PERIODIKUSAN TERHELT RUGALMAS ÁGYAZÁSÚ KÖRLEMEZEK

MÁRKUS GYULA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. július 23-án]

A dolgozat állandó vastagságú, periodikusan terhelt, rugalmas ágyazású, vékony és izotrop körlemezekkel foglalkozik. A bemutatásra kerülő elmélet segítségével lehetőség van minden olyan, körív mentén ható terhelés hatására a lemez alakváltozásait és igénybevételeit analitikus módon meghatározni, amelynek Fourier-sora ismeretes.

1. Lemezelmélet

Az állandó vastagságú, rugalmas ágyazású, vékony és izotrop körlemez differenciálegyenlete r, φ poláris koordináta rendszerben a rugalmas elmélet alapján az alábbiak szerint írható fel:

$$\nabla\nabla w + \frac{q(r,\varphi)}{K} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) +$$
$$+ \frac{k_0}{K} w = \frac{p(r,\varphi)}{K}\,. \tag{1}$$

A fenti egyenletben w a lemez középfelületének merőlegesen mért eltolódását, r valamely pontjának a kezdőponttól mért távolságát, φ a kérdéses pontot a középponttal összekötő sugár és a kezdő irány közötti szöget, k_0 a Winkler—Schwedler-féle ágyazási tényezőt, $p(r,\varphi)$ a koordinátáktól függő felületi terhelést,

$$q(r,\varphi) = k_0 w \tag{2}$$

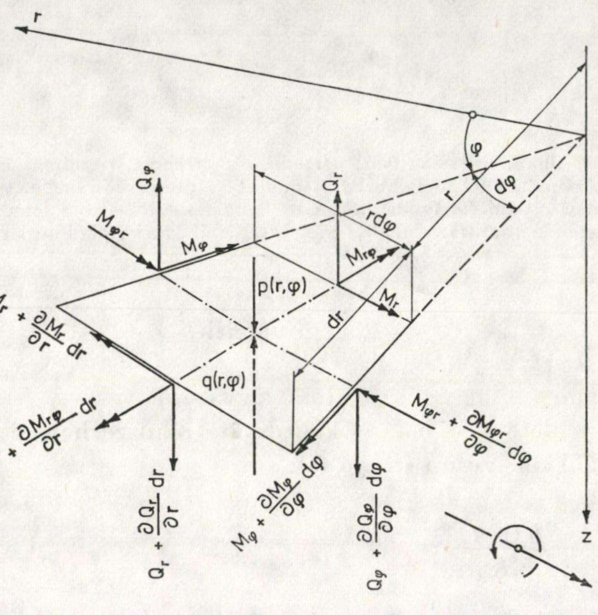
talajreakcióerőt, K pedig az ún. lemezmerevséget jelenti, amelynek értéke

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\,, \tag{3}$$

* Dr. Márkus Gyula, 1112 Budapest, Süveg u. 4/a.

ahol E a rugalmassági modulus, μ pedig a keresztirányú nyúlási együttható, azaz a Poisson-féle szám reciprok értéke.

Az 1. ábra a körlemezből kivágott elemi testre ható pozitív előjelű metszeterőket tünteti fel. A w eltolódás függvény ismeretében felírhatók az elfordulások, a nyomatékok (sugár-, érintőirányú, csavaró), a nyíróerők (sugár-,



1. ábra. A körlemezből kivágott elemre ható metszeterők

érintőirányú) és esetleges támaszoknál a reakcióerők (sugár-, érintőirányú) kifejezései:

$$\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}\,;\ \vartheta_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

$$M_r = -K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$

$$M_\varphi = -K\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right),$$

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = -(1-\mu)K\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right),$$

$$Q_r = -K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \qquad (4)$$

$$Q_\varphi = -K\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}\right),$$

$$V_r = \pm K\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2-\mu}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial\varphi^2} - \frac{3-\mu}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right),$$

$$V_\varphi = \pm K\left(\frac{2-\mu}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial\varphi} + \frac{2\mu-1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3} + 2\frac{1-\mu}{r^3}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right).$$

A reakcióerőknél — amelyek akkor pozitív előjelűek, ha alulról felfelé támadják a lemezt —, kettős előjelet találunk. A felső előjel a kezdőponthoz, illetve kezdőirányhoz képest távolabb fekvő peremre, az alsó előjel pedig a közelebb fekvőre vonatkozik.

2. A körlemez differenciálegyenletének általános megoldása

A lemez terhelésével kapcsolatban feltételezzük, hogy érintőirányú változását az alábbi Fourier-sor fejezi ki;

$$p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin n\varphi\,, \tag{5}$$

ahol a_0, a_n és a_n az ún. Fourier-együtthatók az r sugár és a terhelés intenzitásának a függvényei.

A rugalmas ágyazású körlemez (1) alatti Bessel típusú parciális differenciálegyenletének általános megoldása az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából és a homogén egyenlet A, B, C és D, valamint $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ és $\bar{D}$ integrálási állandókkal bővített megoldásából áll, amely az (5) alatti terheléshez hasonló összegezések formájában állítható elő. A lehajlásfüggvény n-dik tagja Thomson-függvényekkel a következő módon írható fel:

$$\begin{aligned} w_n = w_{n0} + [&(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{ber}_n\,\xi + \\ +\, &(B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{bei}_n\,\xi + \\ +\, &(C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{ker}_n\,\xi + \\ +\, &(D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{kei}_n\,\xi]\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Ebben az egyenletben w_{n0} az n-dik tag partikuláris megoldása,

$$\xi = \frac{r}{l}\,, \tag{7}$$

ahol l az ún. karakterisztikus hossz:

$$l = \sqrt[4]{\frac{K}{k_0}}\,. \tag{8}$$

Az n-ed rendű Thomson-függvények sorai, azok differenciálhányadosai, az igen nagy, illetve igen kicsi argumentumokra vonatkozó közelítő képletek, valamint a magasabb rendűeknek alacsonyabb rendűekkel való kifejezései a *Függelék*ben találhatók.

A (6) alatti megoldás és a (4) alatti összefüggések segítségével felírhatók az elfordulások, nyomatékok, nyíróerők és reakcióerők kifejezései;

$$\begin{aligned}
\vartheta_{rn} = \vartheta_{rn0} - \frac{1}{l}\big[&(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{ber}'_n\,\xi + \\
&+ (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{bei}'_n\,\xi + \\
&+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{ker}'_n\,\xi + \\
&+ (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{kei}'_n\,\xi\big]\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\varphi n} = \vartheta_{\varphi n0} + \frac{1}{l\xi}\big[&(A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{ber}_n\,\xi + \\
&+ (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{bei}_n\,\xi + \\
&+ (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{ker}_n\,\xi + \\
&+ (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{kei}_n\,\xi\big]\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{rn} = M_{rn0} &+ \\
&+ \frac{K}{l^2}\Bigg\{(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{bei}_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\xi}\left(\mathrm{ber}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{ber}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] - \\
&- (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{ber}_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\xi}\left(\mathrm{bei}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{bei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] + \\
&+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{kei}_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\xi}\left(\mathrm{ker}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{ker}_n\,\zeta}{\xi}\right)\right] - \\
&- (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{ker}_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\xi}\left(\mathrm{kei}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{kei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right]\Bigg\}\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\varphi n} = M_{\varphi n0} &+ \qquad\qquad (9/1)\\
&+ \mu\frac{K}{l^2}\Bigg\{(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{bei}_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\mu\xi}\left(\mathrm{ber}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{ber}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] - \\
&- (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{ber}_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\mu\xi}\left(\mathrm{bei}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{bei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] + \\
&+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{kei}_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\mu\xi}\left(\mathrm{ker}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{ker}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] - \\
&- (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin u\varphi)\left[\mathrm{ker}_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\mu\xi}\left(\mathrm{kei}'_n\,\xi - \frac{n^2\,\mathrm{kei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right]\Bigg\}\ ,
\end{aligned}$$

$$M_{r\varphi n} = M_{\varphi rn} = M_{r\varphi n0} +$$

$$+ (1-\mu)\frac{K}{l^2\,\xi}\,n\left[(A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi)\left(\mathrm{ber}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{ber}_n\,\xi}{\xi}\right) + \right.$$

$$+ (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi)\left(\mathrm{bei}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{bei}_n\,\xi}{\xi}\right) +$$

$$+ (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi)\left(\mathrm{ker}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{ker}_n\,\xi}{\xi}\right) +$$

$$\left. + (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi)\left(\mathrm{kei}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{kei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right],$$

$$Q_{rn} = Q_{rn0} + \frac{K}{l^3}\left[(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{bei}'_n\,\xi + \right.$$

$$- (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{ber}'_n\,\xi -$$

$$+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\,\mathrm{kei}'_n\,\xi -$$

$$\left. - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin u\varphi)\,\mathrm{ker}'_n\,\xi\right], \tag{9/2}$$

$$Q_{\varphi n} = Q_{\varphi n0} - \frac{K}{l^3\,\xi}\,n\left[(A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{bei}_n\,\xi - \right.$$

$$- (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{ber}_n\,\xi +$$

$$+ (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{kei}_n\,\xi -$$

$$\left. - (D \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi)\,\mathrm{ker}_n\,\xi\right],$$

$$V_{rn} = V_{rn0} \mp$$

$$\mp \frac{K}{l^3}\left\{(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin u\varphi)\left[\mathrm{bei}'_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\xi^2}\,n^2\left(\mathrm{ber}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{ber}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] - \right.$$

$$- (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{ber}'_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\xi^2}\,n^2\left(\mathrm{bei}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{bei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] +$$

$$+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{kei}'_n\,\xi + \frac{1-\mu}{\xi^2}\,n^2\left(\mathrm{ker}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{ker}_n\,\xi}{\xi}\right)\right] -$$

$$\left. - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi)\left[\mathrm{ker}'_n\,\xi - \frac{1-\mu}{\xi^2}\,n^2\left(\mathrm{kei}'_n\,\xi - \frac{\mathrm{kei}_n\,\xi}{\xi}\right)\right]\right\},$$

$$V_{\varphi n} = V_{\varphi n0} \mp \tag{9/3}$$

$$\mp \frac{K}{l^3 \xi} n \Bigg\{ (A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{ber}'_n \xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{ber}_n \xi \right) + (2-\mu) \operatorname{bei}_n \xi \right] +$$

$$+ (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{bei}'_n \xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{bei}_n \xi \right) - (2-\mu) \operatorname{ber}_n \xi \right] +$$

$$+ (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{ker}'_n \xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{ker}'_n \xi \right) + (2-\mu) \operatorname{kei}_n \xi \right] +$$

$$+ (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{kei}'_n \xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{kei}_n \xi \right) - (2-\mu) \operatorname{ker}_n \xi \right] \Bigg\} .$$

