

# ELKEVEREDÉSI VIZSGÁLATOK A DUNÁN

KONTUR ISTVÁN \*

[Beérkezett: 1981. augusztus 12-én]

A BME Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézetében több éve végeznek a Dunába kerülő szennyeződések elkeveredésére vonatkozó vizsgálatokat. A szennyező anyagok keresztirányú és hosszirányú elkeveredésére és szétterülésére véletlen bolyongási modellt alkalmaztunk [1]. Ebben a tanulmányban folytattuk a valószínűségi gondolatmenet kiterjesztését: a diszperziós tényező keresztirányú változásának, a keresztirányú áramlások és a vízmélység változásának hatását vizsgáltuk. A bolyongási modell két speciális alkalmazását mutatjuk be: az egyik az az eset, amidőn a folyóban szigetek is vannak, a másik, amidőn partközeli szennyezőanyag bevezetéséről van szó. A számítások két dimenzióban vizsgálják az elkeveredés folyamatát, függőleges integrál-átlagokkal, ami széles folyók esetén, mint a Duna magyarországi szakasza, megengedhető közelítés.

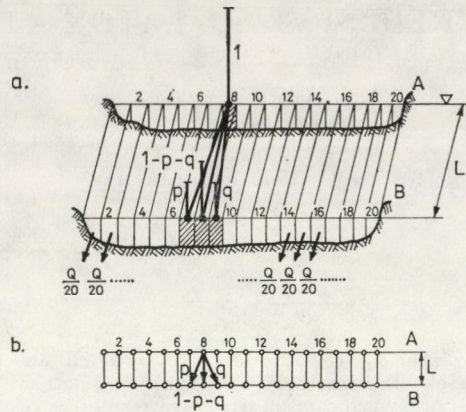
## 1. A bolyongási modell fizikai alapjai

A bolyongási modell alkalmazását a szennyezőanyag elkeveredésére már a „Sztochasztikus keveredési modell a Paks-alatti Duna-szakaszra” című tanulmányban bemutattuk [1]. Az alkalmazott modell alapgondolata az volt, hogy a vízrészecskék és ezzel együtt a szennyezett részecskék is véletlenszerű mozgást végeznek.

A bolyongási modell alkalmazásának első lépéseként fel kell venni a rács-pontokat, ami az áramlási tér felosztását jelenti. Második lépésben meg kell határozni az állapotátmenet valószínűségi mátrixot, méretét és paramétereit.

Tekintsünk egy folyó  $\mathcal{A}$ — $\mathcal{B}$  szakaszát, ahol a két szelvény egymástól  $L$  távolságra van (1. ábra). A teljes keresztiselvényt felosztjuk  $n$  egyenlő részre, mégpedig  $n$  egyenlő vízhozamszállítású részre. Az 1. ábrán  $n = 20$ , így a teljes  $Q$  vízhozam huszadrészeit szállítják az egyes lamellák. Feltételeztük, hogy mélység a szélességhez viszonyítva elhanyagolható — ami a Duna magyarországi szakaszára igaz is — és így a huszadokat elválasztó síkok függőlegesnek képzelhetők. Látjuk majd később, hogy a keresztirányú áramlások figyelembevételéhez ezt a feltételt valamilyen más úton meg kell kerülnünk. Ha a folyószakaszt felosztottuk  $n$  egyenlő vízszállítású — egyenvízszállítású — részre, akkor ezek az  $n$  rácsponthoz kijelöljük az  $\mathcal{A}$  szelvényben és a  $\mathcal{B}$  szelvényben is (1.b. ábra). A kontinuitás következtében a  $Q$  vízhozam az  $\mathcal{A}$  és a  $\mathcal{B}$  szelvényben is ugyan-

\* Dr. Kontur István, 1021 Budapest, Kuruclesi u. 44. BME Műegyetem rkp. 3—4.



1. ábra. A folyó keresztmetsvény felosztása egyenlő vízhozamú sávokra, a) elkeveredés szemléltetése; b) az elkeveredés gráf reprezentációja

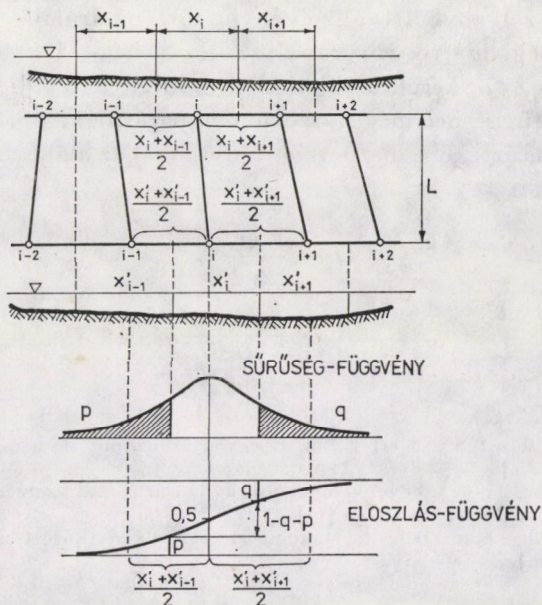
annyi, tehát a rácspontok száma is megegyezik. A rácspontok felvétele után határozzuk meg az  $(n \cdot n)$ -es átmenetvalószínűségi mátrix,  $\mathbf{P}$  elemeit. A valószínűségi megközelítés különböző szemléletű megfogalmazást tesz lehetővé. Ha a szennyezőanyag  $1$  valószínűséggel a  $i$ . egyenvízszállítási sávban van az  $\mathcal{A}$  szelvényben, akkor  $\mathcal{B}$  szelvénybe érve a szennyezőanyag  $p$  valószínűséggel kerülhet az  $(i-1)$ . egyenvízszállítási sávba és  $q$  valószínűséggel az  $(i+1)$ . egyenvízszállítási sávba, valamint  $1-p-q$  valószínűséggel maradhat a  $i$ . egyenvízszállítási sávban. (Az 1. ábrán  $i=8$ -at jelöltük be.)

