

AZ ÉRINTKEZÉSI NYOMÁS MEGOSZLÁSÁNAK OPTIMÁLÁSA

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. augusztus 27-én]

A jelen tanulmány egy számítástechnikailag egyszerűen realizálható eljárást ismertet a súrlódás nélküli érintkezésnél fellépő érintkezési nyomás megoszlásának optimalizálására. Oly módon keressük a p nyomás maximumának minimumát, hogy az érintkezési tartomány határának közelében a nyomás lefutása biztosítsa azt a feltételt, hogy a terhelés átadásánál kialakuló feszültségállapot az érintkezési tartomány pontjaiban ne legyen szinguláris. Ezt a testek határoló felületének megfelelő kialakításával érjük el. Az optimalizált alakot lineáris programozási feladat megoldásából nyerjük. Tételeket állítunk fel a p vezérlésével kapcsolatban, vizsgáljuk a súrlódási teljesítményvesztés hatását a p_{\max} minimalizálására. Vékonyfalú héjaknál, lemezeknél, illetve prizmatikus tartóknál az optimalizációnál kialakuló falvastagság változás hatását a hatásfüggvény Taylor-sor szerinti sorbafejtésével vesszük figyelembe. Vizsgáljuk véges elemes elmozdulás módszer esetében a hatásmátrixnak, ismert terhelésből származó elmozdulásoknak és ezek hézag szerinti deriváltjainak előállítási kérdéseit. Számpéldákat mutatunk be a p vezérlésére síkbeli gyűrűalakú testek érintkezése esetén, továbbá az érintkezési nyomással arányos kopás időbeli lefolyását is vizsgáljuk.

1. Bevezetés

A tervezőmérnökök arra törekednek, hogy a terhelésátadásnál kialakuló feszültségállapot szingularitásokat ne tartalmazzon, a maximális redukált feszültség, a testek egymáson történő elcsúszása esetében keletkező súrlódási teljesítményvesztés és kopás kicsiny legyen.

Azokban az esetekben, amikor a terhelésátadás a testek között érintkezés formájában valósul meg, az érintkezésben álló testek felületének megfelelő szabályozásával, kialakításával, egyes mechanikai mennyiségeket optimálni lehet.

Optimálási feladat lehet az érintkezési nyomás maximumának minimálása (min max p), vagy az érintkezési nyomás függvénynek olyan „vezérlése” is, amikor a nyomás függvénytől a zérus értékhez történő sima átmenetet is megköveteljük a min max p cél elérése mellett.

Nyilvánvaló, hogy a min max p értékét a szóban forgó érintkezési tartomány nagysága is befolyásolja. Az utóbbi növelésével a nyomás maximuma ugyan csökken, de a testek egymáson történő elcsúszása esetében a súrlódási teljesítményvesztés nő. Ezekben az esetekben a tervezőnek a szerkezet működésével kapcsolatos kívánalmakat is figyelembe kell vennie akkor, amikor eldönti, hogy az ellentétes hatások közül melyik kapjon nagyobb súlyt.

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III. 3.

A téma gazdag irodalmából a merev bélyeg alakjának meghatározásával foglalkozik CONRY, T. F. és SEIREG, A. [1] munkája. A féltérbenyomott tengelyszimmetrikus bélyeg felületének meridián görbét kvadratikus polinom alakjában keresik. Az ismeretlen állandókat a $\min \max p$ célfüggvény segítségével számították ki. Jó közelítésben kapták meg az állandó $p_0 = F/A$ értékét, ahol F — a terhelő erő, A — a bélyeg keresztmetszetének felülete. Ugyanakkor a bélyeg szélén fellépő feszültségállapot szinguláris lett, mivel az érintkezési nyomás függvényben a szakadás megmaradt.

Tartók vonatkozásában ZSURAVLEVA, T. A. és PANOVKO, J. G. [2] a kezdeti hézag hatását vizsgálja. Az érintkezési tartományt előre kijelölve, ott állandó nyomást feltételezve, keresik a kezdeti hézag értékét, amikor is a rugalmas alap Winkler-típusú. PÁCZELT, I. és HERPAI, B. [3] a rövid vékonyfalú körhenger héjak közötti állandó nyomást biztosító kezdeti hézagot határozzák meg.

Számos munka a görgőscsapágyak görgőjének lekerekítését vizsgálja [4], [5], [6]. Ezekben az esetekben a görgő középső része hengeres, míg végei találmásra felvett sugárral vannak lekerekítve.

SINGH, K. P. és PAUL, B. [4] a testeket végtelennek tekintik, ami nyilvánvalóan pontatlanságot okoz, különösen a lekerekített végeken. Számításaik szerint a maximális nyomás csökkenthető, ami a görgőscsapágy élettartamára kedvező befolyást gyakorol.

HARNETT, M. J. [6] is a végtelen féltérre vonatkozó összefüggéseket használja fel a hatásmátrix meghatározására. Térbeli ábrái a nyomásmegoszlásáról adnak igen szemléletes képet.

HAUG, E. J. és KWAK, B. M. [7] a $\min \max p$ értéket a test peremének (felületének) megváltoztatási mértékére előre adott korlát mellett keresi a végelemes elmozdulási módszer felhasználásával.

Megállapítható, hogy a fenti munkák egyikében sincs az érintkezési nyomás lefutásának képe előírtan vezérelve.

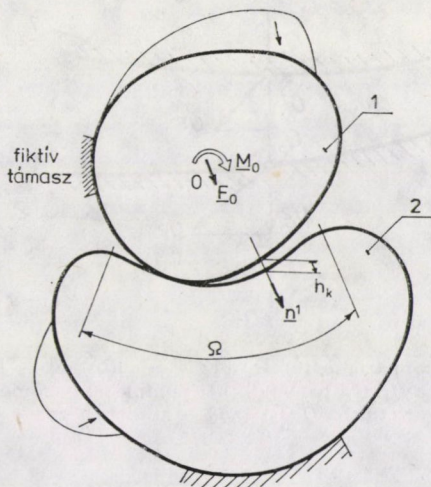
A jelen munkában ennek a kérdésnek megoldását keressük.

