

„TESZGA” VÉGESELEMES PROGRAMRENDSZER TENGELYSZIMMETRIKUS GEOMETRIÁJÚ ÉS ALAKVÁLTOZÁSÚ SZERKEZETEK SZILÁRDSÁGTANI SZÁMÍTÁSÁRA

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. július 9-én]

A tanulmány röviden ismerteti a programrendszer felépítését, a végeselemes modellezéshez felhasználható 11 féle vékonyfalú héjelemet, izoparametrikus gyűrűalakú elemet, gyűrűt (mint görbe tartót), rugóelemet tartalmazó elemkönyvtárat. Kitér az elmozdulásmezőben fennálló szakadás figyelembevételének számítástechnikai kezelésére, továbbá számpéldákat mutat be vékonyfalú héjelemekből felépített szerkezetek szilárdságtani számítására.

I. Bevezetés

A szerkezetek szilárdságtani számítására alkalmas effektív számítógépi program kifejlesztéséhez a tudományok három ágának

- a szerkezetek szilárdságtanának,
- a numerikus módszereknek,
- a számítógép alkalmazásának

ismerete szükséges. A számítógép sikeres alkalmazása a szerkezetek szilárdságtanának olyan tárgyalását követeli meg, amely a számítógép nyelvére könnyen lefordítható modellekkel dolgozik. Egy ilyen, a mérnöki szemlélethez is jól igazodó szilárdságtani modellt szolgáltat az ún. végeselemes módszer [1]. A TESZGA a potenciális energia minimuma elvre alapozott ún. kompatibilis elmozdulási elemmodellekkel dolgozó programrendszert jelöl [2], melynek létrehozásánál felhasználtuk a SAP IV programrendszer [3] strukturális felépítettségét. A programrendszer felépítéséhez az alábbi szempontokat vettük figyelembe:

A programrendszer a számítási fázis több pontjából legyen indítható; a bemenő adatokkal kapcsolatosan minél több, a számítás biztonságát növelő, számítógép által végrehajtott ellenőrzés álljon fenn; a programrendszer kívánóság szerint csak adatellenőrzést hajtson végre, illetve az adatellenőrzést hibamentes esetben futás kövesse; az elemkönyvtár bővíthető legyen; egyszeri futtatással a szerkezet többfajta terhelés alatti viselkedése nyomonkövethető

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III. 3.

legyen, a terhelések súlyozva szuperponálhatók legyenek; egyszerű geometriájú (meridiánú) elemek esetében az elemekre való osztás automatizált legyen; a héjszerkezet anyagállandóinak hőmérséklettől való függését a program képes legyen figyelembevenni; adott elmozdulások, elmozdulásmezőben fennálló szakadás, ferde görgős támasz figyelembevételére is nyíljék lehetőség.

2. A számítható szerkezet geometriája, geometriai perem- és illesztési feltételek

A vizsgálható szerkezeteket két nagy osztályba soroljuk. Az egyik osztályt zömében vékonyfalú szerkezeti elemek alkotják, és így ezt röviden héjszerkezetnek nevezzük, míg a másik osztály tetszőleges kialakítású forgástestekből áll.

A h é j s z e r k e z e t héjakból, rugókból, gyűrűalakú tartókból és rugalmas közezből áll. Ezek modellezésére a technikai héjelmélet hipotéziseivel dolgozó 11 fajta héjelemet, 3 féle rugóelemet, görbe tartót, illetve Winkler-típusú rugalmas közeget használhatunk.

A forgástestekből felépített rugalmas rendszert ún. izoparametrikus gyűrűalakú elemekkel modellezzük.

A vizsgált szerkezet olyan végeeselemes modellezése is megengedett, amikor a feszültségállapot pontosítása céljából a vékonyfalúnak tekintett szerkezet héjainak csatlakozási (illesztési) helyeit, illetve azok környezetét izoparametrikus gyűrűelemekkel modellezzük, míg a többi részt héjelemekkel.

A héjak *egyszeresen* és *kétszeresen görbültek* lehetnek.

Egyszeresen görbültek a kúp és henger (ide soroljuk a hajlított lemezt és tárcsát is). Kétszeresen görbültek a

1. tóruszalakú (gömb) héjak,
2. kúpszeletek egyenletével megadott meridiánú héjak (kivéve gömb),
3. tetszőleges meridiánú héjak, amelyeket $N_t \geq 3$ számú ponton átmenő C^1 osztályú folytonosságú $r = r(Z)$, vagy $Z = Z(r)$ függvénykapcsolattal leírt meridiánú héjelemek összességével fedünk le.

A tetszőleges meridiánú héjak meridián görbét tehát köbös polinom segítségével közelítjük. A közelítésükre használt héjelemeket általános $r(Z)$, vagy általános $Z(r)$ típusú héjelemeknek nevezzük. A tetszőleges héjak száma T ($t = 1, \dots, T$), Z — a forgástengelyirányú koordináta, r — a héj paralel sugara.

Az 1) és 2) sorszám alatt felsorolt héjakat típus számokkal látjuk el. Egy-egy típus szám egy meghatározott geometriájú forgásfelületet jelöl ki. A modellezésnél felvett héjelemek ezeken a felületeken helyezkednek el, de nem kötelesek lefedni azt teljesen.