Az a felvétel, amely szerint a szennyező anyag az  $L$  szakaszon csak az eggyel jobbra és az eggyel balra levő egyenvízszállítási sávba kerülhet át, azt jelenti, hogy az  $L$  távolság és az egyenvízszállítási sáv szélessége közötti arány, és a diszperziós tényező kapcsolata olyan, hogy a szennyezőanyag szétterjedése nem lép túl egy egyenvízszállítási sávra, illetve csak olyan kis valószínűséggel, ami a számítások szempontjából elhanyagolható.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltételezzük, hogy az  $i$ . egyenvízhozamú sávban a szennyezőanyag koncentrációja az  $\mathcal{A}$  szelvényben  $c_i^A$  [mg/l], akkor a  $\mathcal{B}$  szelvényben a  $c_{i-1}^B$ ,  $c_{i+1}^B$  és  $c_i^B$  [mg/l] lesz a koncentráció értéke és a szennyezőanyagra felírható anyagmegmaradási mérleg alapján

$$\frac{Q}{n} c_i^A = \frac{Q}{n} c_{i-1}^B + \frac{Q}{n} c_{i+1}^B + \frac{Q}{n} c_i^B.$$

Ebből azt kapjuk, hogy koncentrációk értékei egy dimenziós szorzókonstanstól eltekintve az átmeneti valószínűségekkel egyeznek meg; ahol ez a konstans éppen  $c_i^A$  [mg/l]. A fenti egyszerű számítás abból is adódik, hogy éppen egyenvízszállítási  $(Q/n)$  sávokat vettünk fel, aminek hasznát a fentiekből is láthatjuk. Ezt az előnyt az eredmények kiértékelésekor is közvetlenül hasznosítani fogjuk,



2. ábra. A  $p$  és  $q$  valószínűségek meghatározása az egyenvízhozamú sáv szélessége alapján

mivel a valószínűségi érték egyúttal a koncentrációk értékét is megadja. Nem azonos vízszállítási sávok felvétele esetében a számítás bonyolultabb. Megjegyezzük, hogy a kétféle számítás azonosságának mélyebb okai vannak és ez a valószínűségszámítás egyfajta linearitásának a következménye: az eredmény nem függ a minták elemeinek számától, és ugyanígy — legalábbis egy bizonyos tartományon belül — a szennyezőanyag tömegétől sem függ az elkeveredési folyamata.

Az egyenvízszállítási sávokra történő felosztás természetes velejárója az, hogy a sávok szélessége szelvényen belül és szelvényről-szelvényre is különböző. A 2. ábrán rajzoltuk meg az  $(i-1)$ ,  $i$  és  $(i+1)$  egyenvízhozamú sávokhoz tartozó csomópontokat. Az egyenvízhozamú sáv szélessége  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  és  $x_{i+1}$  a felső  $\alpha$  szelvényben és  $x'_{i-1}$ ,  $x'_i$ ,  $x'_{i+1}$  az alsó  $\beta$  szelvényben. A vízszállító sávokat a csomópontokon áthaladó vonalaknak elképzelve a  $\beta$  szelvényben a bal oldali távolság  $(x'_i + x'_{i-1})/2$ , a jobb oldali távolság pedig  $(x'_i + x'_{i+1})/2$ . Homogén elkeveredési viszonyokat feltételezve az  $i$  egyenvízhozamú sávból jobbra és balra is  $x'_i/2$  távolságra lép ki a szennyezőanyag, ami azt jelenti, hogy  $q = p$ , szimmetrikus esettel állunk szemben. Homogén elkeveredési viszonyokat a Gauss-féle normál eloszlásfüggvénnyel lehet jellemezni. Így  $\varphi(x)$  sűrűségfüggvény és  $\Phi(x)$  eloszlásfüggvény mellett

$$p_i = q_i = 1 - \Phi\left(\frac{x'_i}{2\sigma_i}\right), \quad (1a)$$

ahol  $p_i$  és  $q_i$  az  $\mathcal{A}$  szelvényből a  $\mathcal{B}$  szelvénybe történő áramlás esetére felírandó átmenetvalószínűségi mátrix  $i$ . sorának  $(i-1)$ . és  $(i+1)$ . eleme, a főátlóba természetesen  $1 - q_i - p_i$  kerül, a többi elem nulla.

A fenti összefüggésben még  $\sigma_i$  szorul magyarázatra, ami a normális eloszlás szórása. A szórás értékét a diszperziós tényezőből az alábbi összefüggés segítségével kaphatjuk:

$$D_i = \frac{\sigma_i^2 \bar{v}_i}{2 \cdot L}, \quad (2a)$$

vagyis

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot D_i}{\bar{v}_i}}, \quad (2b)$$

ahol  $D_i$  — a diszperziós tényező értéke az  $i$ . egyenvízhozamú sávban az  $\mathcal{A}$ — $\mathcal{B}$  szelvény között [m<sup>2</sup>/s]  
 $\bar{v}_i$  — az átlagsebesség az  $i$ . egyenvízhozamú sávban az  $\mathcal{B}$ — $\mathcal{A}$  szelvény között [m/s]  
 $L$  — az  $\mathcal{A}$ — $\mathcal{B}$  szelvény távolsága [m]  
 $\sigma_i$  — a szétterülés, elkeveredés mértéke az  $\mathcal{A}$ — $\mathcal{B}$  szelvény között az  $i$ . egyenvízhozamú sávban [m]

