. FREJDLIN [44] felhasználta ezt a módszert oly elliptikus egyenletekkel kapcsolatos peremérték-problémák vizsgálatában, amelyek egy tartományon belül elfajultak. Itt meg kell jegyezni, hogy a differenciálegyenletek elvont elméletében használt számos módszertől eltérően ITO módszere tökéletesen érzéketlen a differenciáloperátor elfajulásával szemben. Valóban, ez tette lehetővé, hogy M. I. FREJDLIN lényeges előrehaladást érjen el az említett probléma vizsgálatában, amelyet eddig eléggé intenzíven vizsgáltak már a klasszikus analízis eszközeivel.

Az *Ito*-féle sztochasztikus egyenletek másik nagy előnye az, hogy alkalmazásuk egyáltalán nem válik bonyolultabbá, amidőn a dimenziószám növekszik. Az áttérés egy dimenzióról n dimenzióra csaknem automatikusan történik. Emellett K. DAMBISZ [19] nemrég kimutatta, hogy majdnem ugyanolyan egyszerű az áttérés végtelen nagy dimenziószámra is. A diffúziós folyamatokra a *Hilbert*-térben általa felírt sztochasztikus integrálegyenletek lehetővé teszik, hogy tanulmányozzuk oly függvényekre vonatkozó elliptikus és parabolikus differenciálegyenleteket is, melyek argumentumai végtelen halmazt alkotnak. Ez az elmélet talán még rendkívül jelentőssé válik, egyelőre azonban csak az első lépéseket tették meg ezen a téren.

7. §. A differenciálegyenletek elméletének peremérték-problémái és a realizációk aszimptotikus viselkedése

25. Egy, a (4)-hez hasonló analitikus képlet megadása általában véve nem határozza meg teljesen a folyamat infinitezimális operátorát. Az infinitezimális operátor fogalmának lényeges részét képezi azon függvények összességének megadása, amelyen ez az operátor definiálva van. Ez a függvényhalmaz, jól definiált simasági követelmények mellett, bizonyos peremfeltételekkel van megadva; azonban a peremfeltételeket általában véve nem lehet egyértelműen megadni. Egyik legfontosabb feladat a peremfeltételek összes lehetséges típusának a tanulmányozása. Azt tapasztaljuk, hogy minden peremfeltétel-típus a realizációk aszimptotikus viselkedésének meghatározott típusával kapcsolatos (aszimptotikus viselkedés itt a tartomány határához való közeledésre vonatkozik).

W. FELLER [70], [71], [76] [7] leírta az összes lehetséges típusú peremfeltételt egydimenziós diffúziós és általánosított diffúziós folyamatok esetében. Emellett áttekin-

[7] FELLER említett munkái közül az elsőben lényeges hiba volt, amelyet először A. D. VENTCEL javított ki [2] munkájában.

tést adott a differenciáloperátornak a határ közelében fellépő összes elfajulási esetéről. A többdimenziós probléma lényegesen nehezebb. Valamit foglalkoztak ezzel a differenciálegyenletek elméletének specialistái. Valószínűségelméleti módszereket használva fel azonban lényeges előrehaladást sikerült elérni ezen a területen. A. D. VENTCEL [3], [6] tanulmányozta a peremfeltételek legáltalánosabb alakját oly elliptikus egyenletek esetében, amelyek nem fajulnak el reguláris határon. Ugyanő ennek során új típusú peremfeltételeket talált, amilyeneket eddig nem tanulmányoztak a differenciálegyenletek elméletében.

Azok közül a munkák közül, amelyek a peremérték-problémák területén az utóbbi években külföldön megjelentek, okvetlenül meg kell említeni J. L. DOOB [67], [68] dolgozat-ciklusát, amely az első peremérték-problémával foglalkozik, a legáltalánosabb megfogalmazásban.

R. Z. HASZMINSZKIJ [46] az elliptikus egyenletekre vonatkozó első peremérték-problémát tanulmányozta abban az esetben, amidőn az egyenlet a tartomány határán elfajul. Ennek folyamán sikerült olyan eredményeket elérnie, amelyek lényegesen általánosabbak és teljesebbek, mint amelyek M. V. KELDIS, M. I. VISIK és mások korábbi munkáiban találhatók.