A héjszerkezetben szereplő héjak falát

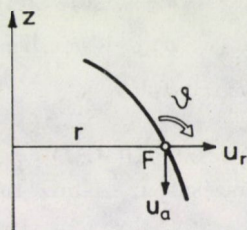
1. állandó vastagságú, egyrétegű;
2. állandó vastagságú, középfelületre szimmetrikusan elhelyezkedő háromrétegű;
3. lineárisan változó falvastagságú egyrétegű héjelemekkel tudjuk modellezni.

A héjszerkezet végeselemes modellezésével nyert végeselemeket kijelölő csomóköröknél, csomókörökként tetszőleges variációban le lehet kötni (zérus, vagy attól eltérő értékkel) a radiális- és az axiális elmozdulást, valamint a szögelfordulást, illetve tetszőleges ferdehatásvonalú görgős támaszt is fel lehet venni.

A kötöttségeket a számítógép az $ID(I, J)$ ($I = 1, 2, \dots, \text{NUMNP}$) ($J = 1, 2, 3$) tömbben tárolja, ahol NUMNP — a feladathoz tartozó csomókörök száma. Amennyiben az N -edik csomókör J -edik általánosított elmozduláskoordinátája tetszőleges, úgy $ID(N, J) = 0$, amennyiben az elmozduláskoordináta előírt (kötött) (zérus értékű is lehet), úgy $ID(N, J) = 1$.

A programrendszer a szerkezeti elemek közötti kapcsolatot kétoldalúnak tekinti (az elemek alakváltozás előtt párbaállított pontjai — csatolandó pontjai — az alakváltozás után a tér azonos pontjában helyezkednek el).

Az elemek csatolásánál kitüntetett szerepe van az ún. *főcsomókör*nek, vagyis annak a csomókörnek, amelyben szereplő elmozdulások és szögelfordulások a végső algebrai egyenletrendszerben ismeretlenként fognak szerepelni. Jelölje $\mathbf{q}_F = [u_r, u_a, \vartheta]_F$ — az F csomókör általánosított elmozdulásvektorát (1. ábra).

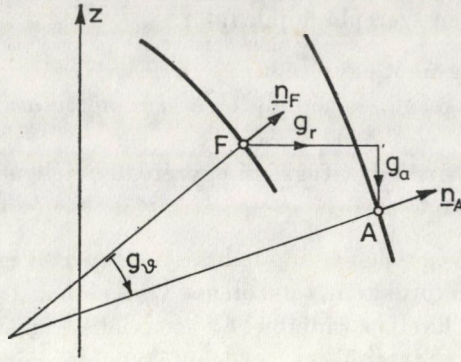


1. ábra

Amennyiben a szerkezet végeselemes modellezésével nyert F és A jelű csomókörök elmozdulásai között

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{q}_F - \mathbf{g}_{FA} \quad (2.1)$$

összefüggés áll fenn, ahol $\mathbf{g}_{FA} = [g_r, g_a, g_\vartheta] =$ (radiális, axiális szögelfordulásbeli hézag), akkor az F és A csomókörök ún. *kontakt párt* alkotnak (2. ábra).



2. ábra

A $g_{FA} = 0$ esetében nincs szükség a kontakt pár képzésére.

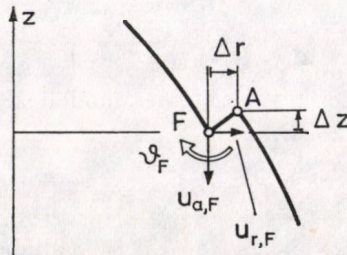
Kontakt párok az *elmozdulásmezőben és szögelfordulásmezőben fennálló szakadást* (pl. túlfedést) vannak hivatva kezelni. Ehhez egyrészt az F és A csomópörök kijelölésére, illetve az ID tömb megfelelő betöltésére van szükség.

Az ID tömb A -edik csomópörre akkor *alcsomópör*, ha legalább egy db koordinátája -1 -et tartalmaz, azaz $ID(A, J) = -1$, ha a J -edik koordináta a (2.1) összefüggés alapján alá van rendelve a főcsomópörbeli elmozdulásnak.

Excentrikus csatlakozásról beszélünk akkor, ha az A jelű csomópör és az F jelű csomópör közötti távolság az alakváltozás folyamán változatlan marad. Ily módon az F és A jelű csomópörök elmozdulásai között fennállnak (3. ábra) az

$$\begin{aligned} u_{r,A} &= u_{r,F} + \vartheta_F \Delta Z, \\ u_{a,A} &= u_{a,F} + \vartheta_F \Delta r, \\ \vartheta_A &= \vartheta_F \end{aligned} \quad (2.2)$$

összefüggések. Ismételten egyrészt $ID(A, J) = -1$, ($J = 1, 2, 3$) kötöttségi szám megadásával élünk, másrészt az A -hoz tartozó F főcsomópört lerög-zítjük.



3. ábra

Az ID tömb zérus koordinátáit növekvő sorrendben egytől kezdődő pozitív egészszámokkal kicserélve olyan információkhoz jutunk, amelyek alapján könnyen tisztázhatóvá válik az, hogy az egyes csomóköron levő ismeretlen általánosított koordináták az összes ismeretlen belül hanyadikak. Ezáltal a különböző szabadságfokú elemek a különböző szabadságfokú csomókörok esetén is könnyen illeszthetővé válnak.