Abban az esetben, ha az  $\mathcal{A}$ — $\mathcal{B}$  szakaszt  $H_i$  vízmélység és  $x_i$  szélességi méret jellemzi az  $i$ . egyenvízhozamú sávban a folyó teljes vízhozama  $Q$  és ha ugyanakkor  $n$  egyenlő vízhozamú sávot vettünk fel, akkor  $p_i$  és  $q_i$  kifejezhető az alábbi formában:

$$p_i = q_i = 1 - \Phi \left( \frac{\sqrt{x_i}}{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{\frac{Q}{L \cdot H_i \cdot D_i}} \right). \quad (1b)$$

A gyakorlati számításoknál minden esetben úgy jártunk el [2, 3], hogy az egyenvízhozamú sávokra való felosztáskor,  $x_i$  meghatározásakor a  $\bar{v}_i$  függélyközépsébséget vettük fel, mégpedig úgy, hogy előzőleg a  $\bar{v}_i$  függélysebség és a vízmélység között az alábbi

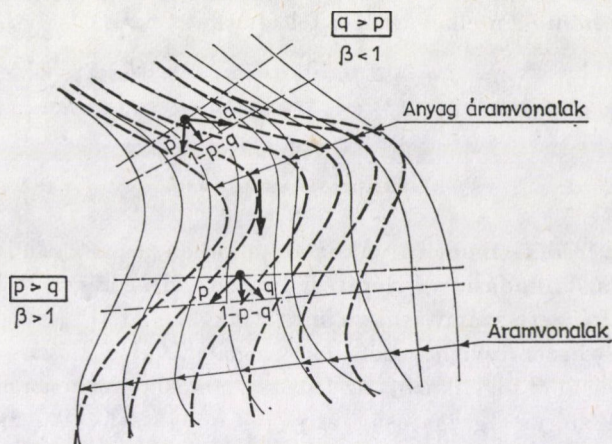
$$\bar{v}_i = a H_i^b \quad (3)$$

nemlineáris összefüggést határoztuk meg, ahol  $a$  és  $b$  állandók voltak egy-egy folyószakaszra. A (3) összefüggés szerint az egyenvízhozamú sáv szélessége

$$x_i = \frac{Q}{naH_i^{1+b}}. \quad (4)$$

Ennek figyelembevételével  $p_i$ ,  $q_i$  számítására az alábbi egyszerűbb képletet kaptuk:

$$p_i = q_i = 1 - \Phi \left( \frac{1}{2n} \cdot \frac{Q}{H_i} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot a \cdot L \cdot H_i^b \cdot D_i}} \right). \quad (1c)$$



Kerestirányú áramlás mérőszáma;  $\beta = \frac{p}{q}$

$\beta < 1$  balrasodródás eseté  
 $\beta > 1$  jobbrasodródás esete

3. ábra. A keresztirányú áramlások figyelembevételének módja

Így rögzített vízhozam ( $Q$ ) és szakasz hossz ( $L$ ) esetében csak a vízmélységet és a diszperziós tényezőt kell a térképről levenni. Természetesen, hely kijelöléséhez és az ábrázoláshoz az  $x_i$  értékekre is feltétlenül szükség van [4].

A fentiekben említettük, hogy az elkeveredést csak vízszintes síkban vizsgálva, nincs módunkban a keresztirányú áramlások figyelembevételére, pedig valószínű, hogy ezek az áramlások a szennyezőanyag mozgási pályáját és elkeveredését is jelentősen befolyásolják. Az előzőekből az is kitűnik, hogy egy-egy egyenvízhozamú sávban — szakasról szakaszra homogén elkeveredési viszonyokat tekintve a  $p = q$ , vagyis az átmenetvalószínűségi mátrix szimmetrikus, ami az általános megoldás szempontjából kedvező [1], de a valóságban lezajló folyamatokkal ez nem mindig egyezik. Ezért a  $p/q$  viszony jellemzésére

$$\beta = \frac{p}{q} \quad (5)$$

hányadost vezettük be. Ha  $p > q$ , akkor  $\beta > 1$ , ha pedig  $p < q$ , akkor  $\beta < 1$ . Ezzel a szennyezőanyag jobbra, illetve balra sodródását tudtuk modellezni (3. ábra). A hidraulikai alapon megrajzolható áramvonalak, vagy egyenvízhozamú sávok helyett így képzeletbeli anyagáramvonal sávok rajzolhatók.

Ugyancsak minden szelvényben jellemezni lehet az elkeveredési viszonyokat a

$$\lambda = p + q \quad (6)$$

összeggel, ami homogén elkeveredési feltételeket tekintve

$$\lambda = 2q = 2p, \text{ illetve } q = p = \lambda/2$$

alakban írható fel.

## 2. Gyakorlati számítások

Az elkeveredési modell gyakorlati alkalmazását a Budapesti Műszaki Egyetem Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézete által készített két megbízásos munka során végzett számításokon mutatjuk be [2, 3]. Az egyik esetben az Észak-budapesti szennyvízbevezetések vizsgálatával a Fővárosi Csatornázási Művek megbízásából foglalkozott az Intézet, a másik esetben a munka a Közép-Dunavölgyi Vízügyi Igazgatóság anyagi támogatásával a Szabadegyházán épülő Kukorica és Szeszgyár tisztított szennyvizeinek partközeli bevezetésével volt kapcsolatos. A szennyvízbevezetések környezeti hatásaira, a Duna vízminőségének lehetőségeihez mért védelméről nem szükséges részletes elemzésbe bocsátkozni [4]. Az alábbiakban csak az elkeveredéssel kapcsolatos modellezés részleteit tanulmányozzuk.

