

PEREMÉN BEFOGOTT ELLIPSZISLEMEZ

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1981. január 2-án]

A dolgozat polinom szerint megoszló merőleges erőkkel terhelt ellipszis alakú olyan síklemez erőjátékával foglalkozik, amely a peremén mereven be van fogva. A vizsgálatokat a technikai rugalmasságtan szokásos feltevéseinek keretében végzi: kimutatja, hogy a tárgyalt esetben a lemez alakváltozása és belső erői zárt polinommal fejezhető ki.

1. Bevezetés

A technikai rugalmasságtan problémáinak megoldása általában bonyolult összefüggésekre vezet, és csak ritkán sikerül a felmerülő feladatok megoldását zárt képletekkel kifejezni. E tekintetben kivételt alkot a jelen dolgozatban tárgyalt feladat: a peremén mereven befogott ellipszis alakú olyan síklemez problémája, amelyet polinom szerint megoszló merőleges erők terhelnek. Ebben az esetben ui. a lemez alakváltozását és belsőerőit leíró képletek zárt alakúak. Egyenletesen megoszló, valamint sík szerint megoszló merőleges teher esetében a vonatkozó képletek a szakirodalomból ismertek [3–11]. Ezeket a megoldásokat jelen dolgozat tetszőleges polinom szerint megoszló teher esetében alkalmazandó eljárás ismertetésével egészíti ki, és egyes egyszerű terhelési esetekben közvetlenül alkalmazható képleteket közöl.

Az ismertetendő eljárás feltételezi, hogy a lemez anyaga lineárisan rugalmas, vastagsága állandó és a lemez egyéb méreteihez viszonyítva csekély. Feltételezi továbbá, hogy a lemez a terhelés hatására csak kismértékű alakváltozást szenved.

2. Alapfogalmak, jelölések

{2}

Tárgyalásainkat derékszögű olyan $O(x, y, z)$ koordinátarendszerben végezzük, amelynek O kezdőpontja az ellipszislemez középpontjában van, x és y tengelyei pedig a középlap főtengelyeivel esnek egybe. Az x , illetve y irányú főugarakat a és b betűvel jelöljük (1. ábra) és megállapodunk az

$$\frac{x}{a} \equiv \xi, \quad \frac{y}{b} \equiv \eta, \quad (1)$$

valamint az

$$\frac{a}{b} = \gamma \quad (2)$$

egyszerűsítő jelölésben.

Az $O(x, y, z)$ koordinátarendszerben a középsík peremvonalának egyenlete

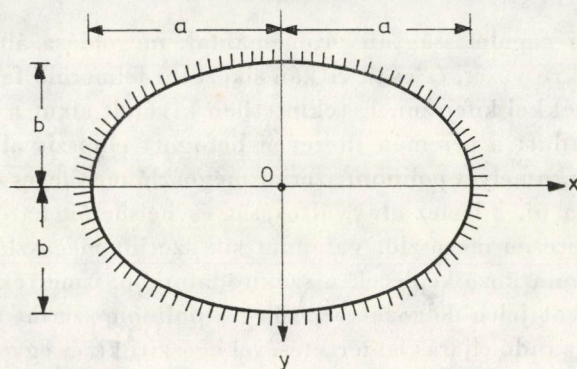
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (3)$$

ha ti. x_0 és y_0 a peremvonal pontjainak x és y koordinátái.

A lemezre ható teherként polinom szerint megoszló erőket veszünk számításba, és ezeket akkor tekintjük pozitívoknak, ha pozitív z irányban hatnak. Fajlagos értéküket a

$$p = p_{00} + p_{10}\xi + p_{01}\eta + p_{20}\xi^2 + p_{11}\xi\eta + p_{02}\eta^2 + \dots \quad (4)$$

polinommal fejezzük ki, ahol a $p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}, \dots$ értékek adott állandók.



1. ábra

A lemeznek a p terhek okozta alakváltozását a középsík pontjainak z irányú elmozdulását kifejező

$$w = w(\xi, \eta) \quad (5)$$

elmozdulásfüggvénnyel jellemezzük. Ez a függvény a technikai rugalmasságtan tanítása szerint [1–5] az

$$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{d\xi^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \cdot \partial \eta^2} + \frac{1}{b^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p}{K} \quad (6)$$

differenciálegyenletnek tartozik megfelelni, ahol K a lemez hajlító merevségét kifejező ún. lemezállandó. Utóbbinak értéke

$$K = \frac{Et_0^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (7)$$

Itt E a lemez anyagának rugalmassági tényezője, μ a haránt kontrakció tényezője, t_0 pedig a lemez vastagsága.