További előny, hogy a potenciális energia minimuma elvből nyert algebrai egyenletrendszer mátrixán semmiféle átalakítást nem kell végrehajtani, mivel a kinematikai peremfeltételt, az elmozdulásmezőbeli szakadást stb. elemek szintjén figyelembe vettük, és így az egyenletrendszer mátrixának mérete az ID tömb átszámozásával megállapított ismeretlen elmozdulás koordináták számával fog megegyezni.

3. A rugalmas szerkezet anyaga

A rugalmas szerkezetet alkotó elemek, elemenként homogén, izotrop vagy anizotrop anyagúak lehetnek.

Az anyagállandók hőmérséklettől való függése esetében diszkrét hőmérséklet-értékhez tartozó anyagállandók ismeretében anyagállandók táblázata állítható elő. A számítógép az elem átlagos hőmérsékletéhez a megfelelő anyagállandó értékeket az említett táblázatból lineáris interpolációval veszi ki. A számítóprogramrendszer a szerkezetben kialakuló hőmérsékleteloszlást ismertnek tételezi fel. Ezek a bemenő adatok egyrészét képezik.

4. Terheléssel, falvastagsággal (rétegvastagsággal), anyagállandókkal stb. kapcsolatos típusosztályok

Az adatok előkészítését nagymértékben megkönnyíti és áttekinthetőbbé teszi, ha a terheléseket, falvastagságot stb. típusosztályokba soroljuk. Ezeket előzetesen beolvasva, az elemeknél már csak a típusszám megadása válik szükségessé.

A nyomási terhelési típust három szám jellemzi

$$p_0, \gamma^p, Z_p,$$

ahol p_0 a Z_p magasságban levő nyomás értéke, γ^p a folyadék fajsúlya. Így a nyomás tetszőleges Z helyen

$$p = p_0 + \gamma^p(Z_p - Z). \quad (4.1)$$

Hasonló a helyzet az axiális irányú gyorsulásnál is.

A rugalmas Winkler-típusú közeg rugóállandóját, a falvastagságot (rétegvastagságot) egyetlen egy szám jellemzi.

A tóruszalakú héjelemeket 5 db állandó (a középpont helykoordinátái, a meridián görbületi sugara, a kezdő- és végszögek), míg a kúpszelet meridiánú héjakat az a , b , c állandók jellemzik. Ekkor

$$r(Z) = \sqrt{aZ^2 + bZ + c} \quad (4.2)$$

a héj paralel sugara.

Az anyag típusát a hőmérsékleti pontok száma, tömegsűrűsége és hőmérsékletenként az E rugalmassági tényezők, ν — Poisson-féle állandók és fajlagos hőtágulási együtthatók összessége jellemzi.

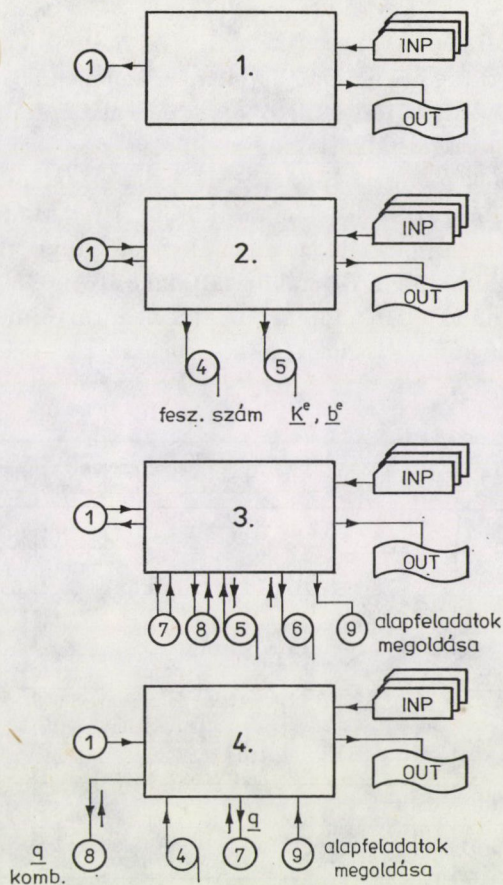
5. A programrendszer struktúrája

A Bevezetésben jelzett kívánalmaknak eleget tevő szilárdsági számításra alkalmas programrendszer négy részből épül fel (4. ábra).

Az *első rész* a csomókörök helykoordinátáinak, az ott fellépő elmozdulások kötöttségének, illetve a hőmérsékletnek a beolvasását, a zérustól különböző elmozdulások helyét és nagyságát, a ferdehatásvonalú görgős támasz helyét és irányszögét, az elmozdulásmezőben fennálló szakadások figyelembevételéhez szükséges ún. kontakt csomókörpárokat, az excentrikusan kapcsolódó elemek esetében a fő- és alsomóköröket, a tóruszalakú héj, illetve a kúpszeletek egyenletével megadott meridiánú héjtípusok megadásához szükséges adatokat, a rugalmas Winkler-típusú közegek állandóit, a rugalmas szerkezet forgási szögsebességét, illetve a különböző típusú elemek számát, a generális adatok beolvasását és azok ellenőrzését végzi el, végezetül a második rész futásához szükséges adatokat az 1 jelű file-ra írja ki. Az adatösszeállításban fellépő hibákat a gép kijelzi, továbbá lehetőség van a csomóköri helykoordináták megadásának automatizálására is, illetve az automatizálással beállított kötöttségek módosítására.

