Sur la convergence des séries lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle fini (a, b). La série orthogonale

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

s'appelle lacunaire si les indices m_ν pour lesquels $c_{m_\nu} \neq 0$ se succèdent de façon que

$$\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} \geqq q > 1.$$

M. KOLMOGOROFF[1]) a démontré que, si une série lacunaire est presque partout sommable dans (a, b) et $\Sigma c_n^2 < +\infty$, elle y est aussi presque partout convergente.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite non-décroissante de nombres positifs. Nous appellerons la série (1) λ_n-lacunaire si le nombre des indices m_ν, compris entre 2^n et 2^{n+1}, et pour lesquels $c_{m_\nu} \neq 0$, est $O(\lambda_{2^n})$. A l'aide de cette notion nous pouvons énoncer le théorème suivant qui généralise un peu le théorème de M. KOLMOGOROFF:

Si la série λ_n-lacunaire (1) est presque partout sommable dans (a, b) et $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$, alors elle y est aussi presque partout convergente.

Désignons, en effet, par $S_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série (1), par $\sigma_n(x)$ sa n-ième moyenne arithmétique et par $\tau_n(x)$ la différence $S_n(x) - \sigma_n(x)$. On obtient tout de suite pour un indice m_ν compris entre 2^n et 2^{n+1}:

$$\tau_{m_\nu}(x) - \tau_{2^n}(x) = \frac{1}{m_\nu + 1} \sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k c_k \varphi_k(x) +$$
$$+ \left(\frac{1}{m_\nu + 1} - \frac{1}{2^n + 1} \right) \sum_{k=1}^{2^n} k c_k \varphi_k(x).$$

[1]) A. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), pp. 96—97.

La série (1) étant presque partout sommable, la suite $\{S_{2^n}(x)\}$ converge presque partout[2]), donc $\tau_{2^n}(x) \to 0$, d'où

$$\left(\frac{1}{m_\nu+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)\sum_{k=1}^{2^n} kc_k\varphi_k(x)=o(1)$$

presque partout, c'est-à-dire

$$\tau_{m_\nu}(x)-\tau_{2^n}(x)=\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k_k c\varphi_k(x)+o(1) \tag{2}$$

presque partout. Allons évaluer maintenant la somme

$$\int_a^b \sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2 dx=$$

$$=\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\frac{1}{(m_\nu+1)^2}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} k^2c_k^2\leqq \sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\sum_{k=2^{n+1}}^{m_\nu} c_k^2.$$

La série (1) étant λ_n-lacunaire, il y a au plus $O(\lambda_{2^n})$ coefficients c_{m_ν} dont les indices m_ν sont compris entre 2^n+1 et 2^{n+1}. On obtient donc

$$\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} c_k^2=O(\lambda_{2^n})\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2=O(1)\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\lambda_k c_k^2.$$

Il s'ensuit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2 dx=O(1)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n c_n^2<+\infty.$$

Cette relation implique, d'après un théorème fondamental de la théorie de l'intégrale de LEBESGUE, la convergence presque partout dans (a, b) de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{2^n<m_\nu\leqq 2^{n+1}}\left[\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)\right]^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{m_\nu+1}\sum_{k=2^n+1}^{m_\nu} kc_k\varphi_k(x)=o(1)$$

presque partout. Il en résulte d'après (2) :

$$\tau_{m_\nu}(x)-\tau_{2^n}(x)=o(1)$$

---

[2]) A. KOLMOGOROFF, l. c. Cf. ST. KACZMARZ et H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), p. 161 (533).

presque partout, ce qui entraîne

$$S_{m_\nu}(x) - \sigma_{m_\nu}(x) = \tau_{m_\nu}(x) = o(1)$$

presque partout, c. q. f. d.

Corollaire. *La série* (1) *étant* (log log $n)^2$*-lacunaire, elle converge en* (a, b) *presque partout, si* $\Sigma c_n^2 (\log \log n)^2 < +\infty$.

En effet, la convergence de $\Sigma c_n^2 (\log \log n)^2$ entraîne la sommabilité de (1) presque partout[3]).

Remarque à la note précédente.

Par ALFRED RÉNYI à Budapest.

En employant, au lieu du théorème de M. KOLMOGOROFF[4]), un théorème connu de M. RADEMACHER[5]) et en répétant la démonstration précédente avec des modifications évidentes, nous obtenons le théorème alternatif suivant:

Théorème A. *Si* $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$ *et le nombre des indices* m_ν *compris entre* Λ_n *et* Λ_{n+1}, *pour lesquels* $c_{m_\nu} \neq 0$, *est* $O(n)$, *alors la sommabilité presque partout de la série* (1) *entraîne sa convergence presque partout.*

Le théorème A est plus fort que le théorème de la note précédente, si λ_n est d'ordre $(\log n)^\alpha$ avec $1 < \alpha < 2$ et plus faible si λ_n est d'ordre plus petit que $\log n$. Le cas $\alpha = 2$ est dépourvu d'intérêt, parce que, d'après le théorème de MM. RADEMACHER et MENCHOFF[6]), la série (1) est presque partout convergente si $\Sigma c_n^2 (\log n)^2 < +\infty$.

(Reçu le 14 Février 1948.)

---

3) D. MENCHOFF, Sur les séries des fonctions orthogonales II, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), pp. 56—108 et ST. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift,* **26** (1927), pp. 99—105.

4) Cf. note 2).

5) H. RADEMACHER, Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), pp. 112—138. Le théorème cité est le suivant:

Si $\Sigma \lambda_n c_n^2 < +\infty$ et si l'on désigne par Λ_n le plus petit entier pour lequel $\lambda_{\Lambda_n} \geqq n$, alors $S_{\Lambda_n}(x)$ converge presque partout.

6) H. RADEMACHER l. c.; D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales I, *Fundamenta Math.*, **4** (1923), pp. 82—105.