Amint már a 6. §-ban említettük, M. I. FREJDLIN [44] tanulmányozta az első peremérték-problémát oly egyenletek esetében, amelyek a tartományon belül elfajulnak.

A peremérték-problémák mellett érdeklődésre tarthatnak számot a differenciálegyenletek elméletében az aszimptotikus problémák is, például az a probléma, hogyan viselkedik egy parabolikus differenciálegyenlet $u(t, x)$ megoldása, amidőn $t \to \infty$. A valószínűségelméletben az ilyen jellegű tételeket *ergodikus tételeknek* nevezzük. E tételeket úgy is lehet tanulmányozni, ha vizsgáljuk a folyamat realizációinak viselkedését, amidőn $t \to \infty$. Az egydimenziós általánosított *Brown*-féle mozgás esetét MARUYAMA és TANAKA tanulmányozták [85] munkájukban. Többdimenziós esetben igen érdekes eredményeket kapott R. Z. HASZMINSZKIJ [49].

8. §. Befejezés

26. Ebben a rövid áttekintésben nem nyílt lehetőség számomra akár csak érinteni is egész sor olyan munkát, amelyet a szeminárium résztvevői végeztek. Felsorolok néhányat közülük: F. I. KARPELEVICS, V. N. TUTUBALIN és M. G. SUR [37] munkája a *Lobacsevszkij*-féle síkban lefolyó *Brown*-mozgás kapcsolatáról a hullámvezetők fizikai elméletével, M. G. SUR munkája a *Markov*-láncok ergodikus tulajdonságairól [53], R. Z. HASZMINSZKIJ munkája valamely *Markov*-folyamat additív funkcionáljainak határeloszlásairól [50], továbbá ugyanezen szerző [47] munkája az $Af(x)+c(x)f(x)=0$ egyenlet pozitív megoldásairól (ebben a munkában többek között bebizonyította, hogy egy elliptikus operátor legkisebb sajátértéke stabilitással rendelkezik bizonyos nagy tartomány-megváltoztatásokkal szemben); LJAN CSZSI-SUEN [40] és A. D. VENTCEL és LJAN CSZSI-SUEN [7] munkái a feltételes *Markov*-folyamatokról, — és egész sor más mű.

27. Záradékul néhány szót szeretnék szólni szemináriumunk történetéről és állományáról.

A *Markov*-folyamatokkal foglalkozó szeminárium az 1957/58. tanév folyamán vált ki az általános valószínűségelméleti tudományos szeminárium kötelékéből, amely utóbbi a Moszkvai Állami Egyetemen az előadó vezetése alatt az 1954/55. tanévtől kezdve működött. Mindazonáltal meg kell jegyezni, hogy azok a témák, amelyek a *Markov*-folyamatok elméletének új fejezeteivel kapcsolatosak, már az 1955. tanévtől kezdve meghatározták az általános szeminárium tudományos alapirányvonalát. A szeminárium állandó és aktíve dolgozó résztvevői: A. D. VENTCEL, B. A. VOLKONSZKIJ, I. V. GIRSZANOV, E. B. DINKIN, L. V. SZEREGIN, V. TUTUBALIN, M. I. FREJDLIN, R. Z. HASZMINSZKIJ, M. G. SUR, A. A. JUSKEVICS. Néhány matematikus — akik ugyan nem voltak állandó résztvevői a szemináriumnak — egész sor érdekes tudományos eredményt adott a szemináriumon felvetett problémákkal kapcsolatban. A nevezettek előadásokat tartottak a szemináriumon, melyek aztán élénk vitát váltottak ki. Ezek a személyek: A. V. SZKOROHOD, aki 1957-ben befejezte az aspirantúrát a Moszkvai Egyetemen és jelenleg a Kijevi Egyetemen dolgozik, valamint JU. V. BLAGOVESCSENSZKIJ, aki a Dubnai Egyesült Atommagkutató Intézetben dolgozik. 1958-tól kezdve aktívan részt vesz a szemináriumon kínai kollégánk, LJAN CSZSI-SUEN.