Az előző pontban láttuk, hogy az első lépés az egyenvízhozamú sávok meghatározása. Az észak-budapesti szennyvízbevezetés modellezésekor a teljes keresztiszelvényt 20 részre osztottuk fel, vagyis  $Q_i$  20 egyenvízhozamú sávot határoztunk meg. Az egyenvízhozamú sávok meghatározásának eljárását a 4. ábrán mutatjuk be.

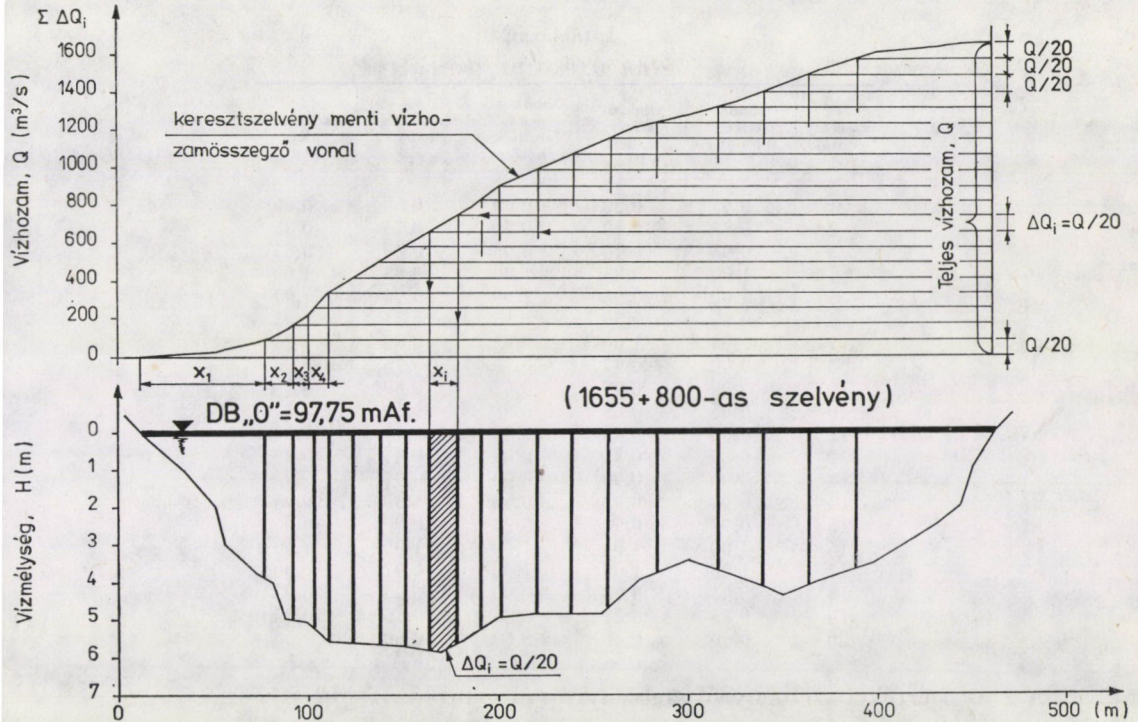
A Budapest feletti Duna-szakaszra végzett helyszíni sebességmérések alapján a vízmélység és a függélysebesség között az alábbi empirikus kapcsolatot állapítottuk meg:

$$v = 0,2078 \cdot H^{0,985},$$

ahol  $H$  — vízmélység [m]

$v$  — a függélyközepsebesség [m/s]

A fenti összefüggést alkalmazva, meghatároztuk az adott tervezési vízszinthez a keresztiszelvény vízhozamösszegző vonalát. A vízhozamösszegző vonal maximális ordinátáját 20 részre osztva, majd ezt a vízhozamösszegző vonalra visszavetítve, megkaptuk grafikus úton az  $x_i$  egyenvízhozamú sáv szélességeket. Ezt a szerkesztési menetet mutatja be a 4. ábra egy kiválasztott Duna keresztiszelvényben. Az eljárás természetesen elég sok bizonytalanságot tartalmaz, ami a függélyközepsebesség és a vízmélység közötti meglehetősen durva összefüggésből és a grafikus szerkesztésből is adódik. (Megjegyezzük, hogy a vízhozamösszegző vonal maximális ordinátája pozitív és negatív irányban is eltért az adott méretezési vízálláshoz — mérésből, vízhozamgörbéből — meghatározható vízhozamtól. De feltételeztük, hogy ez az egyenvízhozamú sávok egyenletes kiosztását nem befolyásolja.)



4. ábra. Az egyenvízhozamú sávok meghatározása grafikus úton

Ilyen módon összesen 22 szelvényben határoztuk meg az egyenvízhozamú sávokat: az Óbudai sziget fölött 3, az Óbudai sziget mellett 2, az Óbudai sziget és a Margitsziget között 2, a Margitsziget mentén 3, a Margitsziget alatt 12 szelvényben. Az Óbudai sziget 1–19 arányban, míg a Margitsziget 9–11 arányban osztotta fel a teljes keresztmetszvényt. A számítás szempontjából éppen a szigetek jelentették a különlegességet, hiszen a szigetek, mint elválasztó falak jelentkeznek a bolyongási modellben; a sziget egyik oldaláról a sziget másik oldalára nem kerülhet át szennyezőanyag részecske. A szigeteket ugyanúgy visszaverő falakként modelleztük, mint a partokat és ez azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségi mátrixok szerkezete ezeken a szakaszokon speciális alakú.