A *második rész* az 1 jelű file-ról történő visszaolvasás után az elemtípusokhoz tartozó általános adatokat olvassa be (pl. anyagállandók, terhelési típusok stb.) az input file-ról, majd elemcsoportonként előállítja az elemek merevségi mátrixát, terhelési vektorát, azokat az 5. háttérre írja, illetve a negyedik részben majdan számításra kerülő feszültségállapot meghatározására is háttérre ír. Egyidejűleg négyfajta nyomási-, kétfajta forgástengely-irányú gyorsulásból, forgásból, hőterhelésből, illetve kinematikai előírásokból származó terhelést vehet figyelembe a program elemenként. Ennek a résznek a biztonságos futását is számos adatellenőrzés segíti elő.

A *harmadik rész* az 1. file-ról történő visszaolvasás után a csomókörök mentén ható koncentrált terhelés beolvasását, az egyenletrendszer összeállítá-



4. ábra

sát és megoldását [4] végzi el, illetve az eredményeket a 9., a későbbiekben szükséges memória területeket az 1. háttérre írja a negyedik programrész számára.

A *negyedik rész* az algebrai egyenletrendszer megoldásának ismeretében, a felhasználó előírása szerint súlyozva összegzi a második és harmadik programban definiált alapeladatok megoldásait, vagyis előllítja a kombinált feladatokat, az eredményeket csomókörönként kúrija, majd elemcsoportonként meghatározza az elemek feszültségi állapotát a felhasználó által definiált pontokban (metszetekben). A negyedik program további kombinált feladatok elvégzése céljából újból indítható.

A fentiek alapján a TESZGA programrendszer háttérigényét a 4. ábra szemlélteti. Nagyméretű feladatoknál a 4–6 file-ok mágnesszalagot jelentenek.

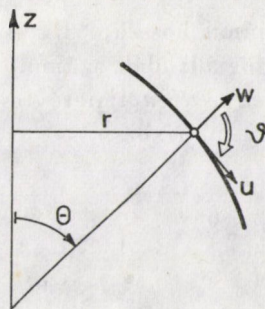
6. Elemkönyvtár

Az elemkönyvtárat vékonyfalú héjelemek, izoparametrikus gyűrűelemek, gyűrűelemek, gyűrű mint görbe tartó és axiális és radiális húzott-nyomott rugók, illetve torziós rugók alkotják.

6.1. A héjelemek geometriájuk és a héj falának felépítése szerint 11 féle típusba soroltak (5. ábra). A héjelemhez kötött helyi koordináta-rendszerben csomópörönként az u tangenciális, w normális elmozdulás és ϑ szögelfordulás-értékei szolgáltatják a csomópöröri általánosított elmozdulásvektor elemeit (6. ábra). Így, ha az elem a forgástengelyt nem tartalmazza, az elem minimális szabadságfoka hat lesz, ellentétes esetben az $r = 0$ helyen levő globál-

Meridián		Min. szabadságfok	Falvastagság	Elem altípus száma
lemez-tárcsa		4	állandó változó	1 4
kúp		4	állandó változó	2 5
henger		6	állandó változó	3 6
csomkakúp (körgyűrű)		6	állandó változó	7
tórusz (gömb)		4 6	állandó változó	8
kúpszelet		6	állandó változó	9
általános $r = r(Z)$		6	állandó változó	10
általános $Z = Z(r)$		6	állandó változó	11

5. ábra



6. ábra

rendszerbeli u , radiális elmozdulás és ϑ szögelfordulás zérus értéke miatt csak négy. Ezt az elemet szinguláris elemnek nevezzük.

Az 1–8. típusú elemeknél a héjelem középfelületének elmozdulásmezőjét az elem valamelyik elsőnek tekintett csomópontjától mért s ívkoordináta függvényében

$$\tilde{\mathbf{u}}^e(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \end{bmatrix}^e = \Phi^e(s) \mathbf{a}^e + \tilde{\Phi}^e(s) \tilde{\mathbf{a}}^e \quad (6.1)$$

alakban közelítjük, ahol $\Phi^e(s)$, $\tilde{\Phi}^e(s)$ alapfüggvénymátrixok, \mathbf{a}^e az elem minimális szabadságfokával azonos számú állandókat tartalmazó vektor, $\tilde{\mathbf{a}}^e$ pótlólagos állandók vektora [5].

Az alapfüggvénymátrixok egyszerűen görbült elemek esetében szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} -\operatorname{tg} \Theta & s & 0 & 0 \\ 1 & 0 & s^2 & s^3 \end{bmatrix}^e, \quad (6.2)$$

nem szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}^e, \quad (6.3)$$

míg a magasabbrendű közelítés érdekében használt $\tilde{\mathbf{a}}^e$ állandókhöz tartozó $\tilde{\Phi}^e(s)$ mátrixszal az u mező esetében $\text{NPU}+1$ -ed fokú, w mezőnél $\text{NPW}+3$ -ad fokú teljes polinommal történő közelítés biztosítható [6]

$$\tilde{\Phi}^e(s) = \begin{bmatrix} \dots & s^{n+1}/S^{n+1} & \dots & \mathbf{O}^T \\ \underbrace{\mathbf{O}^T}_{\text{NPU}} & \dots & \underbrace{s^{k+3}/S^{k+3} \dots}_{\text{NPW}} \end{bmatrix}^e \quad (6.4)$$

ahol S — a héjelem meridiánjának hossza, NPU és NPW az u és w mezők közelítésénél használatos pótlólagos állandók száma.