Az 1958—1959-es tanévben a szemináriumban 10 hallgató készítette el diplomamunkáját. Ezek közül több önálló tudományos eredményeket tartalmaz, amelyek jelenleg már a sajtó alá rendezés állapotában vannak.

Az alább következő irodalomjegyzékben fel vannak tüntetve mindazok a munkák, amelyek a Moszkvai Egyetemen a *Markov*-folyamatok elméletével foglalkozó szemináriumon készültek, függetlenül attól, meg vannak-e említve szemlénkben vagy sem. Más munkákból az irodalomjegyzék csak olyanokat tartalmaz, amelyekre hivatkozás történik cikkünkben.

IRODALOMJEGYZÉK*

[1] Ю. В. Благовещенский: О диффузионных процессах с малой дисперсией. (Előnyomat.)

[2] А. Д. Вентцель: Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка. ДАН 111:2 (1956), 269—272.

[3] А. Д. Вентцель: О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее прим. 4:2 (1959), 172—185.

[4] А. Д. Вентцель: О локальном поведении траекторий диффузионного процесса, 1960. (Előnyomat.)

[5] А. Д. Вентцель: О плотности вероятностей перехода одномерного диффузионного процесса. (Előnyomat.)

[6] А. Д. Вентцель: Общие граничные задачи, связанные с диффузионными процессами. УМН 15:2 (1960), 202—204.

[7] А. Д. Вентцель, Лян-Чжи-шуэн: Условные марковские процессы. (Előnyomat.)

[8] В. А. Волконский: Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний. Теория вероятн. и ее прим. 2:2 (1957), 230—255.

[9] В. А. Волконский: Случайная замена времени в строго марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. 3:3 (1958), 332—350.

[10] В. А. Волконский: Непрерывные одномерные марковские процессы и аддитивные функционалы от них. Теория вероятн. и ее прим. 4:2 (1959), 208—211.

[11] В. А. Волконский: Построение неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени. Теория вероятн. и ее прим. 6 (1961), 47—56.

* A cikk megjelenésekor még sajtó alatt levő dolgozatok adatait — lehetőség szerint — kiegészítettük. (*Ford.*)

[12] В. А. Волконский: Аддитивные функционалы от марковских процессов. ДАН 127:4 (1959), 735—738.
[13] В. А. Волконский: Аддитивные функционалы от марковских процессов. Труды Моск. матем. о-ва 9 (1960), 143—189.
[14] И. В. Гирсанов: Об одном свойстве невырожденных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее прим. 4:3 (1959), 355—361.
[15] И. В. Гирсанов: О некоторых топологиях, связанных с марковским процессом. ДАН 129:3 (1959), 488—491.
[16] И. В. Гирсанов: Об абсолютной непрерывности одного класса мер. Теория вероятн. и ее прим. 5 (1960), 314—330.
[17] И. В. Гирсанов: Сильно феллеровские процессы. 1. Теория вероятн. и ее прим. 5:2 (1960), 7—28.
[18] И. В. Гирсанов: Сильно феллеровские процессы. 2. (1960) (Előnyomat.)
[19] К. Е. Дамбис: Стохастические интегральные уравнения в гильбертогом пространстве. Diplomamunka, МГУ, 1959.
[20] Е. Б. Дынкин: О новых аналитических методах в теории марковских случайных процессов. Вестн. ЛГУ 11 (1955), 247—266.
[21] Е. Б. Дынкин: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов. ДАН 104 (1955), 691—694.
[22] Е. Б. Дынкин: Бесконечно малые операторы марковских случайных процессов. ДАН 105 (1955), 206—209.
[23] Е. Б. Дынкин: Непрерывные одномерные марковские процессы. ДАН 105 (1955), 405—408.
[24] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы с непрерывным временем. Труды III Всесоюзного математического съезда 2 (1956), 44—47.
[25] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и полугруппы операторов. Теория вероятн. и ее прим. 1:1 (1956), 25—37.
[26] Е. Б. Дынкин: Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятн. и ее прим. 1:1 (1956), 38—60.
[27] Е. Б. Дынкин: Неоднородные строго марковские процессы. ДАН 113 (1957), 261—263.
[28] Е. Б. Дынкин: Скачкообразные марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. 3:1 (1958), 41—60.
[29] Е. Б. Дынкин: Новые методы в теории марковских процессов. Труды III Всесоюзного матем. съезда 3 (1958), 334—342.
[30] Е. Б. Дынкин: Одномерные непрерывные строго марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. 4:1 (1959), 3—54.
[31] Е. Б. Дынкин: Естественная топология и эксцессивные функции, связанные с марковским процессом. ДАН 127:1 (1959), 17—19.
[32] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и их подпроцессы. (1960). (Előnyomat.)
[33] Е. Б. Дынкин: Основания теории марковских процессов. Москва, 1959.
[34] Е. Б. Дынкин: Преобразования марковских процессов, связанные с аддитивными функционалами. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability (1960). Berkeley,1961. Vol. 2, 117—142.
[35] Е. Б. Дынкин: Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса. Изв. АН СССР, сер. матем. 16 (1952), 563—572.
[36] Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич: Строго марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. 1:1 (1956), 149—155.
[37] Ф. И. Карпелевич, В. Н. Тутубалин, М. Г. Шур: Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского. Теория вероятн. и ее прим. 4:4 (1959), 432—436.
[38] А. Н. Колмогоров: Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН. 5 (1938), 5—41.
[39] Kolmogorov, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.* 104 (1931), 415—458.
[40] Лян Чжи-шуэн: Об условных марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. 5:2 (1960), 227—228.
[41] Petrovsky, I.: Über das Irrfahrtproblem. *Math. Ann.* 109 (1934), 425—444.
[42] Ю. В. Прохоров: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятн. и ее прим. 1:2 (1956), 177—238.