A végeredményt az egyes tagok összegezése után kapjuk:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n ; \; \vartheta_r = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{rn} ; \; \vartheta_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{\varphi n} ,$$

$$M_r = \sum_{n=0}^{\infty} M_{rn} ; \; M_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\varphi n} ; \; M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{r\varphi n} , \tag{10}$$

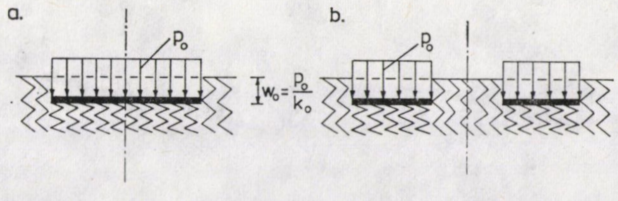
$$Q_r = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{rn} ; \; Q_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\varphi n} ; \; V_r = \sum_{n=0}^{\infty} V_{rn} ; \; V_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} V_{\varphi n} .$$

Körszimmetrikus terhelés esetén $n = 0$, az egyes jelzéseknél azonban lábindexben a zérust egyszerűség kedvéért el szokták hagyni. Egyenletesen megoszló, $p(r, \varphi) = p_0$ terhelésnél (2. ábra) a lemez önmagával párhuzamosan besüllyed a talajba, miközben a

$$w_0 = \frac{p_0}{k_0} \tag{11}$$

eltolódást végzi. Ez egyben az (1) alatti differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása. A (4) alapján következik, hogy

$$\vartheta_{r0} = M_{r0} = M_{\varphi 0} = Q_{r0} = V_{r0} = 0 . \tag{12}$$



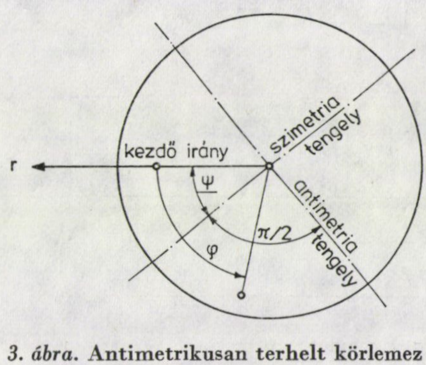
2. ábra. Egyenletesen megoszlóan terhelt rugalmas ágyazású kör és körgyűrű alakú lemez

Antimetrikus terhelés és alakváltozás esetén, amikoris a teherfüggvény (5) $\cos\varphi$, illetve $\sin\varphi$ szerint változik, $n = 1$:

$$p(\varphi) = a_1 \cos\varphi + \bar{a}_1 \sin\varphi \,. \tag{13}$$

Az ilyen jellegű terhelésnek van egy szimmetria és egy antimetria tengelye. Előbbi zárjon be a kezdőiránnyal ψ szöget (3. ábra). Egyenletesen változó felületteher esetén

$$p(r, \varphi) = p_1 \frac{r}{a} \cos(\varphi - \psi) = p_1 \frac{r}{a} (\cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi). \tag{14}$$



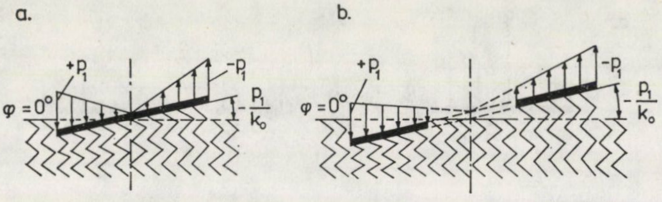
3. ábra. Antimetrikusan terhelt körlemez

Ez azt jelenti, hogy a (13) alatti teherfüggvényben

$$a_1 = p_1 \frac{r}{a} \cos\psi; \quad \bar{a}_1 = p_1 \frac{r}{a} \sin\psi \,. \quad (15$$

Ilyen megoszlású terhelés esetén a rugókon álló szabad peremű kör, illetve körgyűrű alakú lemez az antimetria tengely körül elfordul, görbülete nem változik (4. ábra). A talajba való benyomódását a

$$w_{10} = \frac{p_1 r}{a k_0} \cos(\varphi - \psi) \tag{16}$$



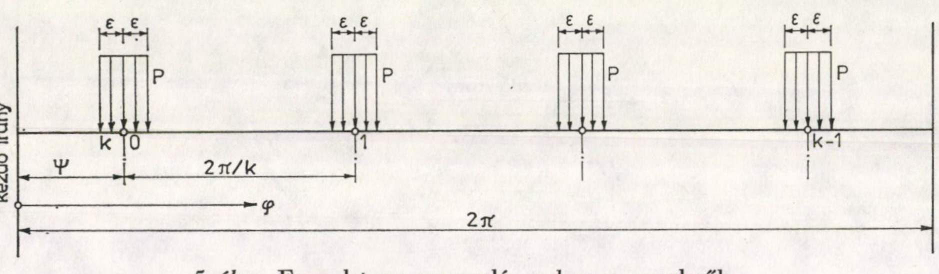
4. ábra. Egyenletesen változóan terhelt rugalmas ágyazású kör és körgyűrű alakú lemez

függvény fejezi ki. Mivel az azonos a partikuláris megoldással, (4) alapján

$$\vartheta_{r10} = -\frac{p_1}{ak_0}\cos(\varphi - \psi); \quad \vartheta_{\varphi 10} = \frac{p_1}{ak_0}\sin(\varphi - \psi), \tag{17}$$
$$M_{r10} = M_{\varphi 10} = M_{r\varphi 10} = Q_{r10} = Q_{\varphi 10} = V_{r10} = 0.$$

Rugalmas ágyazású körlemezek esetén a periodikus terhelések közül a mérnöki gyakorlatban legtöbbször a P intenzitású szakaszos vonalerő (5. ábra) fordul elő:

$$p(\varphi) = \frac{2kP}{\pi}\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k}\sum_{m=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m}\sin mk\varepsilon\cos mk(\varphi - \psi)\right]. \tag{18}$$



5. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerők

Ebben a kifejezésben k az erőcsoportok számát, ε pedig a vonalerő közepén és szélein áthaladó sugarak közötti szögeket jelenti. Bevezetve a

$$n = mk, \tag{19}$$

valamint a

$$P = \frac{\mathbf{P}}{2b_1\varepsilon} = \frac{\mathbf{P}}{2\beta_1 l\varepsilon} \tag{20}$$

jelöléseket,

$$p(\varphi) = \frac{k\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k,2k,\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\cos n(\varphi - \psi)\right]. \tag{21}$$

Jelen esetben **P** a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú kör mentén ható, 2 $b_1\varepsilon$ szakaszra eső, P intenzitású vonalerő eredőjét jelenti. Amennyiben a P vonalerők helyett **P** koncentrált erők támadják a lemezt,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} = 1\,;\; \lim_{n\to 0} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} = 1\,. \tag{22}$$

Ekkor a terhelés végtelen trigonometrikus sora:

$$p(\varphi) = \frac{k\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k,2k,\dots}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi)\right]. \tag{23}$$

Ha a szimmetria tengelyben ($\psi = 0$), a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú kör mentén csupán egy koncentrált **P** erő támadja a lemezt ($k = 1$):

$$p(\varphi) = \frac{\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1,2,3\dots}^{\infty} \cos n\varphi\right). \tag{24}$$

Az elmondottak mintájára M intenzitású, szakaszosan ható, sugárirányú vonal nyomaték Fourier-sorát is elő tudjuk állítani:

$$m(\varphi) = \frac{2kM}{\pi}\left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k}\sum_{m=1,2,\dots}^{8} \frac{1}{m}\sin mk\varepsilon \cos mk(\varphi - \psi)\right]. \tag{25}$$

Határozzuk meg a 2 $b_1\varepsilon$ szakaszra eső M megoszló vonalnyomaték **M** eredő nyomatékát

$$\mathbf{M} = 2\int_0^{\varepsilon} Mb_1 \cos\varphi \, d\varphi = 2\, Mb_1 \sin\varepsilon\,. \tag{26}$$

