

A VÉGES SÍKOK JELLEMZÉSE

ÍRTA: REIMAN ISTVÁN

Kárteszi Ferenc professzornak
60. születésnapjára

1. Az axiómarendszerek

Véges síkgeometriáknak a véges projektív, affin és hiperbolikus síkgeometriákat nevezzük, ezeket különböző axiómarendszerekkel adhatjuk meg. A véges projektív, affin, hiperbolikus síkgeometriák szokásos axiómarendszerét jelölje rendre

$$\{P_1, P_2, P_3\}, \quad \{A_1, A_2, A_3\}, \quad \{H_1, H_2, H_3\}.$$

Ezek alapján a *véges sík* a pontoknak olyan véges halmaza, amelyben bizonyos nem üres részhalmazokat különböztetünk meg, amelyeket egyeneseknek nevezünk; továbbá teljesülnek az egyes geometriákban a következő axiómák:

P_1 : Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

P_2 : Két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

P_3 : Létezik négy pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen.

*

A_1 : Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

A_2 : Egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan egy olyan egyenes létezik, amelynek e -vel nincs közös pontja.

A_3 : Létezik három olyan pont, amelyik nincs egy egyenesen.

*

H_1 : Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

H_2 : Egy e egyeneshez egy nem rajta levő ponton át legalább két olyan egyenes létezik, amely az e egyenest nem metszi.

H_3 : Ha S a sík pontjainak egy részhalmaza, amely tartalmaz három nem egy egyenesen fekvő pontot, és amely tartalmazza bármely két pontjának az összekötő egyenesét, akkor S a sík minden pontját tartalmazza.

*

A fenti axiómákból a projektív és affin síkok esetében már következik, hogy minden egyenesen azonos számú pont van és minden ponton azonos számú egyenes megy át. Nem ez a helyzet azonban hiperbolikus sík esetén: meg lehet adni a $\{H_1, H_2, H_3\}$ axiómáknak eleget tevő rendszert, amelyben az egyeneseken levő pontoknak a száma nem azonos [1]. Helyettesítsük a H_2 axiómát a következő, többet mondó H'_2 -vel:

H'_2 : Egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan $m > 1$ olyan egyenes létezik, amely e -t nem metszi.

A H_1 és H'_2 axiómákból viszont már következik, hogy a hiperbolikus sík minden egyenesén ugyanannyi pont van, feltéve, hogy létezik három nem kollineáris pont [2], jelölje ezt a pontszámot k . Az ilyen síkokat *reguláris hiperbolikus síkoknak* nevezzük. A reguláris síkok számos szimmetria-tulajdonsággal rendelkeznek, és geometriai szempontból a nem reguláris síkoknál érdekesebbeknek látszanak. A továbbiakban a vizsgált hiperbolikus síkot regulárisnak tekintjük.

2. Telített incidencia rendszerek

Mindhárom geometriai rendszer egyöntetűen jellemezhető *telített incidencia rendszer* segítségével. Ennek definiálása céljából tekintsük az egyeneseknek $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$ és a pontoknak $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_2}\}$ halmazát. Ezeken a halmazokon értelmezve van olyan $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$ függvény, amelyre $\mathcal{I}(e_i, Q_j) = 1$ vagy 0. ($i = 1, 2, \dots, n_1$; $j = 1, 2, \dots, n_2$). Az előbbi esetben azt mondjuk, hogy e_i és Q_j illeszkednek egymáshoz, az utóbbiban azt, hogy nem illeszkednek.

Jelölje N azt a számot, ahányszor az $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$ értéke 1, amidőn $i = 1, 2, \dots, n_1$; $j = 1, 2, \dots, n_2$, ennek neve az *illeszkedések száma*.

Telített incidencia rendszernek nevezzük az $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$ és a $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_2}\}$ halmazok együttesét, ha teljesülnek a következő axiómák:

I_1 : Két különböző ponthoz legfeljebb egy egyenes illeszkedik.

I_2 : Az $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$ függvény olyan, hogy az N értéke már nem növelhető anélkül, hogy I_1 érvényét ne veszítse.