[43] Л. В. Серегин: Условия непрерывности вероятностных процессов. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 3—30.

[44] М. И. Фрейдлин: Первая краевая задача для вырождающихся эллиптических уравнений. (Előnyomat.)

[45] Р. З. Хасьминский: Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа. ДАН **104**:1 (1955), 22—25.

[46] Р. З. Хасьминский: Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области. Теория вероятн. и ее прим. 3:4 (1958), 430—451.

[47] Р. З. Хасьминский: О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}u+vu=0$. Теория вероятн. и ее прим. **4**:3 (1959), 332—341.

[48] Р. З. Хасьминский: Эргодические свойства диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений. (Előnyomat.)

[49] Р. З. Хасьминский: Эргодические свойства диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 196—214.

[50] Р. З. Хасьминский: О предельных распределениях сумм условно независимых случайных величин, связанных с цепью Маркова. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 119—125.

[51] А. Я. Хинчин: Асимптотические законы теории вероятностей. ОНТИ, Москва—Ленинград, 1936.

[52] Khintchine, A.: *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, 1933.

[53] М. Г. Шур: Эргодические свойства марковских цепей, инвариантных на однородных пространствах. Теория вероятн. и ее прим. 3:2 (1958), 137—152.

[54] М. Г. Шур: О феллеровском свойстве марковских процессов. ДАН **129** (1959), 1250—1253.

[55] М. Г. Шур: Гармонические и супергармонические функции, связанные с диффузионными процессами. Сиб. матем. ж. **1** (1960), 277—296.

[56] А. А. Юшкевич: О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний. Diplomamunka, МГУ, 1953; Учен. зап. МГУ 9, вып. **186** (1959), 141—159.

[57] А. А. Юшкевич: О строго марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. **2**:2 (1957), 187—213.

[58] А. А. Юшкевич: Некоторые свойства марковских процессов со счетным числом состояний (1960). (Előnyomat.)

[59] А. А. Юшкевич: К определению строго марковского процесса. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 237—243.

[60] Blumenthal, R.: An extended Markoff property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 52—72.

[61] Cartán, H.: Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien. *Ann. Univ. Grenoble (N. S.), Sect. Sci. Math. Phys.* **22** (1946), 221—280.