Ezt behelyettesítve (25)-be

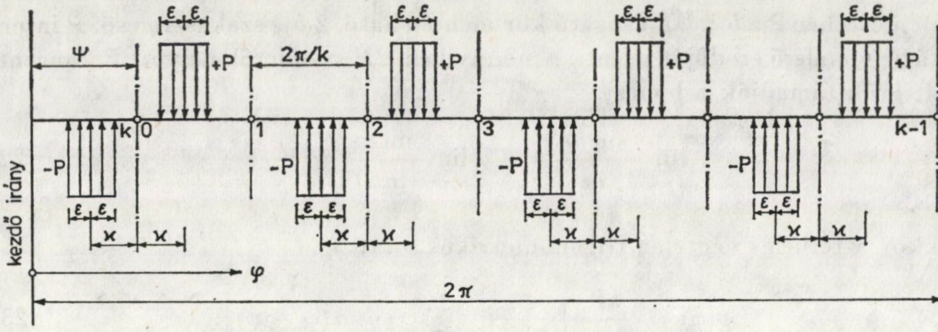
$$m(\varphi) = \frac{k\mathbf{M}\varepsilon}{\beta_1 l\pi \sin\varepsilon}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k,2k,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cos n(\varphi - \psi)\right]. \tag{27}$$

Koncentrált sugárirányú nyomatékok esetén

$$m(\varphi) = \frac{k\mathbf{M}}{\beta_1 l\pi}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=k,2k,\dots}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi)\right]. \tag{28}$$

Amennyiben a b_1 sugarú körív mentén ható szakaszos vonalerők előjelüket is váltogatják (6. ábra), a terhelés végtelen trigonometrikus sora alábbi módon írható fel:

$$p(\varphi) = \frac{4P}{\pi}\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\frac{mk\varepsilon}{2} \sin\frac{mk\varkappa}{2} \sin\frac{mk}{2}(\varphi - \psi)\,. \tag{29}$$



6. ábra. Egyenletesen megoszló, váltakozó előjelű, szakaszos vonalerők

Ennél a sornál k csak páros szám lehet. Behelyettesítve a (19) és (20) alattiakat

$$p(\varphi)=\frac{k\mathbf{P}}{b_1\pi}\sum_{n=\frac{k}{2},\frac{2k}{2},\dots}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\sin n\varkappa\sin n(\varphi-\psi). \tag{30}$$

Minthogy ennél a terhelésnél az 1, 2, . . ., k sugarak mentén antimetria tengelyek képződnek, mód nyílik arra, hogy vonalteher hatására sugarak mentén szabadon felfekvő módon alátámasztott rugalmas ágyazású körcikk, illetve körgyűrűcikk alakú lemez statikai mennyiségeit is meghatározzuk.

A bemutatott periodikus terhek körív mentén hatnak és nem függenek az r sugártól. Ez azt jelenti, hogy számításaink során csupán a homogénné tett differenciál-egyenlettel (1) kell foglalkoznunk $[p(r,\varphi)=0]$. Ez esetben tehát partikuláris megoldásról sem beszélhetünk:

$$w_{n0}=\vartheta_{rn0}=\vartheta_{\varphi n0}=M_{rn0}=M_{\varphi n0}=M_{r\varphi n0}=Q_{rn0}=Q_{\varphi n0}=V_{rn0}=V_{\varphi n0}. \tag{31}$$

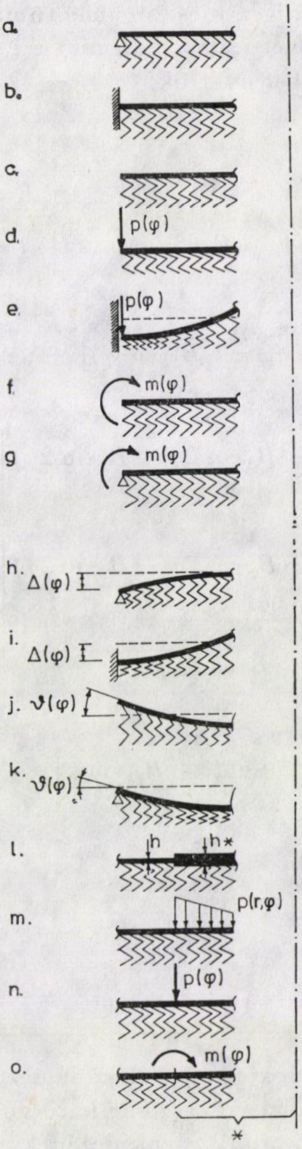
3. Kerületi feltételek

Az állandó vastagságú rugalmas ágyazású körlemez differenciálegyenletének (7) alatti megoldása peremenként négy-négy szabadon megválasztható integrálási állandót (A_n, B_n, C_n, D_n; $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$, $\bar{C}_n$, $\bar{D}_n$) tartalmaz. Ezeket a kerületek mentén felírható feltételi egyenletekből határozhatjuk meg. Az egyenletek száma minden esetben megegyezik az ismeretlenek számával.

Körlemez esetén, amelynek közepén nincs lyuk, véges értékű w_n eltolódást és $\partial^2 w_n/\partial r^2$ görbületet kell kapnunk. A (6) alatti kifejezés alapján ez csak akkor lehetséges, ha

$$C_n=D_n=\bar{C}_n=\bar{D}_n=0\,. \tag{32}$$

A 7. ábrában néhány megtámasztási módhoz és terhelési esethez megadjuk a kerületi feltételeket:



$$w = 0; \quad M_r = 0. \tag{33}$$

$$w = 0; \quad \vartheta_r = 0. \tag{34}$$

$$M_r = 0; \quad V_r = 0. \tag{35}$$

$$M_r = 0; \quad V_r = -p(\varphi). \tag{36}$$

$$\vartheta_r = 0; \quad V_r = -p(\varphi). \tag{37}$$

$$M_r = m(\varphi); \quad V_r = 0. \tag{38}$$

$$w = 0; \quad M_r = m(\varphi). \tag{39}$$

$$w = \Delta(\varphi); \quad M_r = 0. \tag{40}$$

$$w = \Delta(\varphi); \quad \vartheta_r = 0. \tag{41}$$

$$M_r = 0; \quad \vartheta_r = \vartheta(\varphi). \tag{42}$$

$$w = 0; \quad \vartheta_r = \vartheta(\varphi). \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned} w^* - w = 0\,;\ \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0\,, \\ M_r^* - M_r = 0\,; V_r^* - V_r = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned} w^* - w = 0\,;\ \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0\,, \\ M_r^* - M_r = 0; Q_r^* - Q_r = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} w^* - w = 0\,; \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0\,, \\ M_r^* - M_r = 0;\ Q_r^* - Q_r = p(\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} w^* - w = 0;\ \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0\,, \\ M_r^* - M_r = m(\varphi); Q_r^* - Q_r = 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

7. *ábra.* Kerületi feltételek

4. Alakváltozások és igénybevételek a középpontban

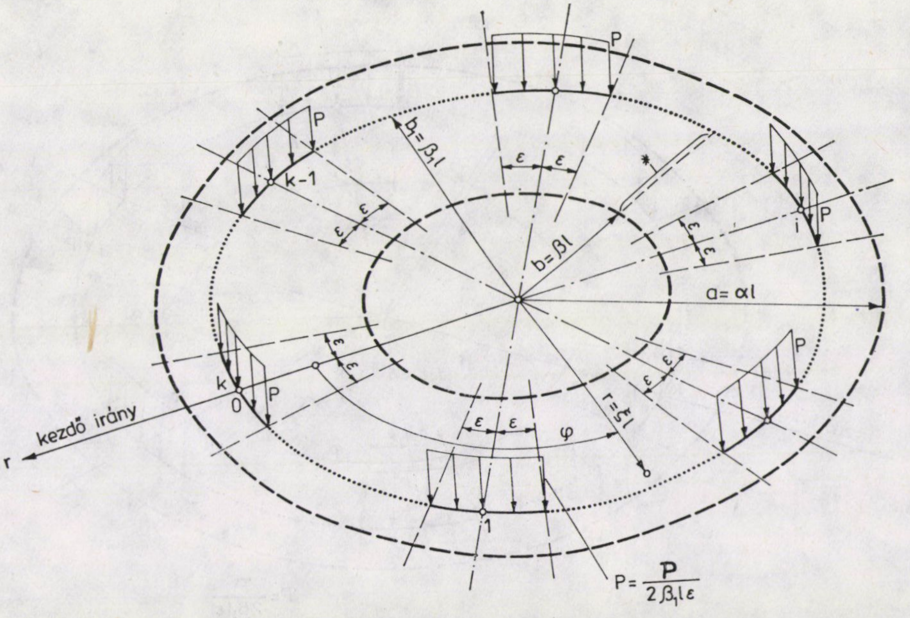
Körlemezek esetében szükségünk van a (6) és (9) alatti képletek értékeire a $\xi = 0$ pontban. A Thomson-függvények x igen kicsi argumentumaira a Függelékben megadott közelítő értékeket behelyettesítve, valamint a $\xi \to 0$ határátmenetet elvégezve az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$
\begin{aligned}
w &= A_0 , \\
\vartheta_r &= \frac{1}{2\sqrt{2}\,l}\left[(A_1 - B_1)\cos\varphi + (\bar{A}_1 - \bar{B}_1)\sin\varphi)\right], \\
\vartheta_\varphi &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\,l}\left[(A_1 - B_1)\sin\varphi - (\bar{A}_1 - \bar{B}_1)\cos\varphi)\right], \\
M_r &= -\frac{K}{2l^2}\left[(1+\mu)\,B_0 - \frac{1-\mu}{2}\,(B_2\cos 2\varphi + \bar{B}_2\sin 2\varphi)\right], \\
M_\varphi &= -\frac{K}{2l^2}\left[(1+\mu)\,B_0 + \frac{1-\mu}{2}\,(B_2\cos 2\varphi + \bar{B}_2\sin 2\varphi)\right], \\
M_{r\varphi} &= -(1-\mu)\frac{K}{4l^2}\,(B_2\sin 2\varphi - \bar{B}_2\cos 2\varphi), \\
Q_r &= -\frac{K}{2\sqrt{2}l^3}\left[(A_1 + B_1)\cos\varphi + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1)\sin\varphi\right], \\
Q_\varphi &= -\frac{K}{2\sqrt{2}l^3}\left[(A_1 + B_1)\sin\varphi - (\bar{A}_1 + \bar{B}_1)\cos\varphi\right].
\end{aligned}
\tag{48}
$$