Az I_1 -ből következik, hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet; az I_2 pedig azt is jelenti, hogy $\max N$ csak az egyenesek és pontok számának a függvénye: $\max N = F(n_1, n_2)$.

3. A véges síkok jellemzése telített incidencia rendszerekkel

A fentiek segítségével a véges síkokat a következő módon jellemezhetjük:

1. TÉTEL. Minden véges síkgeometria olyan telített incidencia rendszer, amelyben az egyenesek száma

$$n_1 = \frac{1}{k} (k+m) [(k+m)(k-1) + 1],$$

a pontok száma

$$n_2 = (k+m)(k-1) + 1.$$

(k és m egész számok, $k \geq 2$, $m \geq 0$).

A véges síkgeometria projektív, ha $m < 1$, affin, ha $m = 1$, reguláris hiperbolikus, ha $m > 1$.

2. TÉTEL. Ha valamilyen k és m értékhez létezik véges síkgeometria az 1. tételben definiált n_1 számú egyenessel és n_2 számú ponttal, akkor minden olyan telített incidencia rendszer, amelyben n_1 egyenes és n_2 pont van, véges síkgeometria, még hozzá projektív, ha $m < 1$, affin, ha $m = 1$, reguláris hiperbolikus, ha $(k-1)^2 > m > 1$.

Az 1. tétel bizonyítására vegyük figyelembe, hogy a véges sík minden egyenesén k számú pont van, és egy egyeneshez egy rá nem illeszkedő pontból m számú nem metsző létezik, ezért a sík egy tetszőleges pontjára $k+m$ egyenes illeszkedik. Mivel az egy pontra illeszkedő egyenesek a sík összes pontját tartalmazzák, a sík pontjainak a száma

$$n_2 = (k+m)(k-1) + 1.$$

A sík minden pontjában megszámlálva az egyeneseket $(k+m)n_2$ -t kapunk, de így minden egyenest k -szor vettünk számításba, ezért a sík egyeneseinek a száma

$$n_1 = \frac{k+m}{k} n_2 = \frac{1}{k} (k+m) [(k+m)(k-1) + 1].$$

Tekintsünk most egy véges — nem szükségképpen telített — incidencia rendszert, amelyben az I_1 axióma érvényes. Rendeljük hozzá a rendszer egyeneseihez egy mátrix sorait, pontjaihoz pedig ennek a mátrixnak az oszlopait. A mátrix e_i -hez tartozó sorának és Q_j -hez tartozó oszlopának metszetében álló elem legyen $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$; így a mátrix N számú 1-est tartalmaz, a többi eleme pedig 0. Legyenek ennek az ún. *incidencia mátrixnak* az oszlopvektorai $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n_2}$; az egyes sorokban álló 1-esek száma legyen rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}$, az egyes oszlopokban állóké pedig $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}$; ezekre

$$(1) \quad \sum \alpha_i = \sum \beta_i = N.$$

Képezzük az oszlopvektorok összegének négyzetét:

$$(2) \quad (\sum \mathbf{b}_i)^2 = \sum \mathbf{b}_i^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j.$$

A jobb oldali összeg első tagjára (1)-re való tekintettel fennáll, hogy

$$(3) \quad \sum \mathbf{b}_i^2 = \sum \beta_i = N,$$

a második tagjában I_1 teljesülése miatt egyik összeadandó sem nagyobb 1-nél, ezért

$$(4) \quad \sum_{i \neq j} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \leq 2 \binom{n_2}{2} = n_2(n_2 - 1),$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha valamennyi $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j$ szorzat ($i \neq j$) 1-gyel egyenlő, tehát ha bármely két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van. (2) bal oldala viszont

$$(\sum \mathbf{b}_i)^2 = \sum \alpha_i^2$$

alakban írható, amiből viszont az aritmetikai és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján (1)-gyel összevetve következik, hogy

$$(5) \quad \sum \alpha_i^2 \geq \frac{(\sum \alpha_i)^2}{n_1} = \frac{N^2}{n_1},$$

és egyenlőség csakis akkor áll, ha valamennyi α_i egyenlő, azaz valamennyi egyenesnek ugyanannyi pontja van.