2. Az optimálási probléma megfogalmazása

Az általánosság megszorítása nélkül vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt lineárisan rugalmas rendszert. Feltételezzük, hogy a fellépő elmozdulások, alakváltozások kicsinyek, a testek közötti súrlódás — az érintkezési nyomás meghatározásakor — elhanyagolható.

2.1. A súrlódás nélküli érintkezési feladat felállítása

Terheletlen állapotban a két test között az n^1 irányában mért kezdeti hézagot jelölje $h_k = h_k(x)$, ahol az x az (x^1, x^2) felületi koordinátát jelöli; legyen n^1 az első test felületének külső normálisa. Az első testre ható ismert erőrend-



1. ábra. Az érintkezésben álló rugalmas rendszer elemei: az 1 jelű merevtestszerű elmozdulással rendelkező test és a 2 jelű merevtestszerű elmozdulással nem rendelkező test. Ω — a szóba jöhető érintkezési tartomány, h_k kezdeti hézag értelmezése $[F_0, M_0]$ — az 1-es testre ható ismert külső terhelés 0 pontra vonatkoztatott redukált vektorkettőse

szernek a koordinátarendszer kezdőpontjára számított vektorkettőse legyen $[F_0, M_0]$, az Ω szóba jöhető érintkezési tartománytól távoli helyen (ideiglenesen) megfogott test Green-függvényét jelölje $H^1(x, x')$: ami fizikai tartalmát tekintve, a felületen ható $n^1(x')$ normális irányú egységnyi terheléshez tartozó $n^1(x)$ irányú elmozdulásnak felel meg, míg a 2-es testen a hatásfüggvény legyen $H^2(x, x')$.

Jelölje az 1-es ideiglenesen megfogott és a 2-es merevtestszerű elmozdulást nem végző testekre ható, ismert erőrendszerekből származó Ω tartománybeli n^1 irányú elmozdulásokat $f^1(x)$ és $f^2(x)$, továbbá az első test merevtestszerű elmozdulásából származó, ugyancsak $n^1(x)$ $x \in \Omega$ irányú elmozdulást $d(x)$. Legyen a helyvektor R , az elemi felület dS .

Ekkor a súrlódás nélküli érintkezési peremértékfeladatot az

$$F_- \stackrel{\text{def}}{=} F_0 - \int_{\Omega} n^1 p dS = 0, \tag{2.1}$$

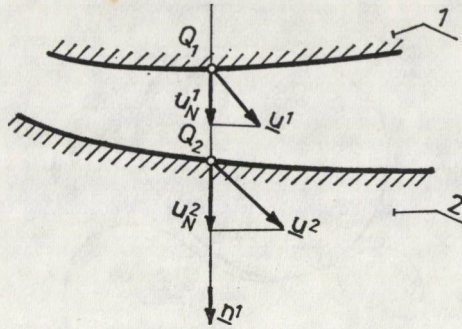
$$M_- \stackrel{\text{def}}{=} M_0 - \int_{\Omega} R \times n^1 p dS = 0, \tag{2.2}$$

első testre felírt egyensúlyi egyenletek, a

$$g(x) = \int_{\Omega'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) - d(x) \geq 0 \tag{2.3}$$

testek egymásba hatolhatatlanságát kifejező egyenlőtlenség, a

$$p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega \tag{2.4}$$



2. ábra. Az érintkezés-rés geometriai feltétele, ha $g^{\text{def}} = u u_N^2 - u_N^1 + h_k = 0$ érintkezés, ha $g > 0$ rés lép fel. Itt $u_N^i = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}^1$ a Q_1, Q_2 párbaállított pontok elmozdulásának \mathbf{n}^1 normális irányú vetülete, $Q_1 Q_2 = h_k$ - kezdeti hézag

érintkezési nyomás nem negatív értékűségét, illetve a

$$p(x) > 0, \quad g(x) = 0 \quad x \in \Omega_p \quad (2.5a)$$

érintkezési, a

$$p(x) = 0, \quad g(x) \geq 0 \quad x \in \Omega_0 \quad (2.5b)$$

rés feltételhez tartozó egyenlet-egyenlőtlenségek, illetve a belőlük következő

$$p(x)g(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (2.6)$$

feltétel jelöli ki. Itt a koordinátarendszer kezdő pontjával egybeeső első test pontjának λ_F eltolódásából és környezetének λ_M merevtestszerű elfordulásából származó Ω tartománybeli merevtestszerű elmozdulás

$$d(x) = \lambda_F \cdot \mathbf{n}^1(x) + \lambda_M \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}^1(x), \quad (2.7)$$

míg a rugalmas rendszerre vonatkozó hatásfüggvény

$$H(x, x') = H^1(x, x') + H^2(x, x'),$$

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_p.$$

A megoldás megkeresését megnehezíti az a tény, hogy Ω_0 és Ω_p tartományok előzetesen nem ismeretesek.

Bizonyítható, hogy a (2.1)–(2.8) alatti érintkezési feladat megoldását az

$$L = \tilde{\Pi}_c + \lambda_F \cdot \mathbf{F} + \lambda_M \cdot \mathbf{M} \quad (2.9)$$

Lagrange-féle függvény

$$\delta_p L \geq 0, \quad p \geq 0, \quad \delta_{\lambda_F} L = 0, \quad \delta_{\lambda_M} L = 0 \quad (2.10)$$

szabályok szerinti variálásával is megkaphatjuk [8, 9]. Itt

$$\tilde{N}_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} p(x) H(x, x') p(x') dS' dS - \int_{\Omega} (f^1 - f^2 - h_k) p dS \quad (2.11)$$

továbbá a $\delta_x L$ az x változó szerint vett első variációt jelenti. Ily módon az érintkezési feladat megoldását a

$$\min \{ \tilde{N}_c \mid p \geq 0, \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0} \} \quad (2.12)$$

kvadratikus programozási feladat megoldása révén kapjuk meg.