Kétszeresen görbüli elemek esetében a merevtestszerű elmozdulást pontosan figyelembe vevő alapfüggvény-mátrixok szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & s^2 & -\cos \Theta \end{bmatrix}^e, \quad (6.5)$$

nem szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & -\cos \Theta \end{bmatrix}^e. \quad (6.6)$$

A $\tilde{\Phi}^e(s)$ a (6.4) analógiája alapján könnyen felépíthető. A 10. és 11. típusú héjak esetében az approximáció lényegében ugyanaz, csak s helyett \tilde{Z} , illetve \tilde{r} írandó. Itt $\tilde{Z} = Z - Z_{\text{kezd}}$ ($\tilde{Z} \leftrightarrow \tilde{r}$), ($Z \leftrightarrow r$).

Az 1–8. típusú héjelemek esetében a K^e merevségi mátrix és a b^e terhelési vektor előállításához a számítási algoritmus egyszerűsítése céljából az a^e vektor a helyi koordinátarendszerben értelmezett q^e csomókörü általánosított elmozdulásvektoron keresztül nyert kifejezést. Ekkor a (6.1) helyett formailag

$$\tilde{u}^e(v) = \bar{A}^e(v) q^e + \tilde{A}^e(v) \tilde{a}^e \quad (6.7)$$

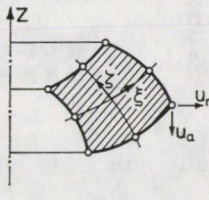
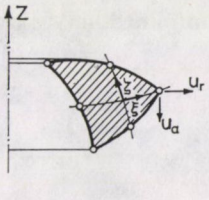
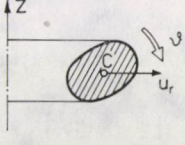
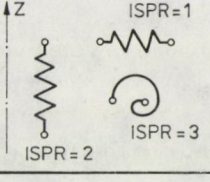
írható, ahol $\bar{A}^e(v)$, $\tilde{A}^e(v)$ approximációs mátrixok, $v \equiv s$.

A feszültségek meghatározására a módszer az összes héjelem típusnál a (6.7) alatti approximációra támaszkodik [6].

6.2. Izoparametrikus gyűrűelemek az irodalomból jól ismert elvek alapján épülnek fel [1] (7. ábra). A számítóprogram felépítése lehetővé teszi, hogy excentrikus csatlakozás megadás segítségével az izoparametrikus elemet vékonyfalú héjelemhez csatoljuk, továbbá hasonlóan mint a héj és rugó elemeknél az elmozdulásmezőben fennálló szakadást (pl. túlfedés, csavarok előfeszítése) figyelembe vegyük, adott elmozdulást, ferdehatásvonalú görgős támaszt pontosan kezeljünk.

A felsoroltak alapján lehetőség van a héjak csatlakozásánál (zavarásánál) a feszültségállapot pontosabb meghatározására (a csatlakozás közvetlen környezetét izoparametrikus elemekkel, míg a távolabbi részeket vékonyfalú elemekkel modellezzük), továbbá számíthatóvá válnak a bonyolult kialakítású szerkezeti elemek közötti túlfedésből, szerelési pontatlanságból származó feszültségek.

6.3. Gyűrűelem (mint görbetartó)-ként kis magasságú bordák, karikák modellezése oldható meg. A gyűrűben a radiális irányú elmozdulásból és a keresztmetszet merevtestszerű elfordulásából származik alakváltozási energia, így az elem szabadságfoka kettő (7. ábra).

		Szabad- sádfok
Izoparametrikus gyűrűelemek		16
		12
Gyűrű, mint görbétartó		2
Rugó elemek		2

7. ábra

6.4. Rugóelemek az elemkönyvtár legegyszerűbb elemei (7. ábra). A tengelyirányú rugóelemeket használhatjuk csavarok, hőcserélők csőkötegeinek stb. modellezésére. Hőterhelés itt is felléphet, az elemek excentrikus csatlakozása megengedett.

6.5. Általános megjegyzések. A héjelemek közül az 1–3. típusúaknál a \mathbf{K}^e merevségi mátrixot, \mathbf{b}^e terhelési vektort zárt alakban állítjuk elő, míg a megmaradóknál Gauss-féle numerikus integrálással. Általában a \mathbf{K}^e és \mathbf{b}^e -t először a lokális koordinátarendszerben, majd transzformálás után a globális rendszerben állítjuk elő. Amennyiben

1. az elem kontakt alcsomókört tartalmaz;
2. az elem excentrikusan csatlakozik;

3. az elem valamelyik csomóköreán adott az elmozdulás valamelyik koordinátája;
4. az elemhez ferdehatásvonalú görgős támasz csatlakozik, további transzformációk végrehajtására kerül sor a felsorolt sorrendben.

7. Az elmozdulás-, szögelfordulás mezőben fennálló szakadás figyelembevétele

Jelölje az e jelű elem alsomóköreihez tartozó általánosított elmozdulásvektort \mathbf{q}_A^e , míg a főcsomókörbelieket \mathbf{q}_F , továbbá az elem megmaradó elmozdulásvektorát \mathbf{q}_m^e . A (2.1) alapján formálisan azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{q}_A^e = \mathbf{q}_F + \mathbf{g}_{FA}, \quad (7.1)$$

ahol \mathbf{g}_{FA} — a főcsomókörtől az alsomókörhöz mutató kezdeti hézagokból összeállított vektor.