Az első részben a  $p_i$  és  $q_i$  értékekre levezetett (1a, b, c) összefüggéseket alkalmaztuk, de a modellezés egyszerűbbé tétele érdekében egyes szakaszokat összevontan kezeltünk és így öt úgynevezett  $f(p, q)$  mintafüggvényt, vagyis az elkeveredés keresztmetszvény menti alakulását leíró függvényt vettünk fel (1. táblázat). Az átmenetvalószínűségi mátrix  $p_i, q_i$  elemeit az alábbi formában számítottuk:

$$p_i = \frac{\beta \cdot \lambda}{1 + \beta} f_i(p, q) \quad \text{és} \quad q_i = \frac{\lambda}{1 + \beta} f_i(p, q)$$

1. táblázat  
 $A f_i(p, q)$  függvény értékei

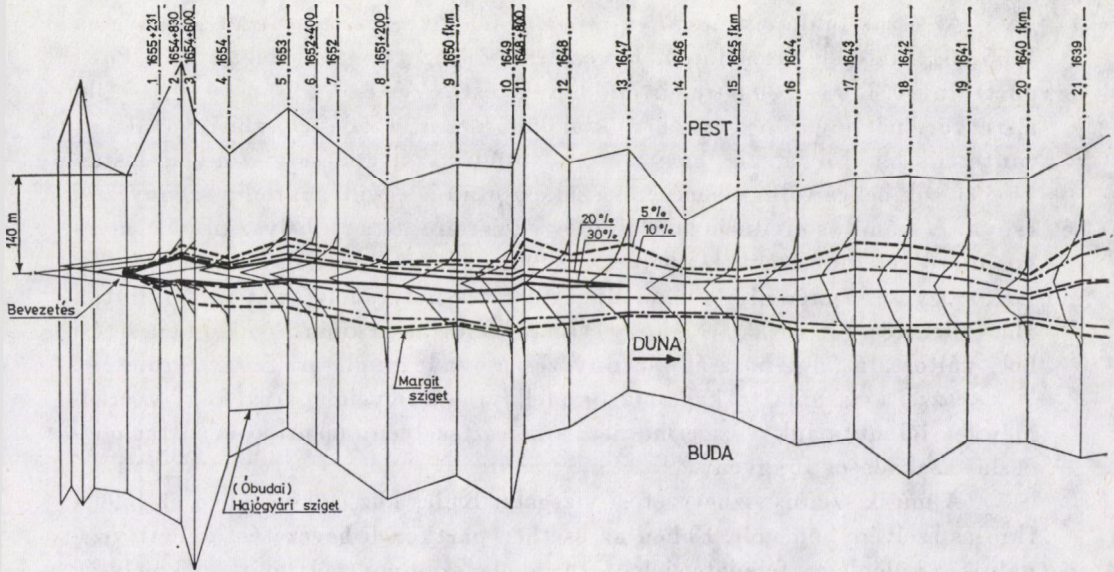
$i$ szelvény pontok	Óbudai- sziget fölött	Óbudai- sziget mentén	Óbudai-szi- get és Margitsziget között	Margitsziget mentén	Margitsziget alatt
1	0,6	0,20	0,60	0,60	0,60
2	0,85	0,40	0,80	0,75	0,85
3	0,95	0,70	0,95	0,80	0,95
4	1,00	0,85	1,00	0,85	1,00
5	1,00	0,95	1,00	0,95	1,00
6	0,97	1,00	0,97	0,85	0,87
7	0,95	1,00	0,95	0,80	0,95
8	0,90	0,97	0,90	0,75	0,90
9	0,85	0,95	0,85	0,60	0,85
10	0,85	0,85	0,85	0,60	0,85
11	0,85	0,85	0,85	0,75	0,85
12	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
13	0,90	0,90	0,90	0,97	0,90
14	0,95	0,95	0,95	1,00	0,95
15	0,97	0,97	0,97	0,90	0,97
16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
17	1,00	1,00	1,00	0,97	1,00
18	0,95	0,95	0,95	0,85	0,95
19	0,85	0,85	0,85	0,75	0,85
20	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60

A  $\lambda$  és  $\beta$  értékei szelvényről szelvényre változtak (2. táblázat).