5. Példák

Határozzuk meg a 8. ábra a és b sugarú, körgyűrű alakú lemezének integrálási állandóit a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú körív mentén szakaszosan ható vonalerő (21) esetében. A feladat egy lábakon álló hűtőtorony alaplemezének tekinthető. Tételezzük fel, hogy a kezdőirány egybeesik az egyik támasszal ($\varphi = 0$). A terhelés Fourier-sora ekkor (21) alapján

$$
p(\varphi) = \frac{k\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi}\sum_{n=0,k,2k,\ldots}^{\infty}{}' \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\cos n\varphi .
\tag{49}
$$



8. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású körgyűrű alakú lemez

Fenti képletben a Σ' jelölés azt jelenti, hogy a végtelen trigonometrikus sor első tagját ($n = 0$) fél értékkel kell számításba venni. Miután a terhelés csak koszinusz függvényeket tartalmaz, a (6) és (9) kifejezésekben a felülvonásos integrálási állandók eltűnnek.

Számítástechnikai szempontból az a és b sugarú körgyűrűalakú lemezt $a \div b_1$ és $b_1 \div b$ sugarúakra bontjuk fel. Utóbbi mennyiségeit megkülönböztetés céljából * jellel látjuk el. Feladatunk n minden értéke esetén nyolc integrálási állandót tartalmaz. Ezek meghatározására ugyanennyi feltételi egyenletet kell felírni. A kerületi feltételek:

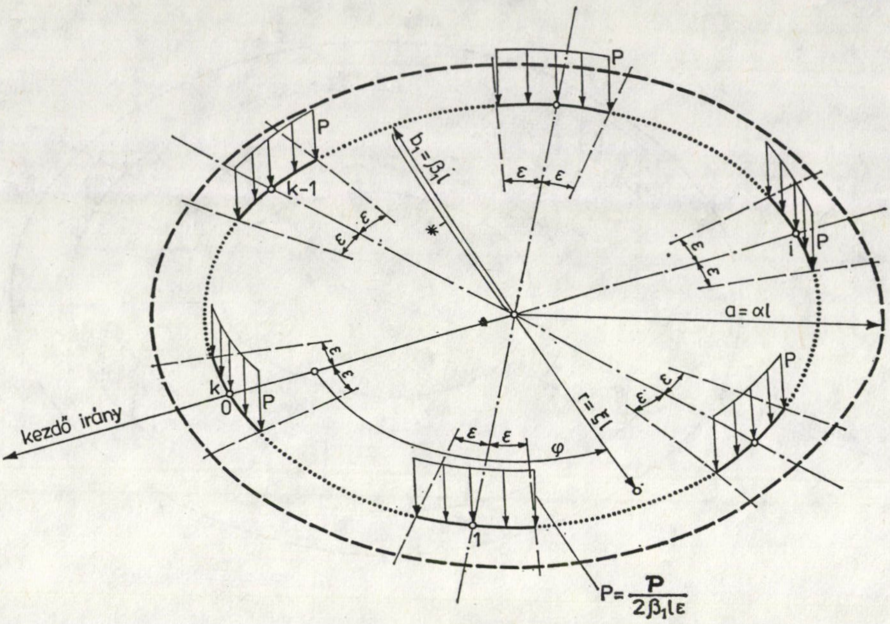
$$\xi = \beta \ :(35)\ldots\ M_r^* = 0\,;\ V_r^* = 0\,,$$

$$\xi = \beta_1 :(46)\ldots\ w^* - w = 0\,;\ \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0\,;\ M_r^* - M_r = 0\,;\ Q_r^* - Q_r = p(\varphi)\,,$$

$$\xi = \alpha \ :(35)\ldots\ M_r = 0\,;\ V_r = 0\,.$$

A (6) és (9) képletek segítségével előállítjuk a feltételi egyenletrendszert. Az ismeretlenek együtthatóit az I. táblázatban adjuk közre. Az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az integrálási állandókat.

Amennyiben a körgyűrű alakú lemez átmegy körlemezbe ($\beta \to 0$) a C_n^* és D_n^* integrálási állandók (9. ábra) eltűnnek (32). Ekkor a zérusra redukált egyenletrendszer mátrixa egyszerűbb alakot ölt (II. táblázat). Erre az esetre explicit



9. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású kör alakú lemez

alakban is megadjuk az integrálási állandók kifejezéseit. Ehhez vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
c = & -\left[(\mathrm{ber}_n\,\beta)^2 + (\mathrm{bei}_n\,\beta)^2\right]\left[(\mathrm{ker}'_n\,\beta)^2 + (\mathrm{kei}'_n\,\beta)^2\right] - \\
& - \left[(\mathrm{ker}_n\,\beta)^2 + (\mathrm{kei}_n\,\beta)^2\right]\left[(\mathrm{ber}'_n\,\beta)^2 + (\mathrm{bei}'_n\beta)^2\right] + \\
& + 2\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta - \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta)(\mathrm{ber}'_n\,\beta\,\mathrm{kei}'_n\,\beta - \mathrm{bei}'_n\,\beta\,\mathrm{ker}'_n\,\beta) + \\
& + 2(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta + \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta)\,(\mathrm{ber}'_n\,\beta\,\mathrm{ker}'_n\,\beta + \mathrm{bei}'_n\,\beta\,\mathrm{kei}'_n\,\beta) = -\frac{1}{\beta^2}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 = & \left(\frac{1-\mu}{\alpha^2}\right)^2 (1-n^2)(\mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{ker}'_n\,\alpha - \mathrm{ker}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\alpha) + \qquad (50/1) \\
& + \frac{1-\mu}{\alpha}(\mathrm{ber}'_n\,\alpha\,\mathrm{ker}'_n\,\alpha + \mathrm{bei}'_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha) - \mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha + \\
& + \mathrm{kei}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^3}\,n^2\,(\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{ker}_n\,\alpha + \mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}_n\,\alpha) - \\
& - \frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2(\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{ker}'_n\,\alpha + \mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha + \mathrm{ker}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha + \mathrm{kei}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\,\alpha)\,,
\end{aligned}
$$

$$c_2 = \left(\frac{1-\mu}{\alpha^2}\right)^2 (n^2-1)\,(\mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha - \mathrm{kei}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\,\alpha) -$$

$$- \frac{1-\mu}{\alpha}(\mathrm{ber}'_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha - \mathrm{bei}'_n\,\alpha\,\mathrm{ker}'_n\,\alpha) - \mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{ker}'_n\,\alpha + \tag{50/2}$$

$$+ \mathrm{ker}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^3}\,n^2(\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}_n\,\alpha - \mathrm{ker}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}_n\alpha) +$$

$$+ \frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2(\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{kei}'_n\,\alpha - \mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha - \mathrm{ker}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\,\alpha + \mathrm{kei}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha),$$

$$c_3 = \frac{1-\mu}{\alpha}\left[(\mathrm{ber}'_n\,\alpha)^2 + (\mathrm{bei}'_n\alpha)^2\right] + \frac{1-\mu}{\alpha^3}\,n^3\left[(\mathrm{ber}_n\,\alpha)^2 + (\mathrm{bei}_n\,\alpha)^2\right] -$$

$$- 2\,\frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2(\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\,\alpha + \mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\,\alpha) -$$

$$- \left[\left(\frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n\right)^2 (n^2-1) + 1\right](\mathrm{ber}_n\,\alpha\,\mathrm{bei}'_n\,\alpha - \mathrm{bei}_n\,\alpha\,\mathrm{ber}'_n\alpha).$$

Fenti kifejezésekben c az egyenletrendszer determinánsa. Az (50) alattiak segítségével az integrálási állandók a számítás sorrendjében:

$$C_n = \frac{kl^2\,\mathsf{P}}{c\beta K\pi}\,\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\Big\{\mathrm{kei}'_n\,\beta\left[(\mathrm{ber}_n\,\beta)^2 + (\mathrm{bei}_n\,\beta)^2\right] -$$

$$- \mathrm{ber}'_n\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta - \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta) -$$

$$- \mathrm{bei}'_n\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta + \mathrm{bei}_n\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta)\Big\},$$

$$D_n = -\frac{kl^2\,\mathsf{P}}{c\beta K\pi}\,\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\Big\{\mathrm{ker}'_n\,\beta\left[(\mathrm{ber}_n\,\beta\,)^2 + (\mathrm{bei}_n\,\beta)^2\right] -$$

$$- \mathrm{ber}'_n\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta + \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta) +$$

$$+ \mathrm{bei}'_n\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta - \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta)\Big\}, \tag{51/1}$$