Felírva az e jelű elem potenciális energiáját, azaz a

$$\Pi^e = \Pi^e(\mathbf{q}_A^e, \mathbf{q}_m^e) = 1/2 [\mathbf{q}_A^{e,T}, \mathbf{q}_m^{e,T}] \left(\mathbf{K}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^e \\ \mathbf{b}_m^e \end{bmatrix} \right),$$

összefüggést, majd azt (7.1) figyelembevételével átalakítva, a minimalizálás szempontjából lényegtelen \mathbf{g}_{FA} -ból származó tagot elhanyagolva

$$\Pi^e = \Pi^e(\mathbf{q}_F, \mathbf{q}_m^e) - [\mathbf{q}_F^T, \mathbf{q}_m^{e,T}] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^e \\ \mathbf{K}_{Am}^e \end{bmatrix} \mathbf{g}_{FA} \quad (7.2)$$

kifejezéshez jutunk. Ily módon a módosított terhelési vektor

$$\mathbf{b}_{\text{mód}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^e \\ \mathbf{b}_m^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^e \\ \mathbf{K}_{Am}^e \end{bmatrix} \mathbf{g}_{FA}. \quad (7.3)$$

Az eredményekből látható, hogy az elem potenciális energiája a főcsomókörbeli és a megmaradó általánosított elmozdulásokon keresztül nyer kifejezést, de úgy, hogy az alsomókörhöz tartozó általánosított elmozdulásvektornak megfelelő merevségi mátrix oszlopok \mathbf{g}_{FA} szakadás értékkel vett szorzatát az eredeti redukált terhelési vektorhoz hozzá kell adni. Számítástechnikailag a (7.3) alatti módosítást az elemhez kapcsolódó számításoknál végezzük el. Mivel a szerkezet szilárdságtani viszonyait egy futással — többfajta terheléssel — kívánjuk általában tisztázni, a terhelésekből származó állapotok szuperponálhatósága miatt, a \mathbf{g}_{FA} -hoz tartozó kinematikai terhelést az egyenletrend-

szer jobboldalán külön kell szerepeltetni. Így a különböző terhelésekhez tartozó állapot a kinematikai terhelés nélküli és a kinematikai terhelés által kapott állapotok összegeként áll elő.

8. Adott elmozdulás, excentrikus csatlakozás, ferdehatásvonalú görgős támasz figyelembevétele

8.1. A zérustól eltérő adott elmozdulást az elem szintjén, a merevségi mátrix adott elmozdulás koordinátához tartozó oszlopának megszorzásával előálló vektor mínusz egyszerezésének a terhelési vektorhoz történő hozzáadásával (vagy külön terhelési vektorként való szerepeltetésével) vesszük figyelembe.

8.2. Excentrikus csatlakozás esetében csomókörönként a (2.2) alapján összeállított transzformációs mátrixszal az alcsomókörök elmozdulása a főcsomókörbelivel nyer kifejezést.

Ennek felhasználásával az elem potenciális energiája is a főcsomókörbeli elmozdulásokkal kifejezhető. Ez a merevségi mátrix és a terhelési vektor transzformálását jelenti.

8.3. Ferde hatásvonalú görgős támasznál a globális rendszerbeli elmozdulást a görgő elmozdulásának irányába eső elmozdulással fejezzük ki. Az így előállított transzformációs mátrix segítségével formálisan a 8.2. pont alatti szorzások elvégzése válik szükségessé.

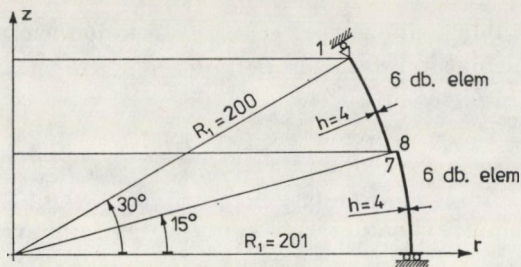
9. Néhány számpélda

A programrendszerrel megoldott feladatok közül ragadjunk ki két feladatot:

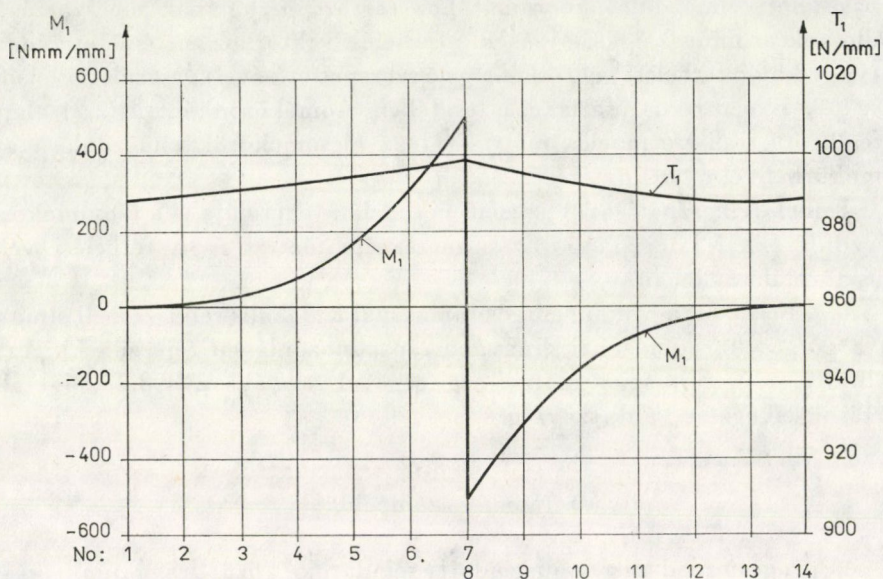
9.1. Vizsgáljuk a 8. ábrán vázolt mérethibával rendelkező gömböt. Hiba az R görbületi sugárban beálló szakadásból adódik (gyártási pontatlanság). Ezt a hibát excentrikus csatlakozással tudjuk modellezni. A p belső nyomásnál ébredő T_1 , M_1 meridiánirányú belső erő és nyomaték ívhossz menti változását a 9. ábra tünteti fel. (Anyagállandók: $E = 2,05 \cdot 10^5$ N/mm²; $\nu = 0,3$) Amíg a Huber—Mises—Henky szerint számított redukált feszültség alakhiba nélküli esetben $\sigma_{red}^+ = 250$ N/mm², addig az excentrikus csatlakozás fő- és alcsomókörénél a $+$ (külső) és $-$ (belső) felületen az (i) jelű csomókörnél $\sigma_{red}^+(7) = \sigma_{red}^-(8) = 390$ N/mm²; $\sigma_{red}^-(7) = \sigma_{red}^+(8) = 172$ N/mm² nagyságú feszültségek lépnek fel. Vagyis a görbületi sugár változásának 0,5%-os értéke a σ_{red} feszültségnél $390/250 \cdot 100 = 156\%$ -os változást okoz.

A bemutatott egyszerű példa is jól mutatja, hogy a szerkezetek geometriájának pontos modellezése — a feszültségállapot megbízható számítása szempontjából — nagyon fontos. A felvett gömbelemnél a $\Delta\theta$ szögváltozás $2,5^\circ$, és így $NPU = 1$, $NPW = 2$ számú pótlólagos állandó felvétele az elemek közötti elmozdulásmező folytonosságán túl az $R_1 = 200$ és $R_2 = 201$ mm-es gömbökön a feszültségi tenzormező folytonosságát jól biztosítják. Kevesebb állandó már nem szolgáltatja a szükséges folytonosságot, míg a pótlólagos állandók számának emelése az elem kis ívhossza miatt beálló merevségi mátrix rossz kondicionáltsága következtében — a megoldást pontatlanná teszi. Annak illusztrálására, hogy a pótlólagos állandók felvételének a nagyméretű elemeknél van értelme, vegyük a következő példát.

9.2. Vizsgáljuk a 10. ábrán található geometriájú és 7 db elemmel modellezett szerkezetet. (Anyagállandók: $E = 2,1 \cdot 10^5$ N/mm²; $\nu = 0,3$.) Mindegyik elemnél $NPU = NPW = 5$. Az elemek határán a csomóköröknél meghatározott redukált feszültségbeli szakadások maxi-



8. ábra



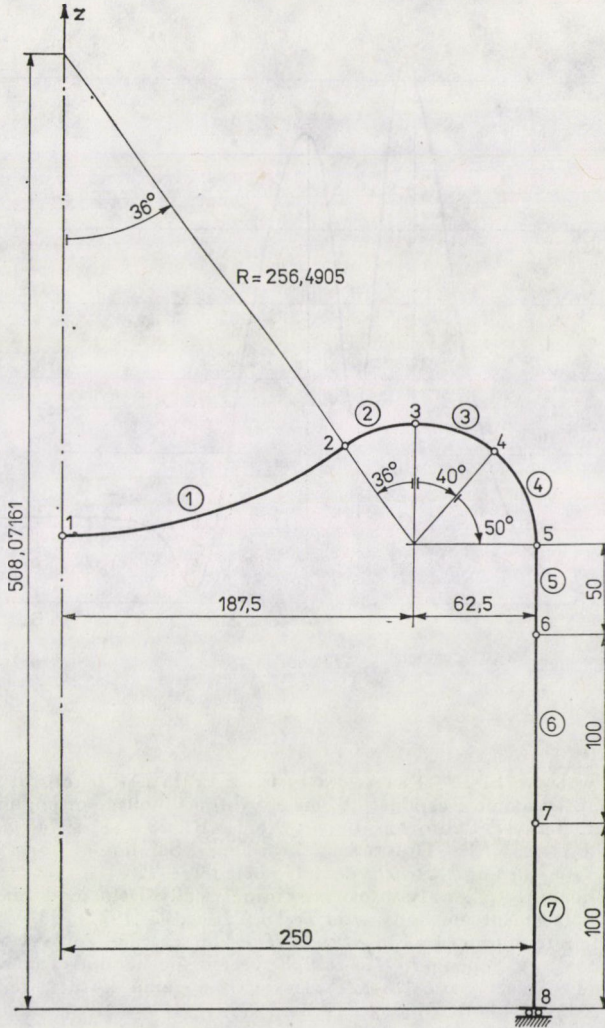
9. ábra

mumát a 2-es csomópörnél a tartály belső felületén tapasztaljuk, aminek értéke az 1%-ot sem éri el. A kapott megoldást pontosnak vehetjük. Ugyanezen feladatot elemsűrítéssel, illetve kisméretű elemeknél ($\Delta\theta = 10^\circ$) a pótlólagos állandók számának csökkentésével is megoldva a kapott megoldások a bemutatott, modellezéssel gyakorlatilag azonosak voltak. A tartályfenék belső felületén ébredő redukált feszültség változását a 11. ábra tünteti fel.