2.2 Az érintkezési nyomásfüggvény vezérlése

Általában a nem-optimált alakú testek közötti érintkezésénél kialakuló érintkezési nyomás erőteljesen változó jellegű (pl. szimmetrikus kialakítású és terhelésű síkbeli testeknél a 3-a ábrán feltüntetett függvény szerint változik). Célunk a maximális érték csökkentése mellett a nyomásfüggvény lefutásának vezérlése.

A vezérlést az Ω_{opt} felett értelmezzett

$$\chi = \chi(p_{max}, p, x) \geq 0 \quad x \in \Omega_{opt} \quad (2.13)$$

egyenlőtlenséggel kívánjuk leírni. Ez a tartomány természetesen eltérhet az Ω_p tényleges-, illetve az optimalás nélküli feladatnál felvett Ω szoba jöhető érintkezési tartománytól. Annak megválasztását a szerkezet működése szabja meg.

Ha a χ függvénytől megkívánjuk, hogy biztosítsa azt, hogy az Ω_{opt} tartomány bármely x pontjában az érintkezési nyomás értéke ne haldja meg a $p_{max} v(x)$ -szeresét, akkor a vezérlő függvény

$$\chi(x) = v(x) p_{max} - p(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_{opt} \quad (2.14)$$

alakú, ahol $0 \leq v(x) \leq 1, p_{max} \stackrel{\text{def}}{=} \max p$. A felvett $v(x)$ vezérlő függvényből $p(x) \leq p_{max}$ következik.

Vizsgáljuk a $v(x)$ vezérlő függvény néhány lehetséges alakját egyváltozós esetben ($x \equiv x^1$).

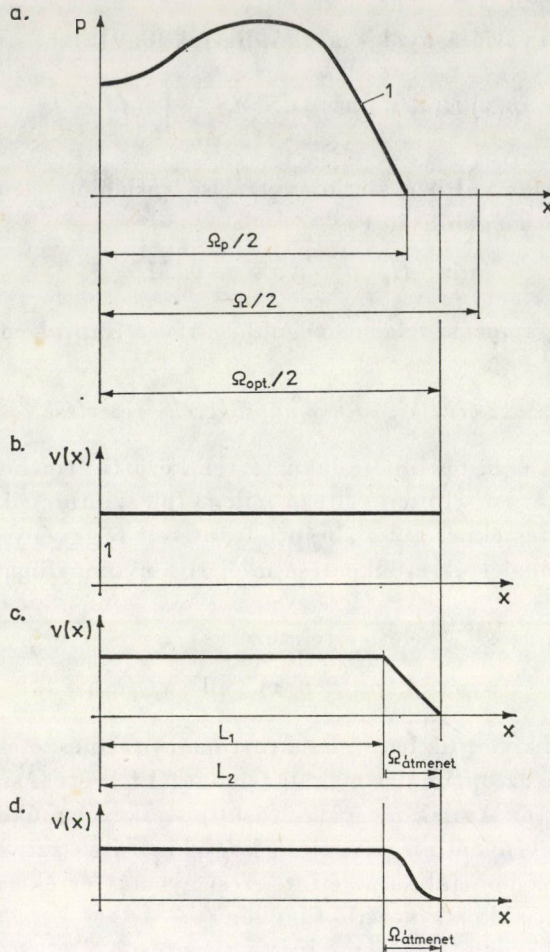
1. Az $x \in \Omega_{opt}$ tartomány felett a

$$v(x) = 1 \quad (2.15)$$

függvény (3-b ábra) az érintkezési nyomás állandóságát biztosíthatja.

2. A

$$\begin{aligned} v(x) &= 1, & 0 \leq x \leq L_1 \\ v(x) &= \frac{L_2}{L_2 - L_1} - \frac{1}{L_2 - L_1} x, & L_1 \leq x \leq L_2 \end{aligned} \quad (2.16a, b)$$



3. ábra. A p érintkezési nyomás függvény és a különböző típusú $v(x)$ vezérlő függvények egyváltozós esetben

vezérlés (3-c ábra) trapéz alakú nyomás-megoszlást eredményezhet.

3. C^1 osztályú átmenetet biztosíthat a

$$v(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (2.17a, b)$$

$$v(x) = 1 - 3 \left(\frac{x - L_1}{L_2 - L_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - L_1}{L_2 - L_1} \right)^3, \quad L_1 \leq x \leq L_2$$

vezérlő függvény (3-d ábra), hisz az $x = L_1$ és az $x = L_2$ helyeken $dv(x)/dx = 0$.

Megjegyzés-1: Az 1.-beli eset kétváltozós esetre is érvényes.

Megjegyzés-2: Amennyiben az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartomány pontjaiban az $x = L_2 + 0$ helyen a külső terhelés zérus, úgy a C^1 osztályú átmenetet biztosító vezérléssel

(az 1. testre ható terhelés redukált vektorkettőstől függően, lásd az alábbi tétel-eket) elérhető, hogy a terhelésátadásnál az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományban a feszültség-állapot ne tartalmazzon szinguláris pontot, ugyanis a $\sigma_N = -p$ normál feszültségben nem lép fel szakadás.

2.3 Tételek a p_{max} -al kapcsolatosan

Az alábbiakban a maximális nyomás értékével kapcsolatos tételt fogalmazzuk meg. Feltételezzük, hogy az 1-es test vagy merevtestszerű $z \equiv x^3$ irányú eltolódással, vagy $y \equiv x^2$ tengelykörüli elfordulással, vagy mindkettővel rendelkezik. Felmerül a kérdés, lehet-e számításainkban $\chi(x) = 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ értékkel dolgozni, és ha igen, milyen esetekben, a $v(x)$ -től hogyan függ a p_{max} ?

Ezt a kérdéskört az alábbi megjegyzéssel vezetjük be.

Megjegyzés-3: Amennyiben az 1-es test csak merevtestszerű (függőleges) eltolódással rendelkezik, úgy az 1. alatti $v(x)$ -el nyert $p(x) \equiv p_{\text{max}}$ maximális nyomás értéke kisebb lesz, mint a 2. és 3. alatti vezérlő függvény esetében kaptak. A p_{max} akkor lesz minimális — a (2.1)-ből nyert függőleges irányú erők egyensúlyát is figyelembe véve —, ha a (2.14) egyenlőség formájában áll fenn, azaz $p(x)$ hozzásimul a $v(x) p_{\text{max}}$ „burkoló görbéhez”. Következésképpen p_{max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$I = \int_{\Omega_{\text{opt}}} v(x) dS = \int_0^{L_1} v(x) dx$$

integrál értéke.