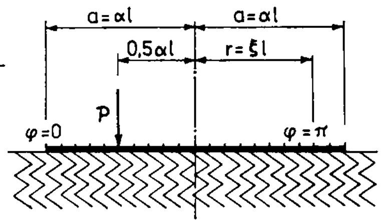
$$A_n = \frac{-C_n\,c_1 + D_n c_2}{c_3},$$

$$B_n = \frac{A_n\left[\mathrm{bei}'_n\,\alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2\left(\mathrm{ber}'_n\,\alpha - \frac{\mathrm{ber}_n\,\alpha}{\alpha}\right)\right] + C_n\left[\mathrm{kei}'_n\,\alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2\left(\mathrm{ker}'_n\,\alpha - \frac{\mathrm{ker}_n\,\alpha}{\alpha}\right)\right] - D_n\left[\mathrm{ker}'_n\,\alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^2}\,n^2\left(\mathrm{kei}'_n\,\alpha - \frac{\mathrm{kei}_n\,\alpha}{\alpha}\right)\right]}{\mathrm{ber}'_n\,\alpha + \frac{1-\mu}{\alpha}\,n^2\left(\mathrm{bei}'_n\,\alpha - \frac{\mathrm{bei}_n\,\alpha}{\alpha}\right)},$$

III. táblázat

$\mu = \frac{1}{6}$

$\alpha = 4$



$10^6 w \;:\; \frac{Pl^2}{K}$

$10^6 M_r \;:\; P$

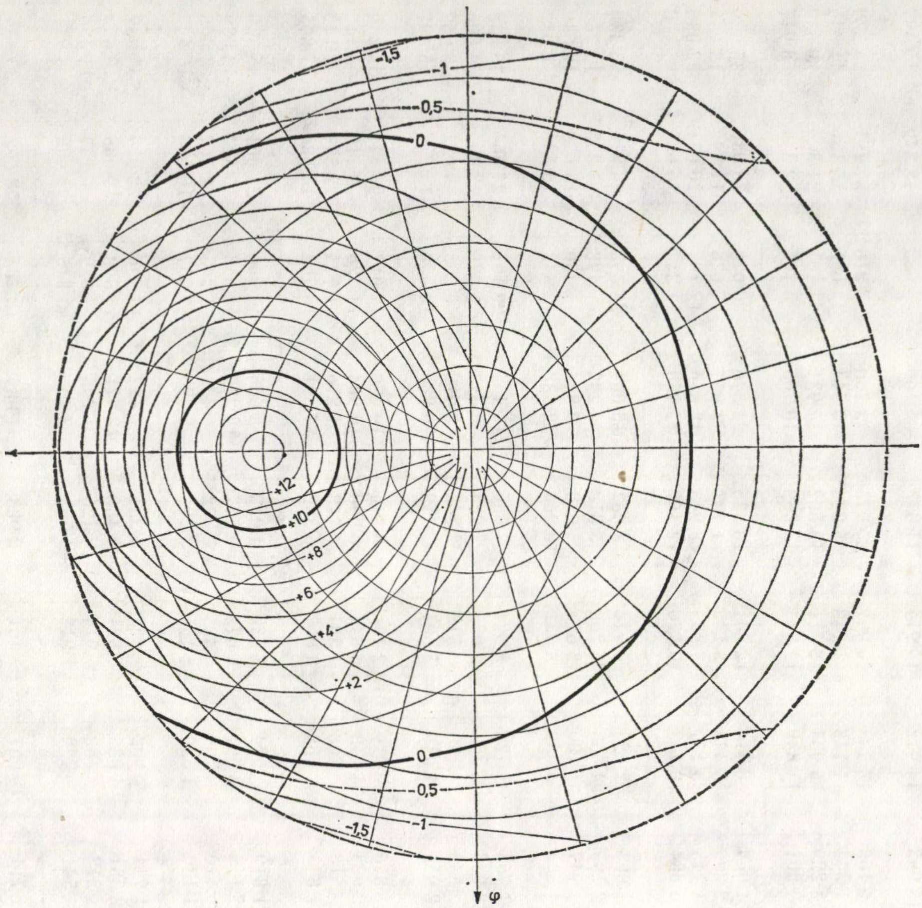
$10^6 M_\varphi \;:\; P$

$10^6 M_{r\varphi} \;:\; P$

max n = 28

$\varphi : \pi$ \ $\xi : \alpha$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
0/12	38 570 0 28 296 0	57 389 —3 925 35 711 0	78 364 —356 50 502 0	100 611 18 282 78 293 0	121 641 69 598 135 230 0	133 219 341 952 277 956 0	119 145 66 618 132 903 0	96 036 11 908 73 015 0	72 629 —10 988 42 350 0	52 036 —20 082 24 492 0	35 339 —22 036 13 753 0
1/12	29 897 0 20 190 —6 457	47 864 —2 232 24 885 —9 280	67 236 1 953 33 040 —14 510	87 023 19 320 44 337 —22 117	104 533 59 089 53 240 —28 056	113 519 116 978 57 035 —6 617	107 389 75 744 51 308 29 145	90 338 24 106 44 631 27 903	70 181 3 513 30 953 19 764	51 249 —15 760 19 417 13 388	35 339 —19 639 11 356 8 947
2/12	11 211 0 7 085 —9 057	27 221 —585 8 248 —11 846	43 506 2 444 9 567 —16 150	59 554 12 307 10 017 —20 547	73 723 30 575 7 695 —21 562	83 012 57 734 8 265 —11 762	84 102 54 372 199 8 758	76 624 34 313 4 585 23 175	63 658 10 603 7 493 24 915	49 029 —5 256 6 878 20 707	35 339 —13 089 4 806 15 497
3/12	—5 300 0 448 —8 766	8 175 —444 67 —10 831	21 266 833 —1 001 —13 718	34 152 4 950 —3 025 —16 631	46 073 13 129 —6 493 —17 919	55 622 26 055 —9 652 —14 575	60 888 32 343 —15 634 —4 873	60 558 30 675 —15 672 7 924	54 896 19 477 —11 694 17 055	45 738 6 026 —7 178 19 690	35 339 —4 142 —4 142 17 895

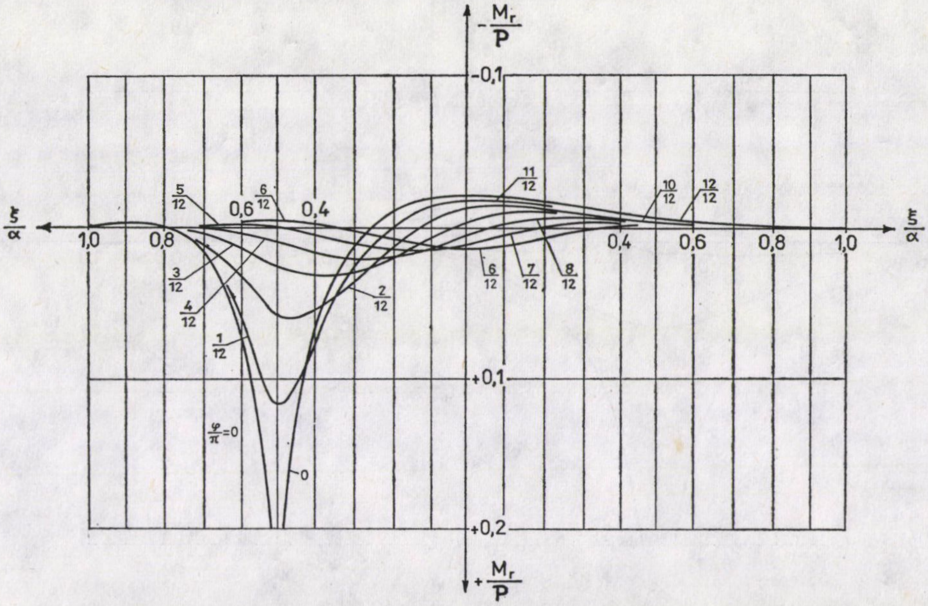
4/12	—14 004	—3 477	6 491	16 448	26 149	34 978	41 924	45 761	45 685	41 843	35 339
	0	—588	—471	534	3 668	7 710	16 191	20 887	19 972	13 447	4 806
	—340	—1 096	—2 671	—5 006	—8 314	—14 153	—17 236	—20 540	—20 635	—17 519	—13 089
	—7 040	—8 662	—10 768	—13 092	—14 972	—14 914	—11 473	—4 160	5 023	12 279	15 497
5/12	—15 754	—8 242	—1 097	6 168	13 583	20 992	27 975	33 700	37 216	37 791	35 339
	0	—373	—932	—1 544	—1 148	—1 748	5 234	10 544	14 696	15 156	11 356
	918	210	—1 210	—3 229	—5 984	—12 111	—13 602	—17 931	—21 181	—21 860	—19 639
	—4 870	—6 229	—7 855	—9 801	—11 839	—13 343	—13 359	—10 765	—5 106	2 334	8 947
6/12	—13 675	—8 824	—3 949	1 069	6 414	12 201	18 386	24 576	30 070	33 936	35 339
	0	183	—779	—2 205	—3 325	—5 142	—1 731	1 957	7 078	11 798	13 753
	2 000	1 434	369	—1 145	—3 177	—7 395	—8 943	—12 856	—17 107	—20 631	—22 036
	—3 014	—4 104	—5 330	—6 884	—8 733	—10 776	—12 467	—12 950	—11 237	—6 685	0
7/12	—10 422	—7 600	—4 387	—1 064	2 625	6 948	12 082	18 009	24 393	30 516	35 339
	0	740	—429	—2 195	—4 085	—5 268	—5 818	—4 292	—498	5 253	11 356
	2 320	1 884	1 173	147	—1 180	—2 621	—5 032	—7 854	—11 460	—15 673	—19 639
	—1 878	—2 616	—3 452	—4 581	—6 059	—8 031	—10 266	—12 338	—13 548	—12 748	—8 947
8/12	—7 431	—5 928	—3 888	—1 763	721	3 894	8 056	13 454	20 101	27 664	35 339
	0	925	—252	—2 042	—4 208	—4 653	—7 984	—8 413	—6 828	—2 454	4 806
	2 037	1 719	1 276	632	—139	513	—2 343	—3 918	—6 055	—9 071	—13 089
	—1 429	—1 768	—2 237	—2 953	—4 019	—5 604	—7 718	—10 286	—13 038	—15 217	—15 497
9/12	—5 185	—4 383	—3 184	—1 880	—219	2 136	5 544	10 409	17 017	25 441	35 339
	0	577	—424	—2 025	—4 143	—4 847	—8 990	—10 904	—11 526	—9 710	—4 142
	1 472	1 276	1 005	618	208	1 381	—748	—1 216	—1 725	—2 537	—4 142
	—1 319	—1 321	—1 497	—1 873	—2 568	—3 667	—5 332	—7 691	—10 762	—14 385	—17 895
10/12	—3 700	—3 165	—2 576	—1 819	—684	1 139	4 038	8 486	14 960	23 861	35 339
	0	—144	—866	—2 179	—4 091	—6 072	—9 377	—12 279	—14 648	—15 454	—13 089
	892	821	645	410	189	485	72	435	1 295	2 767	4 806
	—1 150	—976	—981	—1 130	—1 530	—2 181	—3 286	—5 026	—7 527	—10 990	—15 497
11/12	—2 866	—2 379	—2 179	—1 744	—902	622	3 235	7 427	13 786	22 919	35 339
	0	—847	—1 316	—2 381	—4 085	—7 521	—9 488	—12 941	—16 398	—19 085	—19 639
	475	502	370	212	68	— 914	426	1 296	3 039	6 167	11 356
	—695	—542	—503	—541	—720	—1 012	—1 553	—2 466	—3 845	—5 908	—8 947
12/12	—2 597	—2 106	—2 041	—1 714	—967	461	2 983	7 089	13 404	22 607	35 339
	0	—1 135	—1 504	—2 471	—4 090	—8 157	—9 507	—13 134	—16 958	—20 322	—22 036
	324	390	270	135	9	—1 555	520	1 560	3 605	7 332	13 753
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