10. Néhány megjegyzés

A TESZGA programrendszert az OMFB támogatásával a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszéke az MTA SZTAKI CDC-3300-as számítógépre dolgozta ki.

A programrendszer bármilyen intézmény, vállalat rendelkezésére áll, azt gépidő bérlésével használhatja. A TESZGA-val kapcsolatos részletesebb információk, a beolvasási utasítások, számos mintapélda kapcsán kapott számítási tapasztalatok a [2]-ben található. További információkat készséggel szolgáltat a NME Mechanikai Tanszéke.



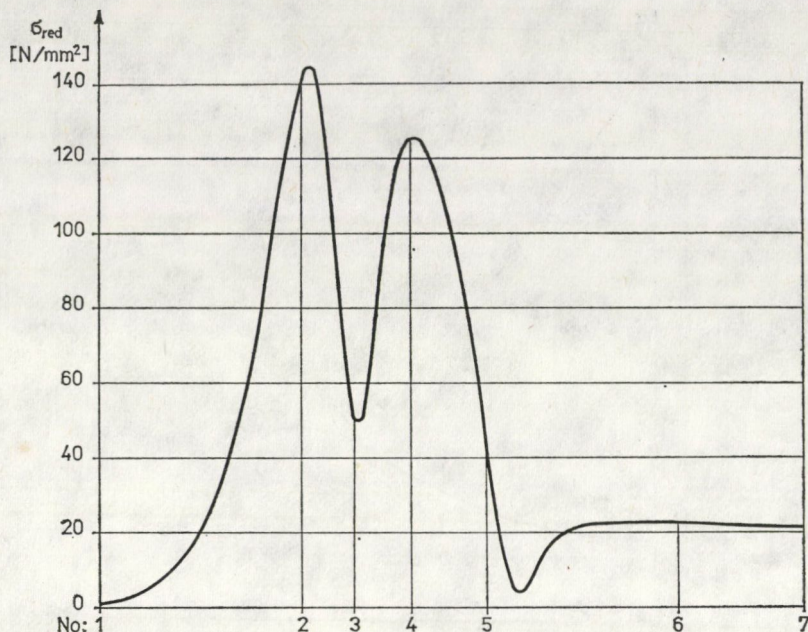
10. ábra

Köszönetnyilvánítás

A programrendszer megszületését nagymértékben elősegítette az NME Mechanikai Tanszékének OMFB által történő támogatása. A szerző köszönetét fejezi ki mindazon kollégáknak, akik az elemekhez tartozó összefüggések előállításában, ellenőrzésében és a programozási munkákban résztvettek. Ezek: Dr. Égert J., Ficsor L., Dr. Forrai L., Harmati Iné., Dr. Herpai B., Kerekes I., Dr. Kozák I., Maár Gy., Nándori F., Pödör A., Dr. Sárközi L., Dr. Szilassy I., Dr. Szeidl Gy., Varga Gy. és Visnyei Lné.

IRODALOM

1. ZIENKIEWICZ, O. C.: The finite element method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971
2. TESZGA tengelyszimmetrikus geometriájú és alakváltozású lineárisan rugalmas szerkezetek szilárdságtani számítására alkalmas programrendszer, NME. Mechanikai Tanszék, Miskolc 1980



11. ábra

3. BATHE, K. J.—WILSON, E. L.—PETERSON, F. E.: SAP IV. A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems. College of engineering, University of California, Berkely, California, Report No EERC 73—11, 1974
4. WILSON, E. L.—BATHE, K. J.—DOHERTY, W. P.: Direct Solution of Large Systems of Linear Equations, *Computer and Structures*, 4 (1974), 699—728
5. HERPAI, B.—PÁCZELT, I.: Analysis of Axisymmetrically Deformed Shells by the Finite Element Displacement methods, *Acta Techn. Hung.* 85 (1977), 93—122
6. „Általános rendeltetésű programkönyvtár a végelemek módszerével történő szilárdsági számításokhoz”, A Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszékének az OMFb megbízásából végzett Szm. 78-XXVIII-1/1978. számú kutatás-fejlesztési munkáról szóló 1. és 2. beszámolója. Miskolc, 1978—1979

Finite Element Program System TESZGA for the Strength Calculation of Structures of Axisymmetrical Geometry and Deformation. — The construction of the program system TESZGA, the 11 kinds of thin-walled shell members to be used for the finite-element simulation, the isoparametric ring-shaped units, the ring (as a curved beam) and the program library containing the spring element are dealt with. The calculation technique with consideration of the rupture to be found in the field of displacement is treated. Numerical problems for the strength calculation of structures made from thin-walled shell units are presented.

Elementenprogrammsystem TESZGA zur Festigkeitsberechnung von Konstruktionen mit achsensymmetrischer Geometrie und Verformung. — Es werden die Konstruktion des Programmsystems TESZGA, die zur Modellierung anwendbaren elf Gattungen von dünnwandigen Schalenelementen, die isoparametrische ringförmige Elemente, Ringe (als gekrümmte Träger), Federelemente enthaltende Elementenbibliothek kurz behandelt. Die rechnerische Behandlung der Rücksichtnahme des im Verschiebungsfeld stattfindenden Risses wird untersucht und Zahlenbeispiele zur Festigkeitsberechnung der aus dünnwandigen Schalenelementen hergestellten Konstruktionen werden angeführt.