Állításunkat a következőképpen lehet könnyen belátni.

A (2.1) egyensúlyi egyenletet a (2.14) felhasználásával és az $n^{(1)}(x) = e_z$, $F_0 = F_0 e_z$ feltételezéssel felírva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F &= F_0 = \int_{\Omega_{\text{opt}}} p(x) dS = F_0 - \int_0^{L_1} p(x) dx = \\ &= F_0 - \int_0^{L_1} (v(x) p_{\text{max}} - \chi(x)) dx = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$p_{\text{max}} = \frac{F_0}{I} + \frac{\int_0^{L_1} \chi(x) dx}{I},$$

amiből p_{max} minimumát akkor nyerjük, ha

$$\int_0^{L_1} \chi(x) dx = 0 \Rightarrow \chi(x) \equiv 0,$$

vagyis, amikor a $p(x)$ hozzásimul a $v(x) p_{\text{max}}$ függvényhez. Itt

$$I = \int_0^{L_1} v(x) dx.$$

Ebből következnek az alábbi tétel.

Tétel-1: Ha az 1-es test az érintkezés-elválás geometriai feltételét kijelölő $n^1(x) = |e_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ irányú merevtestszerű eltolódással rendelkezik, akkor az optimalizációs feladat esetében $p(x) = v(x) p_{\text{max}}$ és p_{max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$I = \int_{\Omega_{\text{opt}}} v(x) dS$$

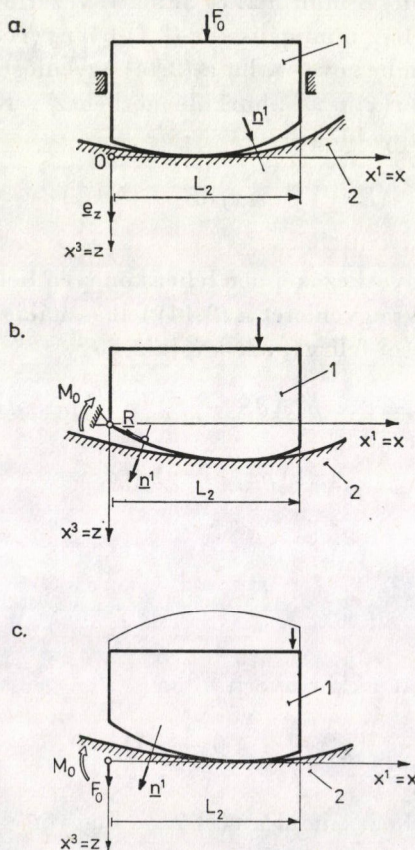
integrál értéke.

Az 1.—3. esetbeli vezérléskor a 2. ábra jelölését figyelembe véve, a szóban forgó integrál értéke

$$I_1 = L_1 + (L_2 - L_1),$$

$$I_2 = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2},$$

$$I_3 = L_1 + \frac{11}{12} (L_2 + L_1),$$



4. ábra. Az érintkezési nyomás vezérléséhez kapcsolódó ábrák. Az 1 jelű test a) merevtestszerű eltolódással, b) merevtestszerű elfordulással, c) mindkettővel rendelkezik

azaz

$$I_1 > I_2 > I_3,$$

tehát a min p_{\max} szempontjából a legkedvezőtlenebb a 3. eset, de a feszültség-állapot szingularitásának elkerülése céljából ez a legkedvezőbb.

A (2.2) egyenlethől $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, $M_0 = -M_0 \mathbf{e}_y$ feltétel mellett — a Tétel-1-nél tett megfontolások alapján — következik a

Tétel-2: Ha az 1-es test y tengelykörüli merevtestszerű elfordulással rendelkezik, akkor $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, $x^1 > 0$ esetében az optimalizációs feladatnál kialakuló érintkezési nyomás $p(x) = v(x) p_{\max}$, továbbá p_{\max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$\bar{I} = \int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS$$

integrál értéke.

A (2.1) és a (2.2) egyenletek együttes vizsgálatából az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel-3: Abban az esetben, ha az 1-es test z tengelyirányú merevtestszerű eltolódással és y tengely körüli elfordulással rendelkezik, akkor az $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$, $x^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} = \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS}$$

egyenlőség fennállásakor az optimalizációs feladatnál a $p(x)$ érintkezési nyomásfüggvény hozzásimul a $v(x) p_{\max}$ függvényhez. A $p_{\max} = p_0$ annál kisebb, minél nagyobb az $\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS$ vagy az $\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS$ integrál értéke.

Igazolás: Az \mathbf{e}_z és \mathbf{e}_y egységvektorokkal skalárisan megszorozott (2.1) és (2.2) egyenletekbe a (2.14)-en keresztül kifejezett $p(x)$ -et behelyettesítjük, majd rendezzük azokat, aminek eredményeképpen a

$$p_{\max} = \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS},$$

illetve a

$$p_{\max} = \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 \chi \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS}$$

kifejezésekhez jutunk. $\chi(x) > 0$ esetében a $\chi(x)$ függvényt tartalmazó integrálok pozitívak, és ezért min p_{\max} -ot csak akkor kapunk, ha $\chi(x) \equiv 0$ az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományban, ez pedig csak a tételbeli egyenlőség esetében áll fenn.

A fenti tételből azonnal következik az alábbi

Tétel-4: Amennyiben az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódásakor és y tengelykörüli elfordulásakor

$$\frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} \neq \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS},$$

úgy mindig lesznek olyan pontok, ahol

$$\chi(x) = v(x) p_{\text{max}} - p(x) > 0,$$

továbbá $p_{\text{max}} > p_0$.