(3), (4) és (5) alapján (2)-ből következik, hogy

$$\frac{N^2}{n_1} \leq N + n_2(n_2 - 1),$$

ebből

$$(6) \quad N \leq \frac{1}{2} (n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2 (n_2 + 1)}) = S.$$

Az N értékére tehát (6) egy felső becslést ad. Ha a vizsgált incidencia rendszer véges geometria, akkor (4)-ben és (5)-ben az egyenlőség jele érvényes, és így (6)-ban is $N = S$, a maximális N érték tényleg fellelhető, azaz a véges síkgeometriában I_2 érvényes. Mivel pedig a véges síkokon I_1 mindenkor teljesül, az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

A 2. tétel bizonyításakor induljunk ki abból a megfigyelésből, hogy az 1. tétel bizonyításakor a

$$\max N = F(n_1, n_2)$$

függvény értékét is meghatároztuk arra az esetre, ha n_1 és n_2 lehetnek egy véges sík egyenes-, ill. pontszámai, méghozzá $\max N = S$.

Tekintsünk tehát egy ilyen n_1, n_2 értékpárhoz tartozó telített incidencia rendszert. I_2 -ből és előző megjegyzésünkéből következik, hogy (6)-ban az egyenlőség jele érvényes, ez viszont csak úgy lehetséges, ha (4)-ben és (5)-ben is egyenlőség áll, tekintettel I_1 -re. Ez viszont azt jelenti, hogy *bármely egyenesen ugyanannyi pont van*, és bármely két pontot pontosan egy egyenes köt össze, vagyis a

$$P_1, A_1, H_1 \text{ axiómák teljesülnek.}$$

Mivel az összes illeszkedések száma I_2 miatt S -sel egyenlő, ezért egy egyenesre S/n_1 pont illeszkedik, ennek értéke éppen k . Megmutatjuk, hogy minden pontra ugyanannyi egyenes illeszkedik. Válasszunk ki ui. egy tetszőleges Q pontot, az erre illeszkedő egyenesek P_1, A_1, H_1 teljesülése miatt a sík összes pontját tartalmazzák, tehát Q -n kívül még $n_2 - 1$ -et. Mivel ezeken az egyeneseken Q -n kívül még $k - 1$ pont van, a Q -n átmenő egyenesek száma

$$\frac{n_2 - 1}{k - 1} = k + m,$$

ez viszont független Q választásától, tehát *minden ponton át $k + m$ egyenes megy*.

A Q ponton átmenő egyenesek közül egy, a Q -t nem tartalmazó e egyenest pontosan k számú metsz, mivel e -nek éppen k pontja van, és így m számú nem metszi e -t, azaz

egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan m számú olyan egyenes létezik, amely e -t nem metszi.

Ez viszont a P_2 axióma teljesülését jelenti, ha $m < 1$ (vagyis $m = 0$), A_2 -ét, ha $m = 1$, és H_2 -ét, ha $m > 1$.

Hátra van még a P_3, A_3, H_3 axiómák teljesülésének az igazolása. Ha $k > 2$, $m = 0$, a síknak legalább 7 egyenese van, mindegyiken legalább három ponttal, így nyilvánvalóan kiválasztható 4 olyan pont, amelyek között nincs három kollineáris, tehát P_3 teljesül. Hasonlóan, $k \geq 2$, $m = 1$ esetén az egyenesek száma legalább 6, min-

den egyenes legalább két pontot tartalmaz, tehát létezik 3 nem kollineáris pont, azaz A_3 teljesül.

Ha végül $m > 1$ és tételünk kirovása miatt $(k-1)^2 > m$, D. W. CROWE egy lemmájából következik, hogy H_3 is teljesül [2]. Válasszunk ki ui. három nem kollineáris pontot, A -t, B -t és C -t. A C pontot az AB egyenes pontjaival összekötő k számú egyenes a síknak $k(k-1)+1$ pontját tartalmazza. Válasszuk ki most a síknak egy tetszőleges D pontját és ezt kössük össze az előbbi $k(k-1)+1$ pont mindegyikével. A D pontra $k+m$ egyenes illeszkedik, és ezek között van olyan, amely az előbbi pontthalmaznak legalább két pontját tartalmazza, azaz D hozzátartozik az A, B, C pontok által meghatározott síkhoz. Ha állításunkkal ellentétben ugyanis a D -n átmenő egyenesek mindegyike a szóban forgó pontok közül legfeljebb egyre illeszkednék, akkor $k(k-1)+1 \leq k+m$, azaz $(k-1)^2 \leq m$ következne, ellentétben a feltevessel.

Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

4. Néhány megjegyzés

Végezetül néhány megjegyzést fűzünk a telített incidencia rendszerek és a véges síkok kapcsolatához. Az már általában nem igaz, hogy minden telített incidencia rendszer tetszőleges k és m értékekre véges síkot szolgáltat. Ha pl. $k=7$, $m=0$, a telített incidencia rendszer nem véges sík, mert ha az lenne, léteznék olyan véges projektív sík, amelynél minden egyenesen 7 pont van; mint ismeretes, ilyen nem létezik. Ebben az esetben $\max N < S$.

Ha $m > 1$, a telített incidencia rendszer még abban az esetben sem lesz biztosan véges sík, ha $\max N = S$. Ha pl. $n_1 = 35$, $n_2 = 15$ (azaz $k=3$, $m=4$), bebizonyítható, hogy $\max N = 105 = S$ [3]; viszont megadható telített incidencia rendszer 35 egyenessel és 15 ponttal úgy, hogy H_1 és H_2 teljesüljön, de H_3 már nem. Ebben az esetben azonban a $(k-1)^2 > m$ feltétel nem teljesül.

IRODALOM

- [1] OSTROM, T. G.: Ovals and finite Bolyai—Lobachevsky planes, *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 899–901.
- [2] CROWE, D. W.: The construction of finite regular hyperbolic planes from inversive planes of even order, *Coll. Mathematicum* **13** (1965), 247–250.
- [3] REIMAN, I.: Egy gráfokkal kapcsolatos szélsőérték feladatról, *Mat. Lapok* **12** (1961), 44–53.

(Beérkezett: 1967. március 3.)

A CHARACTERIZATION OF THE FINITE PLANES

by

I. REIMAN

To Professor Ferenc Kárteszi
on his 60th birthday.

Summary

The finite projective, affine and regular hyperbolic planes will be called *finite planes*. A finite hyperbolic plane is *regular* if each line contains the same number of points.

All three geometries, the finite projective, affine and regular hyperbolic geometries, can be characterized unanimously by *saturated incidence structures*. To define this, consider the sets of lines and points: $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$ and $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_2}\}$. A function $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$ ($i=1, 2, \dots, n_1$; $j=1, 2, \dots, n_2$) is defined on these sets, and $\mathcal{I}(e_i, Q_j) = 1$ or 0. In the first case e_i and Q_j are incident, and in the second they are not incident. Let N denote the number of the values 1, N is called the *number of incidences*. The sets $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}$, $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_2}\}$ are called saturated incidence structures, if the following axioms are satisfied:

I_1 : At most one line is incident with two different points.

I_2 : The function $\mathcal{I}(e_i, Q_j)$ is such that the value of N can not be increased if I_1 must hold.

Two theorems are proved:

THEOREM 1. Every finite plane is a saturated incidence structure, where

$$n_1 = \frac{1}{k} (k+m)[(k+m)(k-1)+1]$$

is the number of lines, and

$$n_2 = (k+m)(k-1)+1$$

is the number of points (k and m are integers, $k \geq 2$, $m \geq 0$). Each line contains k points, and there are m lines through a given point, not incident with a line, not meeting this line.

The finite plane geometry is projective, affine and regular hyperbolic respectively, if $m < 1$, (i. e. $m=0$), $m=1$ and $m > 1$ respectively.

THEOREM 2: If for some values k and m , there is a finite plane geometry with n_1 lines and n_2 point defined in theorem 1, then every saturated incidence structure, with n_1 lines and n_2 point, is a finite plane geometry, moreover it is projective if $m < 1$, it is affine if $m=1$ and it is regular hyperbolic if $(k-1)^2 > m > 1$.