10. ábra. Negyedpontjában **P** koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez lehajlás görbéi, a negyedpont lehajlási (w) hatásfelülete. Szorzó: $10^{-2}\,\mathbf{P}l^2/K$; $\alpha = 4$; $\mu = 1/6$

$$A_n^* = A_n - \frac{kl^2\,\mathbf{P}}{c\beta K\pi}\,\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\Big\{\mathrm{bei}_n'\,\beta\left[(\mathrm{ker}_n\,\beta)^2 + (\mathrm{kei}_n\,\beta)^2\right] +$$
$$+ \mathrm{ker}_n'\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta - \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta) -$$
$$- \mathrm{kei}_n'\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta + \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta)\Big\},$$

$$B_n^* = B_n + \frac{kl^2\,\mathbf{P}}{c\beta K\pi}\,\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\Big\{\mathrm{ber}_n'\,\beta\left[(\mathrm{ker}_n\,\beta)^2 + (\mathrm{kei}_n\,\beta)^2\right] - \tag{51/2}$$
$$- \mathrm{ker}_n'\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta + \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta) -$$
$$- \mathrm{kei}_n'\,\beta\,(\mathrm{ber}_n\,\beta\,\mathrm{kei}_n\,\beta - \mathrm{bei}_n\,\beta\,\mathrm{ker}_n\,\beta)\Big\}.$$

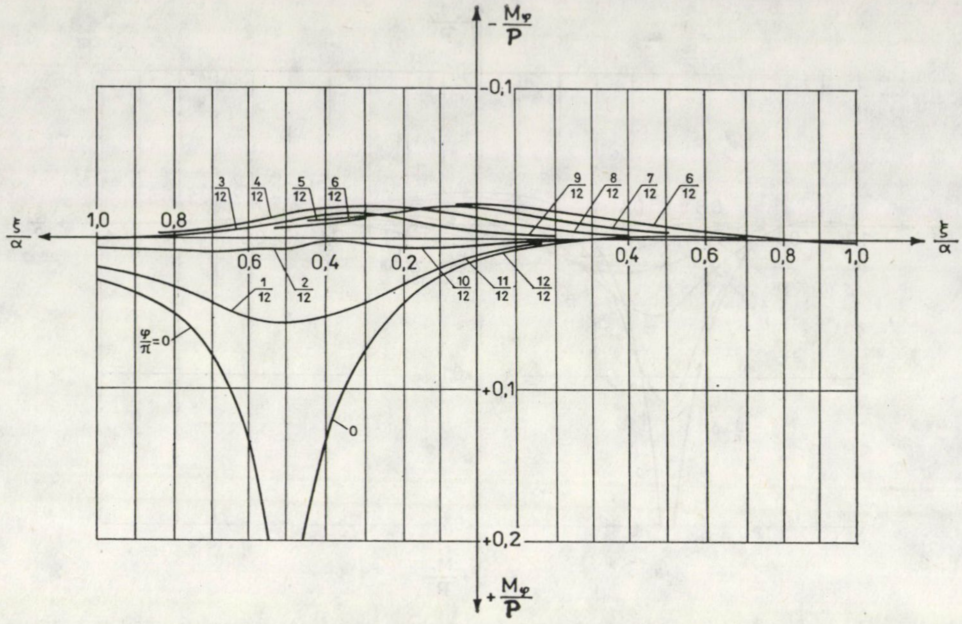


11. ábra. Negyedpontjában **P** koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez sugárirányú nyomatékainak (M_r) ábrái

Számpéldaként határozzuk meg annak a rugalmas ágyazású körlemeznek a lehajlásait és nyomatékait, amelyet negyedpontjában egy koncentrált **P** erő támad ($k = 1$; $\varepsilon = 0$; $\alpha = 4$; $\beta_1 = 2$; $\mu = 1/6$). A végeredményt a III. táblázatban adjuk közre. A statikai mennyiségek számításai során a Fourier-soroknak 28 tagját (max. $n = 28$) vettük figyelembe. A koncentrált erő támadáspontjában végtelen nagy sugárirányú (M_r) és érintőirányú (M_φ) nyomatékok ébrednek, ugyanakkor a táblázatban véges értékeket találunk. Ez annak az eredménye, hogy a végtelen trigonometrikus sornak csak véges számú tagját vettük figyelembe. A III. táblázat számértékei a többi pontban pontosaknak tekinthetők, mivel sorfejtéskor a számítógép megvizsgálta, hogy a következő kiszámított tag befolyásolja-e a kinyomtatásra kerülő utolsó számjegyet. Amennyiben már nem változtatta meg, akkor a gép leállt és további tagokat nem számolt.

Az alakváltozások érzékeltetése céljából megrajzoltuk a számított lemez lehajlási görbéit (10. ábra). Ez egyben a negyedpont lehajlási hatásfelülete, amelyet k_0-al szorozva (2) a talajreakció hatásfelületét kapjuk. Az ábrából látható, hogy a lemez egy csekély része felemelkedik. Ez a rugókon való felfekvés következménye, a valóságban azonban nem fordulhat elő. A gyakorlatban egyéb teherhatások (önsúly stb.) azt eredményezik, hogy negatív reakcióerőkkel nem kell számolni.

A 11., 12. és 13. ábrák a nyomatékok lefutását szemléltetik a különböző lemezátmérők mentén. A rugalmas ágyazás csillapító hatása a támadásponttól távolodva nagyon jól érzékelhető.



12. ábra. Negyedpontjában **P** koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez érintőirányú nyomatékainak (M_φ) ábrái

Amennyiben a szakaszosan ható vonalerők a lemez peremét támadják (14. ábra), az integrálási állandók meghatározására szolgáló képletek tovább egyszerűsödnek:

$$A_n = \frac{kl^2 \mathbf{P}}{\alpha K \pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \frac{c_4}{c_1 c_4 - c_2 c_3},$$

$$B_n = \frac{kl^2 \mathbf{P}}{\alpha K \pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \frac{c_3}{c_1 c_4 - c_2 c_3}. \tag{52}$$

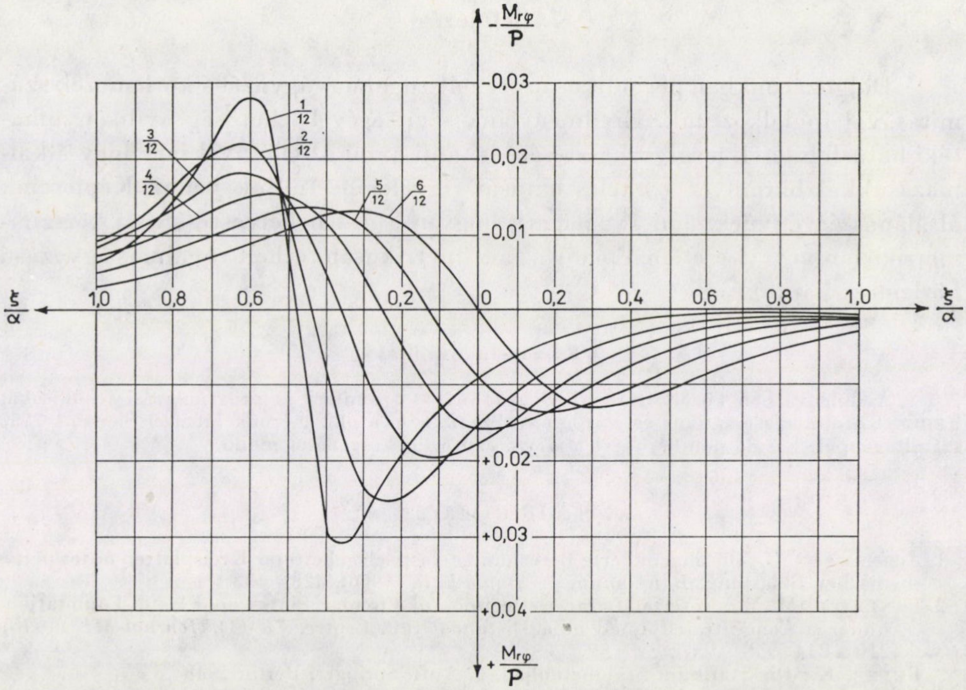
Itt

$$c_1 = \mathrm{bei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\mathrm{ber}'_n \alpha - \frac{\mathrm{ber}_n \alpha}{\alpha}\right),$$