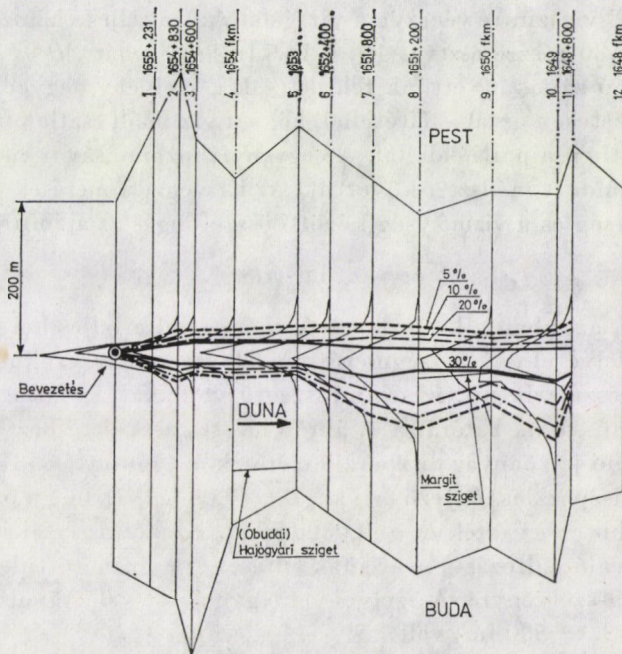
2. táblázat

Szel- vény- szám	$\lambda$	$\beta$	Hely
1	0,12	1,12	Óbudai-sziget fölött
2	0,08	1,10	
3	0,15	1,05	
4	0,20	1,02	Óbudai-sziget mentén
5	0,10	1,10	
6	0,20	1,10	Óbudai-sziget és a Margitsziget között
7	0,15	1,10	
8	0,25	1,0	Margitsziget mentén
9	0,25	0,95	
10	0,08	0,90	
11	0,22	0,90	Margitsziget alatt
12	0,27	0,90	
13	0,32	0,90	
14	0,37	0,85	
15	0,30	0,88	
16	0,27	0,90	
17	0,25	1,0	
18	0,22	1,0	
19	0,27	1,05	
20	0,27	1,10	
21	0,21	1,10	
22	0,20	1,10	





5. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása a parttól 140 m-re való bevezetés esetében (Észak-budapesti szennyvíztisztító telep)



6. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása a parttól 200 m-re való bevezetés esetében (Észak-budapesti szennyvíztisztító telep)

Az észak-budapesti szennyvíztisztító telep tervezett bevezetési helye az 1655,231 fkm-nél van. Három bevezetési változatot modelleztünk, a Pesti parttól: 110, 140 és 200 m-re történő bevezetést. Az 5. és 6. ábrán a 140 és a 200 m-re történő bevezetés esetében kialakuló szennyeződés-eloszlási vonalakat tüntettük fel. Jól látszik, hogy a szennyeződés szétterülése viszonylag lassan következik be, és több kilométeres szakasz után is együtt marad a szennyezési csóva. A számítás eredményei elég jó egyezést mutattak a helyszíni jelzőanyag mérési eredményekkel, amelyet a 200 m-es bevezetési helyen végeztek [2]. Ez az egyezés a modell és a modellparaméterek helyes felvételét támasztotta alá, és lehetőséget adtak arra, hogy csupán számítással kimutassuk a bevezetési hely változtatásának hatását a szennyezési csóva levonulására és szétterülésére.

Ezzel a vizsgálattal kapcsolatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eredmények jól mutatják a sziget hatást; a keresztiszelvény menti koncentráció eloszlás szakadós függvény.

A másik szennyvízbevezetési vizsgálat Kulcs község közelében az 1596,1 fkm-es szelvényben volt. Ebben az esetben partközeli bevezetést kellett vizsgálni, ez különleges feladatot jelentett abból a szempontból, hogy a vízmélység és a diszperziós tényező is erősen változik a partmenti sávban, a partmenti pangó vizes területeken pedig a szennyezőanyag visszamarad és az elkeveredés lassú. Ezért csak a partmenti sávot modelleztük, hogy így mintegy kinagyítva ezt a részt, az elkeveredési folyamatokról pontosabb képet alkothassunk.

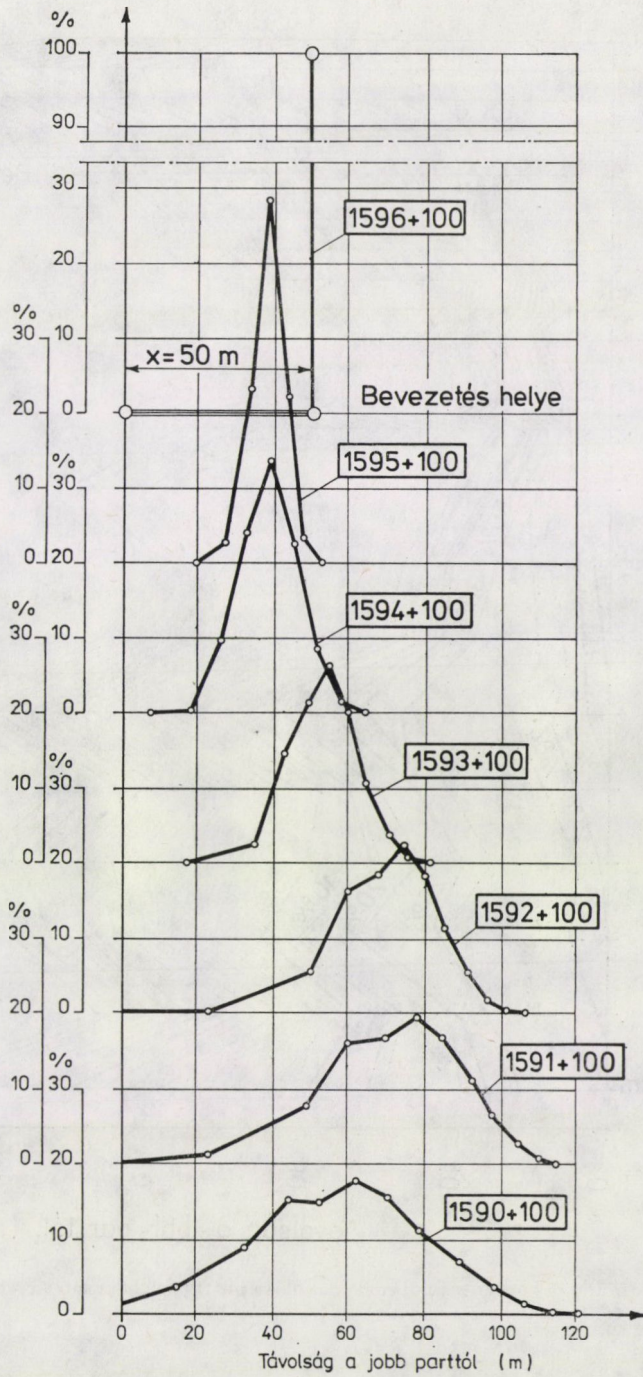
A DB, „O” vízszintre végezve a vizsgálatokat a teljes vízhozam  $Q = 1160$  [m<sup>3</sup>/s] volt ezt 80 részre osztva  $\Delta Q = 14,5$  [m<sup>3</sup>/s]. Tehát  $\Delta Q = 14,5$  [m<sup>3</sup>/s]-es egyenvízhozamú sávokat vettünk fel, de csak a szelvény negyedrészt modelleztük, természetesen azzal a feltétellel, hogy a víz felőli csatlakozásnál elnyelő fal van ellentétben a parti oldallal. Az egyenvízhozamú sávok meghatározásakor a már elmondott módszert követtük. Az itt végzett mérések alapján a függélyközépsébség és a vízmélység közötti összefüggés az alábbi volt:

$$v = 0,212 \cdot H^{0,976}.$$

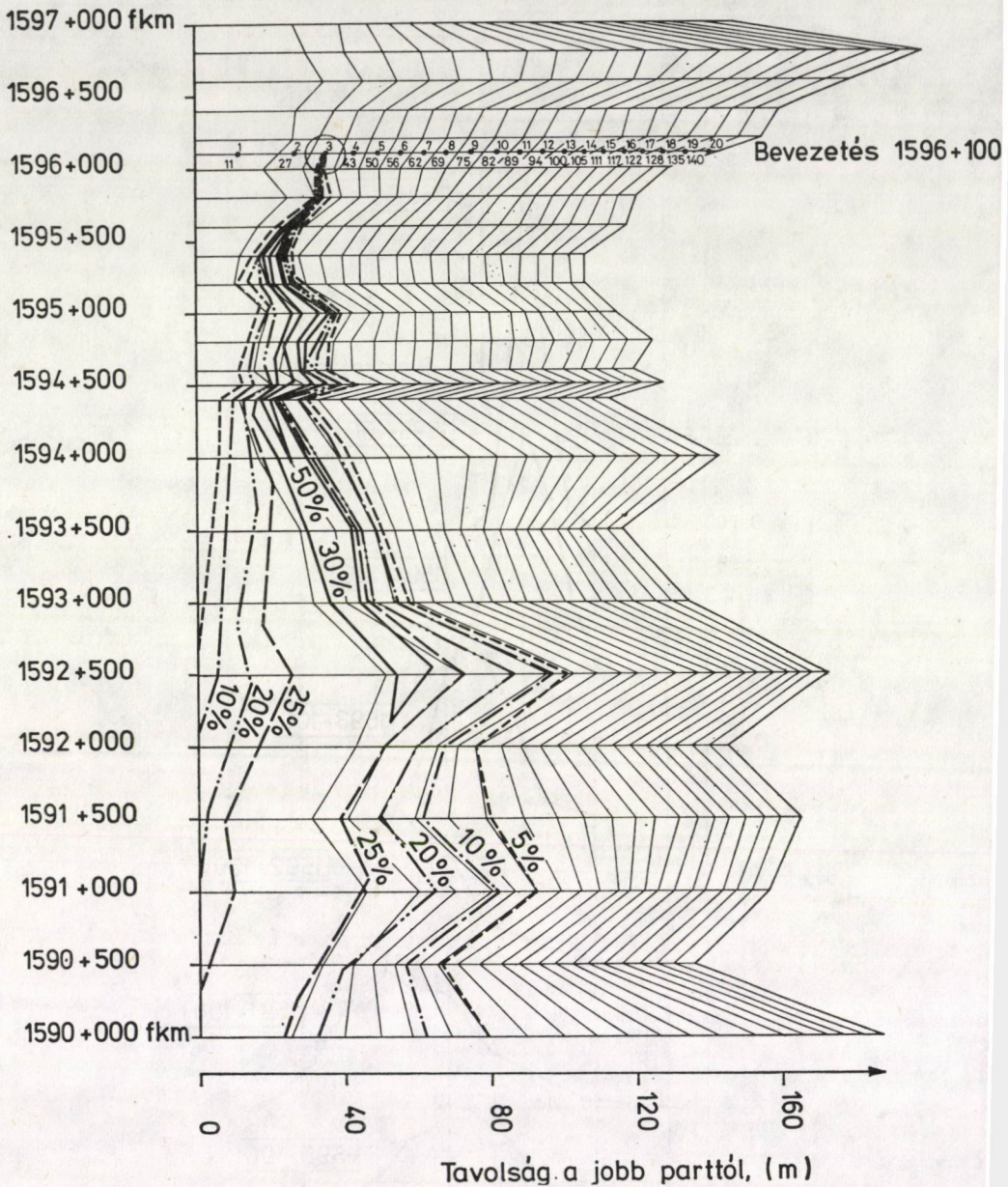
Természetesen, azonban a keresztiszelvényben, ahol a teljes keresztiszelvényre terjedő mederfelvétel és sebességmérés rendelkezésre állt, ezekből szerkesztettük meg a keresztiszelvény vízhozamösszegző vonlakat, és határoztuk meg az egyenvízhozamú sávok határát a 4. ábrán látott szerkesztéshez hasonlóan.