A fentiekben $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ egyenlőséget tételezünk fel. Amennyiben ez nem áll fenn, úgy a Tétel 1–4 helyett az alábbiak fogalmazhatók meg:

Tétel-5: Az 1-es test \mathbf{e}_z irányú merevtestszerű eltolódásakor a p_{max} akkor lesz a legkisebb, ha $\chi(x) \equiv 0$ és a $v(x)$ olyan, hogy a

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál értéke a $0 \leq v \leq 1$, $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a lehető legnagyobb.

Igazolás: A (2.1) egyensúlyi egyenletet \mathbf{e}_z egységvektorral megszorozva, majd a (2.14) felhasználásával kifejezett $p(x)$ -et ebbe behelyettesítve, és a kapott egyenletet rendezve, azt kapjuk, hogy

$$p_{\text{max}} = \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS},$$

amiből a p_{max} minimumát $\chi(x) \equiv 0$ -nál nyerjük.

Tétel-6: Az 1-es test y tengelykörüli merevtestszerű elfordulásakor a p_{max} akkor lesz a legkisebb, ha $\chi(x) \equiv 0$ és $v(x)$ olyan, hogy az

$$\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál a $0 \leq v \leq 1$, $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a lehető legnagyobb.

Igazolás: Az 5. tétel igazolásánál tett lépéseket az \mathbf{e}_y egységvektorral megszorozott (2.2) egyensúlyi egyenletre kell elvégezni.

Tétel-7: Az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódásakor és y tengelykörüli elfordulásakor, amennyiben fennáll az

$$\frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} = \frac{M_0}{\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS} \stackrel{\text{def}}{=} p_0,$$

összefüggés, úgy $\chi(x) \equiv 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}}$, azaz $p(x)$ hozzásimul a $v(x)$ p_{max} függvényhez. A $p_{\text{max}} = p_0$ értéke adott terheléskor annál kisebb, minél nagyobb az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS \quad \text{vagy} \quad \mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál értéke az $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 > 0$, $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$, $0 \leq v \leq 1$ korlátok mellett.

Igazolása a Tétel-3-nál végrehajtott lépések értelemszerű ismétlésével végezhető el.

Tétel-8: Amennyiben az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódással és y tengelykörüli elfordulással rendelkezik, és a

$$p_0^F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} \neq \frac{M_0}{\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS} \stackrel{\text{def}}{=} p_0^M,$$

feltétel teljesedik, úgy található olyan pontok, ahol

$$\chi(x) > 0,$$

továbbá áll, hogy

$$p_0^M < p_{\text{max}} > p_0^F.$$

Megjegyzés-4: A Tétel-5–8-ban feltételeztük, hogy az 1-es test \mathbf{e}_z irányú merevtestszerű eltolódással és y tengelykörüli elfordulással rendelkezik. Formálisan a tételek érvényesek arra az esetre is, amikor a merevtestszerű eltolódás általános ismert \mathbf{e} irányú, ill. a szögelfordulás az ugyancsak ismert \mathbf{e}_φ vektorral párhuzamos. Ekkor az $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}_z$ és az $\mathbf{e}_\varphi \rightarrow \mathbf{e}_y$ megfeleltetéssel a Tétel-5–8 alattiak érvényben maradnak.

Megjegyzés-5: Ismeretlen irányú merevtestszerű eltolódáskor, illetve szögelforduláskor a (2.1) és a (2.2) egyenletekbe a (2.14)-ből kifejezett $p(x)$ behelyettesítése után, az

$$F_0 - p_{\text{max}} \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 v \, dS + \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 \chi \, dS = 0,$$

$$\mathbf{M}_0 - p_{\text{max}} \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS + \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 \chi \, dS = 0$$

egyenletekhez jutunk. Ekkor a $\chi \equiv 0$ simuláshoz a

$$p_{0x}^F = F_{0x} / \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS \quad (x \leftrightarrow y \leftrightarrow z)$$

$$p_{0x}^M = M_{0x} / \mathbf{e}_x \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS \quad (x \leftrightarrow y \leftrightarrow z)$$

menyiségek definiálásával a

$$p_{0x}^F = p_{0y}^F = p_{0z}^F = p_{0x}^M = p_{0y}^M = p_{0z}^M$$

egyenlőség teljesedésére volna szükség az $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}^1 > 0$, az $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$ és a $0 \leq v(x) \leq 1$ kötöttségek mellett. Ez gyakorlatilag nem áll fenn!

2.4 Az érintkezési nyomás és a kezdeti rés meghatározására szolgáló optimalizációs feladat felállítása

A vezérelt nyomást oly módon kívánjuk biztosítani, hogy feltételezzük az Ω_{opt} tartományban a relatív g hézag (rés) zérus értékét. Ebből adódóan a testek egymásba hatolhatatlanságának feltételét kifejező (2.3) egyenlőtlenség helyett a

$$g(x) = \int_{\Omega'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) + \Delta h(x) - d(x) = 0 \quad (2.18)$$

egyenlőség írható. Itt Δh — a kezdeti hézag megváltozása, amit az első test kontúrjának megváltoztatásával kívánunk biztosítani.

Ily módon a (2.1)–(2.2) egyensúlyi egyenletek, a vezérlést leíró (2.14) egyenlőtlenség és az előbbi (2.18) egyenlőség, mint mellékfeltételek (korlátok) mellett keressük a p_{max} minimumát. Vagyis az optimalizációs feladat az alábbi: Keressük a p_{max} minimumát az

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 p dS = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p dS = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

egyensúlyi egyenletek, a

$$g_0(x) = \int_{\Omega'_{\text{opt}}} H(x, x') p(x') dS' + \underbrace{f^2(x) - f^1(x) + h_k(x)}_{-l(x)} - d(x) + \Delta h(x) = 0 \quad (2.21)$$

érintkezés geometriai feltétele, továbbá a vezérléssel kapcsolatos

$$\chi(x) = v(x) p_{\text{max}} - p(x) \geq 0 \quad (2.22)$$

egyenlőtlenségi feltétel mellett, azaz a

$$\min \{ p_{\text{max}} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, g_0(x) = 0, \chi(x) \geq 0 \ x \in \Omega_{\text{opt}} \} \quad (2.23)$$

lineáris programozási feladat megoldása révén jutunk a kitűzött cél megoldásához.