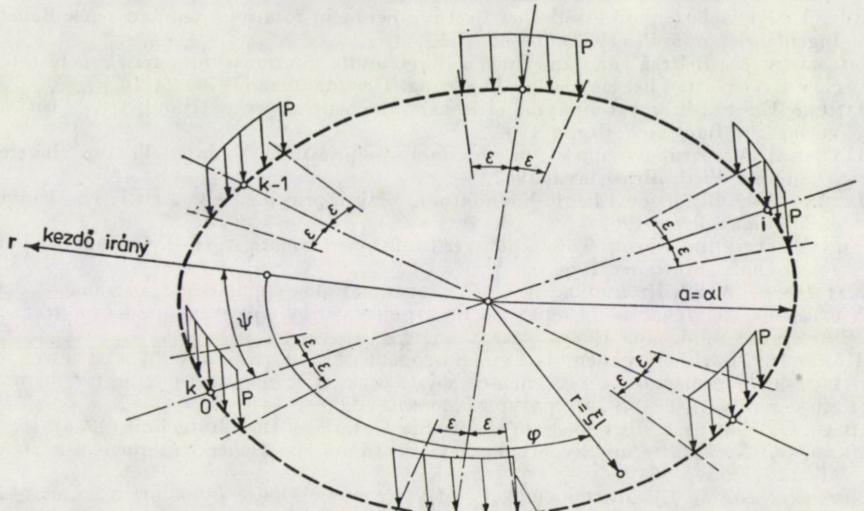
$$c_2 = \mathrm{ber}'_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\mathrm{bei}'_n \alpha - \frac{\mathrm{bei}_n \alpha}{\alpha}\right),$$

$$c_3 = \mathrm{bei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\mathrm{ber}'_n \alpha - \frac{n^2\, \mathrm{ber}_n \alpha}{\alpha}\right), \tag{53}$$

$$c_4 = \mathrm{ber}_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\mathrm{bei}'_n \alpha - \frac{n^2\, \mathrm{bei}_n \alpha}{\alpha}\right).$$



13. ábra. Negyedpontjában **P** koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez csavaró nyomatékainak ($M_{r\varphi}$) ábrái



14. ábra. Pereme mentén egyenletesen megoszló szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású kör alakú lemez

7. Befejezés

Dolgozatunkban periodikusan terhelt rugalmas ágyazású körlemezek számításával foglalkoztunk. Eredményeink segítségével lehetőség nyílik nyomatéki hatásfelületek megszerkesztésére is, ami azzal az előnnyel jár, hogy alkalmazásukkal bármilyen terhelés hatását figyelembe tudjuk venni. Képleteink általános érvényűek, ami azt jelenti, hogy $n = 0$-t behelyettesítve a körszimmetrikusan, $n = 1$ esetében pedig az antimetrikusan terhelt rugalmas ágyazású körlemezt kapjuk.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozatban közölt, numerikus példánál a számítási és programozási feladatokat FEHÉR Katalin matematikus és PAULERNÉ SZEILER Éva okl. mérnök látta el Siemens 7755 számítógéppel. Kiváló munkájukért a szerző ezúton is köszönetet mond.

IRODALOM

1. ACKERMANN, G.: Die angenäherte Berechnung elastisch gebetteter Kreisplatten unter periodischer Belastung. *Bauplanung — Bautechnik* (1966), 428—433
2. BANERJEE, M. M.: Note on Large Deflections of Circular Plates on Elastic Foundations under a Concentrated Load at a Distance from Centre. *IE* (1). *Journal-ME* (1976), 210—214
3. BEYER, K.: Die Statik im Stahlbetonbau, 2. Aufl. Springer, Berlin 1948
4. BERGFELDER, J.: Berechnung von Platten veränderlicher Steifigkeit nach dem Differenzenverfahren. *Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte.* Heft 4. Vulkan-Verlag, Dr. W. Classen Nachf. GmbH. & Co KG, Essen
5. DWIGHT, H. B.: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition. The Macmillan Company, New York, 1961
6. EIBL, J.: Kreisplatten auf elastischer Bettung bei nicht rotationssymmetrischer Belastung. *Ingenieur-Archiv* **43** (1973), 1—8
7. FRIEMANN, H.: Beitrag zur numerischen Berechnung rotationssymmetrisch belasteter dicker Kreisplatten bei elastischer Lagerung. Der Stahlbau (1974) 9—16
8. HAMPE, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke. Band 1. 3. Aufl. VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1968.
9. HANUSKA, A.: Kruhové dosky na pružnom polpriestore. Vydavatel's tvo slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1957.
10. HETÉNYI, M.: Beams on Elastic Foundation. Eighth printing. Ann Arbor: The University of Michigan Press 1967.
11. JAHNKE—EMEDE—LÖSCH: Tafeln höherer funktionen. Siebte Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1966.
12. (KALMANOK, A. S.), Калманок, А. С.: Расчет пластинок-справочное пособие. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительствым материалам, Москва 1959
13. (KORENJEV, B. G.): Коренев, Б. Г: Некоторосе задачи теории упруости и теплопроводности, решасмые в бесселевых функциях. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва 1960
14. LIKAR, O.: Platte mit Einzellast auf elastischer Unterlage. Die Bautechnik (1974), 160—169
15. LIKAR, O.: Kreisplatte mit hyperbolischem Profil auf elastischer Unterlage. Die Bautechnik (1975), 343—349
16. (LITWINENKO, W. I.): Литвиненко, В. И.: Железобеталные бункеры и силосы. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, Ленинград 1953
17. MÁRKUS Gy.: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964
18. MÁRKUS, Gy.: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest—Werner Verlag, Düsseldorf. 1967, 1976, 1978.

19. MÁRKUS, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung. Akadémiai Kiadó, Budapest. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Berlin (München) Düsseldorf 1973
20. (MÁRKUS, Gy.): Маркус, Д.: Круглые и кольцевые плиты при обратносимметричном загружении. Москва Стройиздат 1977
21. MÁRKUS, Gy.: Periodikusan terhelt kör- és körgyűrű alakú lemezek különös tekintettel az alapozásokra, MÉLYÉPTERV (1978) Kézirat.
22. MÁRKUS, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter periodischer Belastung. Akadémiai Kiadó. Budapest — Werner Verlag, Düsseldorf 1983
23. (NOSOWA, L. N.): Носова, Л. Н.: Таблицы функций Томсона и их производных. Издательство Академии Наук СССР. Москва 1960
24. PADUART, A.: Entwurf eines ringförmigen Fundamentträgers auf elastischer Unterlage. *ECE/EIB* 1 (1971), 30—38
25. OVECSKIN, A. M.: Kör alakú vasbeton medencék statikai számítása. Tankönyvkiadó, Budapest 1952
26. SCHIKORA, K.: Berechnung beliebig belasteter Kreisplatten mit veränderlicher Steifigkeit auf elastischem Halbraum. *Bauingenieur* **53** (1978), 391—394
27. RAUHAUS, D.: Tabellen zur Berechnung der Kreisplatte auf elastischer Unterlage mit zentralsymmetrischer Belastung. *Bauingenieur* 52 (1977), 387—392
28. SCHLEICHER, F.: Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Springer, Berlin 1926
29. SZILÁRD, R.: Theory and Analysis of Plates. Prenticehall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey 1974.
30. TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER: Theory of Plates and Shells. 2. Ed. Mc Graw-Hill Book Company. New York 1959
31. (WAJNBERG, D. W.—WAJNBERG, E. D.): Вайнберг, Д. В.—Вайнберг, Е. Д.: Пластины, диски, балки-стенки. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре УССР. Киев 1959