A peremén befogott lemezről lévén szó, a w elmozdulásfüggvény a peremvonal mentén teljesíteni tartozik a

$$w = 0, \quad (8)$$

valamint a

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (9)$$

feltételeket.

3. A feladat megoldása

Az ismeretlen w elmozdulásfüggvényt

$$w = \frac{a^4}{K} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 G(\xi, \eta) \quad (10)$$

alakban kíséreljük meg felvenni, ahol a $G(\xi, \eta)$ a teherfüggvény fokszámával egyező fokszámú ismeretlen együtthatós polinom:

$$G = G_{00} + G_{10} \xi + G_{01} \eta + G_{20} \xi^2 + G_{11} \xi \eta + G_{02} \eta^2 + \dots \quad (11)$$

Az ekként megszerkesztett w függvény felépítésénél fogva eleve megfelel a (8) peremfeltételnek, de egyúttal eleget tesz a (9) peremfeltételeknek is. Így a feladat megoldása az ismeretlen G_{00} , G_{10} , G_{01} , G_{20} , G_{11} , G_{02} ... együtthatók meghatározására redukálódik. Ezeknek az együtthatóknak oly értéket kell tulajdonítanunk, hogy a w függvény pontosan feleljen meg a (6) differenciálegyenletnek.

A G polinomot a teherpolinom egyes tagjainak megfelelő részekből célszerű összerakni. Az egyes részek együtthatóit — ha ezeket illetően nem állnak rendelkezésre táblázatba foglalt képletek — a (6) differenciálegyenlet segítségével kell meghatározni. Ez a művelet a teherpolinom fokszámától és szerkezetétől függően több-kevesebb egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Magát a számítást fokozatos lépésekben, a tagok megfelelő csoportosításával célszerű végrehajtani.

Ha például a teherpolinom tiszta m -ed fokú, x -ben és y -ban egyaránt páros függvény, akkor a G polinom $m!$ számú tagot tartalmazó m -ed fokú függvény. Ilyenkor a feladat megoldása $m!$ számú ismeretlen meghatározását, tehát egy $m!$ -számú egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. A számítás során először az m -ed fokú tagok együtthatóit állapítjuk meg, ami egy $(m/2) + 1$ számú egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását igényli. Ezután az $(m-2)$ -ed fokú tagok együtthatóit határozzuk meg, amihez egy $m/2$ -számú egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Ezt a számítást elvégezve, az $(m-4)$ -ed fokú tagok együtthatóit határozzuk meg egy $[(m/2) - 1]$ számú egyenletből álló egyenletrendszer megoldása révén. Ekként fokról fokra tovább haladva, végül is az abszolút tag együtthatóját

állapítjuk meg, ami már csak egyetlen egy egyenlet megoldását teszi szükségessé.

Hasonló lépésekben célszerű a G polinom ismeretlen együtthatóit meghatározni egyéb terhelési esetekben is.

Egyes egyszerű esetekben a G polinom együtthatói az 1. táblázatból vehetők ki. Ennek a táblázatnak a segítségével a feladat megoldása bármely másodfokú polinommal jellemezhető terhelési esetben közvetlenül megadható.

1. táblázat

p	a G polinom együtthatói
1	$G_{00} = \frac{1}{8(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)}$
ξ	$G_{10} = \frac{1}{24(5 + 2\gamma^2 + \gamma^4)}$
η	$G_{01} = \frac{1}{24(1 + 2\gamma^2 + 5\gamma^4)}$
ξ^2	$G_{00} = \frac{2(3 + 11\gamma^2 + 41\gamma^4 + 9\gamma^6)}{3(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{20} = \frac{1 + 4\gamma^2 + 15\gamma^4}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{02} = \frac{-(2 + 2\gamma^2)}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$
$\xi\eta$	$G_{11} = \frac{1}{24(5 + 6\gamma^2 + 5\gamma^4)}$
η^2	$G_{00} = \frac{2(9\gamma^2 + 41\gamma^4 + 11\gamma^6 + 3\gamma^8)}{3(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{20} = \frac{-(2\gamma^2 + 2\gamma^4)}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{02} = \frac{15 + 4\gamma^2 + \gamma^4}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$