Megjegyzés-6: Azokban az esetekben, amikor a $p(x)$ függvény hozzásimul a $v(x) p_{\text{max}}$ burkoló függvényhez, az egyensúlyi egyenletekből p_{max} ismertté válik és a $g_0(x) = 0$ egyenletből a $\Delta h(x) - d(x) = l(x)$ értéke közvetlenül meghatározható. Ily módon lineáris programozási feladat megoldására nincs szükség.

A $d(x)$ -et oly módon tudjuk meghatározni, hogy a merevtestszerű elmozdulással rendelkező test szabadságfokának megfelelő számú pontban a kezdeti hézag $\Delta h(x)$ megváltozását zérusra írjuk elő. Ezáltal a $d(x)$ -ben szereplő λ_F , illetve λ_M ismertté válik.

Megjegyzés-7: A (2.21) felírásakor feltételeztük, hogy a $\Delta h(x)$ -ből adódóan a $H(x, x')$, illetve az $f^i(x)$ elmozdulások megváltozásának mértéke jóval kisebb, mint a $\Delta h(x)$. Amennyiben ettől nem tekinthetünk el, úgy a hatásfüggvényt és az ismert elmozdulásokat Taylor-sorba fejtjük:

$$H(x, x') = H_k(x, x') + \left. \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} \right|_k \Delta h(x) + \left. \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x')} \right|_k \Delta h(x') + \dots \quad (2.24)$$

$$f(x) = f_k(x) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial h(x)} \right|_k \Delta h(x) + \dots, \quad (2.25)$$

ahol a k alsó index a kezdeti geometriánál vett értékre utal.

Ekkor a (2.21) helyett a sorbafejtés lineáris tagjaival

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \int_{\Omega'_{opt}} H_k(x, x') p(x') dS' + \frac{f_k^2(x) - f_k^1(x) + h_k(x)}{-h_k(x)} \\ &+ \Delta h(x) - d(x) \\ &+ \int_{\Omega'_{opt}} \left. \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} \right|_k (h(x) + h(x')) p(x') dS' + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial h(x)} \right|_k \Delta h(x) = 0 \quad (2.26) \end{aligned}$$

egyenlet írható, mivel

$$\frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} = \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x')}, \quad f(x) = f^2(x) - f^1(x).$$

A szaggatott vonallal aláhúzott integrál ismeretlenek szempontjából nem lineáris vagyis a (2.23) feladat a (2.26) alatti $g_0(x) = 0$ feltétellel már nem jelent lineáris programozási feladatot.

Amennyiben az optimalizációs érintkezési feladatot iteráció útján kívánjuk felépíteni, akkor az első lépésben a $\partial H/\partial h \equiv 0$, $\partial f/\partial h \equiv 0$ összefüggéseket tételezzük fel, majd a kapott p érintkezési nyomást betéve a szaggatott vonallal aláhúzott integrálba, az integrál a $\Delta h(x)$ -ben lineáris lesz, és így a (2.23) feladat ismételt lineáris programozási feladatnak felel meg. A megoldásból kapott p -t ismételt behelyettesítve az említett integrálba, a (2.23)-at újból megoldjuk. Az iterációt mindaddig folytatjuk, míg az egymást követő $I-1$, I -edik iterációban kapott nyomásokra

$$|p^I(x) - p^{I-1}(x)| \leq \varepsilon$$

vagy a kezdeti hézag megváltozásra vonatkozó

$$|\Delta h^I(x) - \Delta h^{I-1}(x)| \leq \vartheta$$

egyenlőtlenségek fenn nem állnak, ahol ε és ϑ előírt kicsiny értékek.

A megoldásnak a fentiek szerinti felépítésekor, a $H(x, x')$, $f(x)$ függvényeket, illetve azok deriváltjait a kezdeti alakhoz tartozóan számítottuk ki, s nem állapítottuk meg minden iteráció után ezeknek a megváltozott geometriához tartozó értékeit.

A megoldás ilyen felépítése akkor jöhet szóba, amikor a Δh megváltozása nem jelentős. Természetesen a (2.24), (2.25) alatti sorbafejtéseket vékonyfalú szerkezeti elemek érintkezésekor a falvastagság szerinti sorbafejtéssel is helyettesíthetjük. Ekkor a

$$H(x, x') = H_k(x, x') + \left. \frac{\partial H(x, x')}{\partial b(x)} \right|_k \Delta b(x) + \dots,$$

$$f(x) = f_k(x) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial b(x)} \right|_k \Delta b(x) + \dots,$$

képletekből és az alábbiakból látni fogjuk, hogy állandó vastagságú kezdeti szerkezeti elemek esetében a deriváltak kiszámítása igen egyszerűvé válik.

Például prizmatikus tartók esetében, mivel a hatásfüggvény és a külső terhelésből származó elmozdulás formailag

$$H(x, x') = \frac{1}{b^3} \tilde{H}(x, x'), \quad f(x) = \frac{1}{b^3} \tilde{f}(x)$$

alakban állíthatók elő, ezért a szóbanforgó deriváltak a

$$\frac{\partial H(x, x')}{\partial b(x)} = -\frac{3}{b} \tilde{H}(x, x'), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial b(x)} = -\frac{3}{b} \tilde{f}(x)$$

összefüggésekkel számíthatók.

Ekkor, ha a $\Delta h(x)$ kezdeti hézag változást az egyik elem falvastagságának változtatásával érjük el, akkor

$$\Delta h(x) = b_k - b, \quad (2.27)$$

azaz a Δh , a kezdeti falvastagság és az optimálásnál kialakuló falvastagság különbségeként áll elő.

A fentieket figyelembe véve, a (2.26) helyett — feltételezve, hogy a 2-es jelű test falvastagságát változtatjuk meg — a relatív rés értékére a

$$g_0(x) = \int_{\Omega'_{\text{opt}}} H_k(x, x') p(x') dS' + f_k^2(x) - f_k^1(x) + h_k(x) \\ + b_k^2(x) - b^2(x) - d(x) \\ + \int_{\Omega'_{\text{opt}}} \left. \frac{\partial H^2(x, x')}{\partial b^2(x)} \right|_k (b_k^2(x) - b^2(x) + b_k^2(x') - b^2(x')) p(x') dS'$$

$$+ \left. \frac{\partial f^2(x)}{\partial b^2(x)} \right|_k (b_k^2(x) - b^2(x)) = 0 \quad (2.28)$$

kifejezést írhatjuk. Az érintkezési feladat iterációs úton történő megoldásának felépítése azonos a fentiekben javasolttal.