[62] Chung, K. L.: Foundations of the theory of continuous parameter Markov chains. *Proc. Third Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob.* (1954—1955). Berkeley, 1956. Vol. 2, 29—40.

[63] Chung, K. L.: On a basic property of Markov chains. *Ann. of Math.* **68**: 1 (1958), 126—149.

[64] J. L. Doob: Markoff chains — denumerable case. *Trans. Amer. Math. Soc.* **58**:3 (1945), 455—473.

[65] Doob, J. L.: Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **77**:1 (1954), 86—121.

[66] Doob, J. L.: A probability approach to the heat equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **80**:1 (1955), 216—280.

[67] Doob, J. L.: Probability methods applied to the first boundary value problem. *Proc. Third Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob.* (1954—1955). Berkeley, 1956. Vol. 2, 49—80.

[68] Doob, J. L.: Probability theory and the first boundary value problem. *Illinois Journ. Math.* **2**:1 (1958), 19—36.

[69] Doob, J. L.: Discrete potential theory and boundaries. *Journ. Math. Mech.* **8** (1956), 433—458.

[70] Feller, W.: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations *Ann. Math.* **55** (1952), 468—519. (Fordítás: В. Феллер: Параболические дифференциальные уравнения и соответствующие им полугруппы преобразований. Математика **1**:4 (1957), 105—153.

[71] FELLER, W.: Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* **77**:1 (1954), 1—31. (Fordítás: В. Феллер: Одномерные диффузионные процессы. Математика 2:2 (1958), 119—146.)
[72] FELLER, W.: The general diffusion operator and positivity-preserving semi-groups in one dimension. *Ann. Math.* **60**:3 (1954), 417—436.
[73] FELLER, W.: On second order differential operators. *Ann. Math.* **61**:1 (1955), 90—105.
[74] FELLER, W.: Boundaries induced by nonnegative matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **83**:1 (1956), 19—54.
[75] FELLER, W.: On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Ann. Math.* **65**:3 (1957), 527—570.
[76] FELLER, W.: Generalized second order differential operators and their lateral conditions. *Illinois Journ. Math.* **1**:4 (1957), 459—504.
[77] FELLER, W.: On the intrinsic form for second order differential operators. *Illinois Journ. Math.* 2:1 (1958), 1—18.
[78] HUNT, G. A.: Some theorems concerning Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **81**:2 (1956), 294—319.
[79] HUNT, G. A.: Markov processes and potentials, I—III. *Illinois Journ. Math.* **1** (1957), 44—93: **1** (1957), 316—369; **2** (1958), 151—213.
[80] ITO, K.: On a stochastic integral equation. *Proc. Japan. Acad.* **22** (1946), 32—35.
[81] ITO, K.: On stochastic differential equations. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **4** (1951), 1—51. (Fordítás: К. Ито: О стохастических дифференциальных уравнениях. Математика **1**:1 (1957), 78—116.)
[82] KINNER, J. R.: Continuity properties of sample functions of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 280—302.
[83] LÉVY, P.: Processus markoviens et stationaires. Cas dénombrable. *Ann. Inst. H. Poincaré* **16**:1 (1958), 7—25.
[84] MARUYAMA, G.: On the strong Markov property. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., (A)*, **13**:1 (1959), 17—29.
[85] MARUYAMA, G.—TANAKA, H.: Some properties of one dimensional diffusion processes. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., (A)* **11**:2 (1957), 117—141.
[86] RAY, D.: Stationary Markov processes with continuous paths. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82**:2 (1956), 452—493.
[87] RAY, D.: Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. *Ann. Math.* **70**:1 (1959), 43—78.
[88] А. В. Скороход: Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 287—298; **7** (1962), 5—25.
[89] А. В. Скороход: Диффузионный процесс с замедленным отражением на границе (1960). (Előnyomat.)
[90] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и их инфинитезимальные операторы. Москва. (Előnyomat.)
[91] Е. Б. Дынкин: Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами. Теория вероятн. и ее прим. **5** (1960), 441—452.
[92] Е. Б. Дынкин: О некоторых преобразованиях марковских процессов. ДАН **133** (1960), 269—272.

Fordította: Medgyessy Pál
a matematikai tudományok
kandidátusa