A helyszíni jelzőanyag diszperzió mérések azt mutatták [3], hogy a parttól 30 m-re a diszperziós tényező értéke,  $D = 0,03$  [m<sup>2</sup>/s], míg a parttól 50 m-re és annál beljebb ez az érték  $D = 0,036$  [m<sup>2</sup>/s]. Ezeket az értékeket elfogadva és a közöttük való változást lineárisnak feltételezve, számítottuk a  $p_i$  és  $q_i$  értéket szelvényről-szelvényre. A szelvények egymástól való távolsága ebben az esetben végig,  $L = 500$  [m] volt.

A szennyezőanyag számítógépes vizsgálatát a Duna 1596 + 100 és 1590 + 100 fkm közötti szakaszára végeztük el. A lehetséges bevezetési pon-



7. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának keresztshelvény menti alakulása part közeli bevezetés esetében ( $X = 50$  m)



8. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása partközeli bevezetés esetében ( $X = 35$  m)

tokat felvéve (11 [m], 27 [m], 35 [m], 43 [m], 50 [m], 56 [m], 62 [m], 69 [m], 72 [m] a jobb parttól) meghatároztuk a szennyezőanyag koncentráció kereszt-szelvény és hosszszelvény szerinti alakulását. A 7. és 8. ábrán mutattunk be a feldolgozások közül kettőt. Az egyik ábrán a szennyezőanyag kereszt-szelvény menti eloszlását látjuk, míg a másikon az azonos koncentrációjú vonalakat rajzoltuk meg a Duna helyszínrajzán. A szennyvízbevezetés műszaki részleteivel és értékelésével itt nem foglalkozunk.

Az ábrákon látható, hogy a part közelében az elkeveredés sokkal lassúbb a szennyezőanyag a partmenti sávba szorul. Ezek az eredmények jó egyezésben vannak a valóságban tapasztalható folyamatokkal, ami a sztochasztikus bo-lyongási elméleten alapuló elkeveredési számítások helyességét támasztja alá.

#### Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. SZOLNOKY Csabának, aki az elkeveredési probléma felvetésével és a munkákba való bevonásával ösztönzött a sztochasztikus elkeveredési modell kidolgozá-sára. A számítás gépi programját HUZELLA Gábor, az egyéb előkészítő számításokat BOKOR Barna egyetemi hallgatók készítették.

#### IRODALOM

1. KONTUR I.: Sztochasztikus keveredési modell a Paks alatti Duna-szakaszra. *Műszaki Tudo-mány* (1978)
2. Észak-budapesti Dunai szennyvízbevezetések elkeveredési-vízminőségi vizsgálata. *Kutatási jelentés* BME, Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet (1978). Témavezető: SZOLNOKY Csaba
3. A Szabadegyházi Kukoricacukor és Szeszgyár szennyvízeinek dunai bevezetése. *Kutatási jelentés*. BME, Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet. 1980. Témavezető: SZOLNOKY Csaba
4. SZOLNOKY Cs.—ANIOT P.—BUZÁS K.—KONTUR I.: Az Észak-budapesti Duna-szakasz ter-helhetősége környezetvédelmi szempontból. II. Magyar Hidrológiai Társaság Országos Vándorgyűlése, Keszthely 1979
5. KONTUR I.—AMBRUS S.: Random Walk Model Applied in Water Resources Management. Environmental Systems Analysis and Management, *IFIP WG7.1 Working Conference, Rome Italy, 28–30 September, 1981*. Proceedings Ed. S. RINALDI North—Holland Publishing Company, *Amsterdam* 1982.

**Investigations on Pollution-Mixing in the Danube.** — Research investigations have been carried out for several years by the Institute of Water Management and Hydraulic Engineer-ing, Technical University of Budapest relating to the mixing of pollutions discharged into the Danube. To the transverse and longitudinal mixing and to the spreading of the impu-rities in the river, a model of the random rambling of the flow has been constructed. In this paper the extension of ideas of the theory of probability has been continued to develop: the effect of the transverse change of the coefficient of dispersion, the changes of the cross currents and water depth have been analysed. Two methods of the special application of the random walk model are presented: the first one is the case where also holms are to be found in the river, and the second where the discharge of the impurities originated from the coastal zone takes place. The calculations treating the process of mixing are carried out for two dimensions and using vertical integral mean which, in case of large rivers, as is the case on the Hungarian stretch of the Danube, is a permissible approximation.

**Schmutzstoffvermischungsuntersuchungen im Donauwasser.** — Durch die Forschungsanstalt für Wasserwirtschaft und Wasserbau der Budapester Technischen Universität werden über die Vermischung der in die Donau geleiteten Verunreinigungen seit mehreren Jahren Untersuchungen durchgeführt. Für die Quer- und Längsvermischung und Verbreitung der Schmutzstoffe wurde ein Modell zufälliger Strömung angewandt. In der vorliegenden Abhandlung wird die Verbreitung des Wahrscheinlichkeitsgedankens fortgesetzt: es wird der Effekt der Änderung des Dispersionskoeffizienten in Querrichtung sowie der Änderung der Querströmungen und der Wassertiefe untersucht. Zwei spezielle Anwendungen des Modells der zufälligen Strömung werden dargestellt: die erste gilt für den Fall, wo sich in dem Strom auch Inseln befinden, und die zweite für den Umstand, wo es sich um die Zuleitung von Schmutzstoffen in Ufernähe handelt. Der Vermischungsverlauf wird durch die Berechnungen in zwei Dimensionen untersucht: es werden senkrechte Integraldurchschnittswerte angewandt, was im Fall von sehr breiten Strömen wie der ungarische Abschnitt der Donau, eine zulässige Näherung darstellt.