2.5 További optimalizációs problémák

2.5.1 Vezérelt kezdeti hézag változással kapcsolatos optimalizációs feladat.

Gyakran az érintkezési nyomás maximumának minimálását, gyártástechnológiai szempontokat is figyelembe véve, a peremváltoztatás mértékének vezérlésével biztosítják [7]. Ekkor a programozási feladat

$$\begin{aligned} \min \{ & p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p_{\max} - p(x) \geq 0, \\ & p(x) \geq 0, g_0(x) \geq 0, v^+(x)\Delta^+ - \Delta h(x) \geq 0, \\ & -v^-(x)\Delta^- + \Delta h(x) \geq 0, x \in \Omega_{\text{opt}} \}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

ahol $\Delta^+ > 0$ és $\Delta^- < 0$ a peremváltoztatás maximumainak adott értékei.

Mivel a $p(x) g_0(x) = 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel nincs ellenőrizve, ezért a diszkrétizálás után kapott véges dimenziójú lineáris programozási feladat megoldását ellenőrizni kell ennek a feltételnek a szempontjából is. A megoldást a következő lépések révén kapjuk meg [7]: Először is megoldjuk az érintkezési feladatot, amely kijelöli az Ω_p^1 és az Ω_0^1 tartományokat, majd fixálva az Ω_p^1 és Ω_0^1 tartományokat, az Ω_p^1 felett minimáljuk a p nyomást. A lineáris programozási feladat megoldásakor természetesen előfordulhat az, hogy az Ω_p^1 tartomány j jelű pontjában $g_0 > 0$ lesz, illetve az Ω_0^1 tartomány i jelű helyén p_i pozitívrá adódik. Ekkor a következő lineáris programozási feladat megoldásához az Ω_p^2 -be bevesszük az Ω_p^1 i jelű pontját, illetve az Ω_p^2 -be az Ω_p^1 j jelű pontját. Ismételten megoldjuk a lineáris programozási feladatot. A fenti iterációt mindaddig folytatjuk, míg a p_{\max} vagy az Ω_p tartomány azonos nem lesz az előző iterációban kapott értékkel. A [7]-ben tartóra, illetve csap- és hüvelyfeladatra bemutatott példák az iteráció gyors konvergenciájáról tanúskodnak.

2.5.2 Az érintkezési nyomás részleges vezérlésével kapcsolatos optimalizációs feladat. Az előző pontokban felállított feladatok esetében az Ω_{opt} tartomány egésze felett vezéreltük az érintkezési nyomást. Elképzelhető olyan eset is (pl. hengergörgők lekerekítésének meghatározásakor), amikor az Ω_{opt} tartomány Ω_v résztartományán hajtjuk végre a $p(x)$ vezérlését a $g_0(x) = 0$ geometriai feltétel mellett (a terhelésből, a geometriai kialakításból következik, hogy a p_{\max} ezen a tartományon jelenik meg), míg a megmaradó $\Omega_{\text{opt}} - \Omega_v = \Omega_{nv}$ részen $g_0(x) \geq 0$ -t tételezünk fel, továbbá feltételezzük azt, hogy itt a kezdeti rész megváltozása adott függvényen keresztül van kapcsolatban az Ω_v -n kialakuló $h(x)$ -el.

Jelölje az $x \in \Omega_c$ -n kialakuló kezdeti rés megváltozását $\Delta h_c(x)$, míg az $x \in \Omega_{nv}$ tartományon legyen a rés megváltozása $\Delta h_{nv}(x)$. Feltételezésünk értelmében $\Delta h_{nv}(x) = f(\Delta h_v(x))$.

Ekkor a (2.23) feladat helyett a

$$\begin{aligned} \min \{ p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \\ g_0(x) = 0, v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0, x \in \Omega_v, \\ g_0(x) \geq 0, \Delta h_{nv}(x) = f(\Delta h_v(x)) \quad x \in \Omega_{nv} \} \end{aligned} \quad (2.30)$$

feladat fogalmazható meg.

Mivel az Ω_{nv} tartományon a $p(x) g_0(x) = 0$ feltétel nincs ellenőrizve, ezért az optimalizációs feladatot az előző alpontban ismertetett iteráció segítségével oldhatjuk meg.

2.5.3 Az érintkezési feszültség maximumának minimálása a súrlódási teljesítményvesztés figyelembevételével. Az érintkezési nyomás integrálja az Ω_{opt} tartomány feletti N „normál erőt” szolgáltatja:

$$N = \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS_1^{\dagger}. \quad (2.31)$$

Amennyiben síkbeli testeket vizsgálunk, és azok elcsúsznak egymáson (minthogy súrlódásnélküli érintkezési feladatot számolunk, az elcsúszás a testet jellemző síkra merőlegesen történik), úgy a fellépő súrlódóerő arányos az N erővel. Adott s csúszási sebesség esetében

$$P = s \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS \stackrel{\text{def}}{=} N\Theta \quad (2.32)$$

teljesítményvesztés jön létre.

A $\min p_{\max}$ meghatározásakor egyrészt eljárhatunk úgy, hogy megköveteljük a fellépő teljesítményvesztéstől annak adott értéken való alulmaradását, azaz

$$P_{\text{adott}} - \Theta N \geq 0, \quad (2.33)$$

másrészt a célfüggvényt

$$p_{\max} + \psi N \quad (2.34)$$

alakban állítjuk elő, vagyis a ψ értékének felvételével szabályozzuk közvetve a veszteség súlyát.