FÜGGELÉK

Az n-ed rendű Thomson-függvények sorai

$$\mathrm{ber}_n\, x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!} \cos \frac{n+2p}{4}\pi ,$$

$$\mathrm{ber}'_n\, x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}\,\frac{n+2p}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!} \cos \frac{n+2p}{4}\pi ,$$

$$\mathrm{ber}''_n\, x = -\,\mathrm{bei}_n\, x - \frac{\mathrm{ber}'_n\, x}{x} + \frac{n^2\,\mathrm{ber}_n\, x}{x^2} ,$$

$$\mathrm{ber}'''_n\, x = \frac{\mathrm{bei}_n\, x}{x} - \mathrm{bei}'_n\, x + \frac{2+n^2}{x^2}\,\mathrm{ber}'_n\, x - \frac{3\,n^2}{x^3}\,\mathrm{ber}_n\, x .$$

$$\mathrm{bei}_n\, x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!} \sin \frac{n+2p}{4}\pi ,$$

$$\mathrm{bei}'_n\, x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p+1}\,\frac{n+2p}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!} \sin \frac{n+2p}{4}\pi ,$$

$$\mathrm{bei}''_n\, x = \mathrm{ber}_n\, x - \frac{\mathrm{bei}'_n\, x}{x} + \frac{n^2\,\mathrm{bei}_n\, x}{n^2} ,$$

$$\mathrm{bei}'''_n\, x = -\frac{\mathrm{ber}_n\, x}{x} + \mathrm{ber}'_n\, x + \frac{2+n^2}{x^2}\,\mathrm{bei}'_n\, x - \frac{3\,n^2}{x^3}\,\mathrm{bei}_n\, x .$$

$$\mathrm{ker}_n\,x = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{bei}_n\,x - \ln\frac{\gamma x}{2}\,\mathrm{ber}_n\,x +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\cos\frac{n+2p}{4}\pi +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{n+2p}{4}\pi\,,$$

$$\mathrm{ker}'_n\,x = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{bei}'_n\,x - \ln\frac{\gamma x}{2}\,\mathrm{ber}'_n\,x - \frac{\mathrm{ber}_n\,x}{x} +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\cos\frac{n+2p}{4}\pi +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p}(n+2p)}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}\cos\frac{n+2p}{4}\pi\,,$$

$$\mathrm{ker}''_n\,x = -\mathrm{kei}_n\,x - \frac{\mathrm{ker}'_n\,x}{x} + \frac{n^2\,\mathrm{ker}_n\,x}{x^2}\,,$$

$$\mathrm{ker}'''_n\,x = \frac{\mathrm{kei}_n\,x}{x} - \mathrm{kei}'_n\,x + \frac{2+n^2}{x^2}\,\mathrm{ker}'_n\,x - \frac{3\,n^2}{x^3}\,\mathrm{ker}_n\,x\,.$$

$\ln\gamma = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 607$

(Euler—Mascheroni féle szám).

$$\mathrm{kei}_n\,x = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{ber}_n\,x - \ln\frac{\gamma x}{2}\,\mathrm{bei}_n\,x +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\sin\frac{n+2p}{4}\pi +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p+1}}{p!\,(n-p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}\sin\frac{n+2p}{4}\pi\,,$$

$$\mathrm{kei}'_n\,x = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{ber}'_n\,x - \ln\frac{\gamma x}{2}\,\mathrm{bei}'_n x - \frac{\mathrm{bei}_n\,x}{x} +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\sin\frac{n+2p}{4}\pi +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{n+p+1}}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}\sin\frac{n+2p}{4}\pi\,,$$

$$\mathrm{kei}''_n\,x = \mathrm{ker}_n\,x - \frac{\mathrm{kei}'_n\,x}{x} + \frac{n^2\,\mathrm{kei}_n\,x}{x^2}\,,$$

$$\mathrm{kei}'''_n\,x = -\frac{\mathrm{ker}_n\,x}{x} + \mathrm{ker}'_n x + \frac{2+n^2}{x^2}\,\mathrm{kei}'_n\,x - \frac{3n^2}{x^3}\,\mathrm{kei}_n\,x\,.$$

Az n-ed rendű Thomson-függvények közelítő értékei

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
$\mathrm{ber}_n\, x$	$\dfrac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}}\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2}\cos\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{bei}_n\, x$	$\dfrac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}}\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{(-1)^n}{n!}\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\sin\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2}\sin\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{ker}_n\, x$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$\dfrac{(-1)^n}{2}(n-2)!\left[(n-1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n}\cos\dfrac{n\pi}{4}-\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2-n}\cos\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{kei}_n\, x$	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$\dfrac{(-1)^n}{2}(n-2)!\left[(n-1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n}\sin\dfrac{n\pi}{4}-\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2-n}\sin\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{ber}'_n\, x$	$\dfrac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}}\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$\dfrac{(-1)^n}{2n!}\left[n\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}\cos\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{n+2}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+1}\cos\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{bei}'_n\, x$	$\dfrac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi x}}\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{(-1)^n}{2n!}\left[n\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n-1}\sin\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{n+2}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+1}\sin\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{ker}'_n\, x$	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{(-1)^n}{4}(n-2)!\left[n(n-1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n-1}\cos\dfrac{n\pi}{4}-(n-2)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1-n}\cos\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$
$\mathrm{kei}'_n\, x$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	$-\dfrac{(-1)^n}{4}(n-2)!\left[n(n-1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n-1}\sin\dfrac{n\pi}{4}-(n-2)\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1-n}\sin\dfrac{n+2}{4}\pi\right]$

Thomson-függvények közelítő értékei

n	$\mathrm{ber}_n\, x$	$\mathrm{bei}_n\, x$	$\mathrm{ber}'_n\, x$	$\mathrm{bei}'_n\, x$
0	1	$\frac{x^2}{4}$	$-\frac{x^3}{16}$	$\frac{x}{2}$
1	$-\frac{x}{2\sqrt{2}}$	$\frac{2}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
2	$\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2$	$\frac{2}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)$
3	$-\frac{1}{3!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^3$	$\frac{1}{3!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{1}{2\cdot 2!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2\cdot 2!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^2$
4	$-\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{1}{2\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{3}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5$
5	$\frac{1}{5!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^5$	$-\frac{1}{5!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^5$	$\frac{1}{2\cdot 4!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{2\cdot 4!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^4$
6	$-\frac{1}{7!}\left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{6!}\left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{4}{7!}\left(\frac{x}{2}\right)^7$	$\frac{1}{2\cdot 5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5$
7	$-\frac{1}{7!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^7$	$-\frac{1}{7!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^7$	$-\frac{1}{2\cdot 6!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{1}{2\cdot 6!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^6$
8	$\frac{1}{8!}\left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{9!}\left(\frac{x}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{2\cdot 7!}\left(\frac{x}{2}\right)^7$	$\frac{5}{9!}\left(\frac{x}{2}\right)^9$
9	$-\frac{1}{9!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^9$	$\frac{1}{9!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^9$	$-\frac{1}{2\cdot 8!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{2\cdot 8!\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^8$
10	$\frac{1}{11!}\left(\frac{x}{2}\right)^{12}$	$-\frac{1}{10!}\left(\frac{x}{2}\right)^{10}$	$\frac{6}{11!}\left(\frac{x}{2}\right)^{11}$	$-\frac{1}{2\cdot 9!}\left(\frac{x}{2}\right)^9$

x igen kicsi argumentumaira

$\mathrm{ker}_n\, x$	$\mathrm{kei}_n\, x$	$\mathrm{ker}'_n\, x$	$\mathrm{kei}'_n\, x$
$-\ln\frac{\gamma x}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{x}{2}\ln\frac{\gamma x}{2}$
$-\frac{1}{x\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{x\sqrt{2}}$	$\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}$	$-\frac{\pi}{16}x$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$
$-\frac{3!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}$	$3!\left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$
$\frac{4}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$\frac{4!}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$-\frac{5!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$-\frac{5!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$
$-\frac{4!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$-\frac{5!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$4!\left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$\frac{6!}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$
$-\frac{6!}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$	$\frac{6}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$	$\frac{7!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$-\frac{7!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$
$\frac{7!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$-\frac{6!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$-\frac{8!}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$\frac{3\cdot 6!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$
$-\frac{8!}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$-\frac{8!}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$\frac{9!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$	$\frac{9!}{4\sqrt{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$
$\frac{8!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$\frac{9!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$	$-2\cdot 8!\left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$-\frac{10!}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{-11}$

Összefüggések magasabb és alacsonyabb rendű Thomson-függvények között

$$\mathrm{ber}_{n+1}\, x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\mathrm{ber}_n\, x - \mathrm{bei}_n\, x) - \mathrm{ber}_{n-1}\, x\,,$$

$$\mathrm{ber}'_{n+1}\, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}_n\, x + \mathrm{bei}_n\, x) - \frac{n+1}{n}\mathrm{ber}_{n+1}\, x\,,$$

$$\mathrm{bei}_{n+1}\, x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\mathrm{ber}_n\, x + \mathrm{bei}_n\, x) - \mathrm{bei}_{n-1}\, x\,,$$

$$\mathrm{bei}'_{n+1}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ber}_n\, x - \mathrm{bei}_n\, x) - \frac{n+1}{x}\mathrm{bei}_{n+1}\, x\,,$$

$$\mathrm{ker}_{n+1}\, x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\mathrm{ker}_n\, x - \mathrm{kei}_n\, x) - \mathrm{ker}_{n-1}\, x\,,$$

$$\mathrm{ker}'_{n+1}\, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ker}_n\, x + \mathrm{kei}_n\, x) - \frac{n+1}{x}\mathrm{ker}_{n+1}\, x\,,$$

$$\mathrm{kei}_{n+1}\, x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\mathrm{ker}_n\, x + \mathrm{kei}_n\, x) - \mathrm{kei}_{n-1}\, x\,,$$

$$\mathrm{kei}'_{n+1}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{ker}_n\, x - \mathrm{kei}_n\, x) - \frac{n+1}{x}\mathrm{kei}_{n+1}\, x\,.$$

Circular Plates on Elastic Foundation Submitted to Periodic Load. — Thin isotropic circular plates of constant thickness on an elastic Foundation, submitted to periodic load, are dealt with. The theory presented permits to analytically determine the deformations and stresses induced by such loads, applied along a circular arc, whose Fourier-series is familiar.

Elastisch gebettete Kreisplatten mit periodischer Belastung. — Behandelt werden periodisch belastete elastisch gebettete, dünne, isotrope Kreisplatten konstanter Dicke. Mit Hilfe der vorgeführten Theorie können alle Verformungen und Beanspruchungen ermittelt werden, die durch eines Kreisbogens entlang angewandten Belastungen hervorgerufen worden sind, deren Fouriersche Reihe bekannt ist.