A lehetséges terhelési esetek közt külön is megemlítendő az az eset, amelyben a lemez a peremvonálhoz hasonló ellipszisek mentén azonos intenzitású, belülről kifelé négyzetesen növekvő erőkkkel van terhelve. Ebben a különleges esetben

$$p_{20} = p_{02} \equiv A,$$

tehát a teherfüggvény

$$p = A(\xi^2 + \eta^2).$$

A w elmozdulásfüggvény

$$w = \frac{a^4}{K} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 (G_{20} \xi^2 + G_{02} \eta^2 + G_{00}),$$

ahol G_{00} , G_{20} és G_{02} a két terhelési tagnak megfelelő két-két részből tevődik össze:

$$G_{00} = \frac{2A}{3} \cdot \frac{(3 + 11\gamma^2 + 41\gamma^4 + 9\gamma^6) + (9\gamma^2 + 41\gamma^4 + 11\gamma^6 + 3\gamma^8)}{(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)},$$

$$G_{20} = \frac{A}{3} \cdot \frac{(1 + 4\gamma^2 + 15\gamma^4) - (2\gamma^2 + 2\gamma^4)}{5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8},$$

$$G_{02} = \frac{A}{3} \cdot \frac{(15 + 4\gamma^2 + \gamma^4) - (2 + 2\gamma^2)}{5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8}.$$

4. A lemez igénybevétele

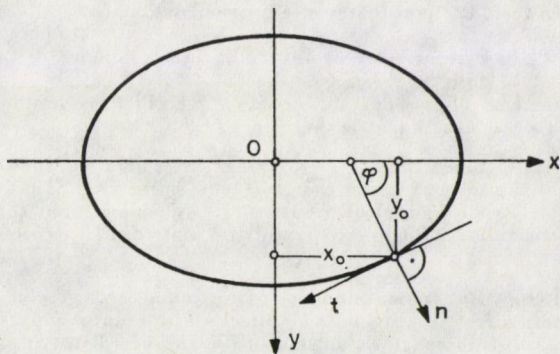
Ismervén a w elmozdulásfüggvényt, a p teher hatására keletkező nyomatékokat a lemezelmélet ismert képleteivel számíthatjuk [1–5]:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_{xy} = -K(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y},$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

A lemez peremvonalának $x = x_0$, $y = y_0$ pontjában (2. ábra)



2. ábra

$$\tan \varphi = -\frac{1}{\partial y / \partial x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0},$$

és így ott

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^4 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^4 x_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2},$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a^2 b^2 x_0 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}.$$

Ennek megfelelően az ismert transzformációs képletek szerint az x_0, y_0 kerületi pontban az n, t irányokban működő nyomatékok [1];

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + 2m_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$m_{nt} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + m_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Mindezek a képletek a nyomatékokra zárt összefüggéseket eredményeznek.

IRODALOM

1. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Springer-Verlag, Wien 1959, 5. Aufl. pp. 159–165
2. TIMOSHINKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London 1959, 2nd Ed., pp. 310–313
3. L'HERMITE, R.: Résistance des matériaux. Théorique et expérimentale. Tome I, Dunod Paris, pp. 554–555
4. SZILÁRD, R.: Theory and Analysis of Plates. Classical and Numerical Methods. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974, pp. 124–125
5. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. At he University Press, Cambridge 1944, 1952, p. 484
6. SENGUPTA, H. M.: The Bending of an Elliptic Plate under Certain Distribution of Load. *Bulletin Calcutta Math. Soc.*, **40** (March and June 1948, December 1949), 17–35, 55–63
7. PERRY, C. L.: The Bending of Thin Elliptical Plates. *Proc. III. Symp. Appl. Math.* McGraw Hill **3** (1950), 131–139
8. SETH, B. R.: Bending of an Elliptic Plate with a Confocal Hole. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **2** (1949), 177–181
9. HAPPEL, H.: Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten. *Mathematische Zeitschrift* **11** (1921), 194–223
10. NICOLAS, M. M.: Plaques minces de contour elliptique. *Annales des Ponts et Chaussées* **107** (1937), — VII (Juillet), 161–166
11. OLSSON, R. G.: Biegung elliptischer und kreisförmiger Platten veränderlicher Dicke bei hydrostatischer Belastung. *Ingenieur Archiv* **9** (1938), 108–115

Elliptic Plate with Clamped Edge. — Applying the usual assumptions of the technical theory of elasticity, an elliptic plate with clamped edge is analysed. The plate in question is subject to normal loads of polynomial distribution. It is demonstrated that exceptionally in the present case the deflection and stress pattern of the plate can be expressed by very simple closed formulae.

Elliptische Platte mit Randeinspannung. — Im Rahmen der technischen Elastizitätslehre wird eine ringsherum fest eingespannte elliptische Platte unter polynomartig verteilter Normallast behandelt. Es wird nachgewiesen, daß in diesem speziellen Ausnahmefall die Formänderung und das Kräftespiel der Platte durch einfache geschlossene Formeln ausgedrückt werden können.