Az első esetben a lineáris programozási feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} \min \{ p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \\ v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0, g_0(x) = 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}}, \\ P_{\text{adott}} - \Theta N \geq 0 \}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

míg a második esetben:

$$\min \left\{ p_{\max} + \psi \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \right. \\ \left. g_0(x) = 0, v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \right\}. \quad (2.36)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (2.36) alatti feladatnak van-e mindig értelme. Ezzel kapcsolatban áll a következő tétel:

Tétel-9: Amennyiben az érintkezési feladatban az \mathbf{n}^1 kitüntetett irány $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, úgy a merevtestszerű mozgást végző testre vonatkozó (2.1) egyensúlyi egyenlet értelmében

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS = F_0 = \text{adott},$$

következésképpen a (2.36) alatti feladatnak csak $\psi = 0$ esetében van értelme, illetve amennyiben

$$P_{\text{adott}} < \Theta \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS = \Theta F_0,$$

úgy a (2.33) nem áll fenn, vagyis a (2.35) feladatnak nincs megoldása.

Tétel-10: Amennyiben $\mathbf{n}^1(x) \neq \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, akkor a szóban forgó egyensúlyi egyenlet

$$F_0 - \mathbf{e}_z \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 p \, dS = 0,$$

alakú, és mivel $0 < \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 \leq 1$, ezért

$$F_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS < 0,$$

következésképp a (2.36) feladat felállításának van értelme.

Tétel-11: Amennyiben az érintkezésben álló testek közül az egyik test a másikhoz képest merevtestszerűen elfordulhat, úgy a (2.2) egyensúlyi egyenlet értelmében

$$\mathbf{M}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p \, dS = \mathbf{0},$$

és így a (2.36) feladat felállításának van értelme, hiszen az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS$$

integrálnak nincs előre lerögzített értéke.

Tétel-12: Amennyiben az érintkezésben álló testek egymáshoz képest merevtestszerűen eltolódnak és elfordulnak, úgy a kitüntetett irányra vonatkozó $\mathbf{n}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z$ $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel teljesülésekor a Tétel-9 értelmében a (2.36) alatti optimalizációs feladatnak csak $\psi = 0$ esetében van értelme.

2.5.4 A csúsztató feszültség maximumának minimálásával kapcsolatos optimalizációs feladat. A golyós, görgős csapágyak élettartamának szempontjából kedvezőtlen az érintkezési tartomány alatti pontokban kialakuló, — a golyónak vagy görgőnek a pályán történő legördülésével párosuló — váltakozó előjelű csúsztató feszültség. A maximális csúsztató feszültség csökkentése az élettartam növekedését eredményezi. A szerkezet működéséből adódóan mindig ki lehet jelölni a test olyan

$$V_{\tau}^e \quad (e = 1, 2)$$

tartományát, ahol a csúsztató feszültség maximális. Ily módon az alábbi optimalizációs feladatot fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \min \{ \tau_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p \geq 0, \\ g_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}; \tau_{\max} - \int_{\Omega'_{\text{opt}}} T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') dS' \geq 0 \\ \mathbf{x} \in V_{\tau}^e, e = 1, 2 \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ahol $T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — a τ feszültségekhez tartozó hatásfüggvény az e jelű test vonatkozásában.

A $p(\mathbf{x})$ vezérlésének biztosításakor a (2.14) mellékfeltételt is számításba kell venni. Ebben az esetben az optimális kialakítást a

$$\begin{aligned} \min \{ \tau_{\max} + \gamma p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(\mathbf{x}) \geq 0, \\ v(\mathbf{x}) p_{\max} - p(\mathbf{x}) \geq 0, g_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{op}}; \\ \tau_{\max} - \int_{\Omega'_{\text{opt}}} T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') dS' \geq 0 \quad \mathbf{x} \in V_{\tau}^e, e = 1, 2 \} \end{aligned} \quad (2.38)$$

feladat megoldása révén határozhatjuk meg.

A (2.37), (2.38) feladatok megoldásának konkrét számításakor a V_{τ}^e tartományban a τ csúsztatófeszültség „feltérképezése” miatt a számítási idő több, mint azon feladatoké, amelyekben a mellékfeltételek csak az $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományra vonatkoznak.

3. A (2.12) programozási feladat megoldása

A feladat közelítő megoldását választva, az ismeretlen lefutású $p(\mathbf{x})$ nyomásfüggvényt a végeleemes módszer alapján

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}} \quad (3.1)$$

alakban közelítjük meg. Itt $\mathbf{P}^*(x)$ — az approximációs sorvektor, \mathbf{p} — az érintkezési nyomás diszkrét pontbeli értékét tartalmazó vektor (fizikai tartalma a $\mathbf{P}^*(x)$ -ben használatos $P_i(x)$ koordinátafüggvények felvételétől függ [3]). A (3.1)-nek (2.11)-be, illetve (2.1), (2.2)-be történő behelyettesítése, majd a kijelölt integrálások elvégzése után formailag a módosított kiegészítő energia

$$\tilde{J}_c \Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{p}^* \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{p}^* \mathbf{t}, \tag{3.2}$$

illetve az egyensúlyi egyenletek

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

alakúak, amiből a (2.10) alatti variálási feltételeket figyelembe véve, a

$$\delta_p L \Rightarrow \delta \mathbf{p}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = \delta \mathbf{p}^* (\mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{t} - \mathbf{G} \lambda) \equiv \delta \mathbf{p}^* \mathbf{g} \geq 0 \tag{3.4}$$

$$\delta_{\lambda, \mathbf{F}, \mathbf{M}} L \Rightarrow \delta \lambda^* \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \delta \lambda^* (\mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0 \tag{3.5}$$

összefüggések következnek.

A (3.4) egyenlőtlenségből $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ mellett $\delta \mathbf{p}^* > \mathbf{0}$ -nál $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, míg ha a $\delta \mathbf{p}^*$ tetszőleges, akkor $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ adódik. Ily módon a \mathbf{g} -t általánosított rés vektornak lehet tekinteni. A (3.4)-ből egyenest a

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0 \tag{3.6a-c}$$

következik. Ezáltal a (2.12) helyett az érintkezési feladat megoldását a

$$\min \{ \mathbf{p}^* \mathbf{g} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} = -\mathbf{G} \lambda + \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \} \tag{3.7}$$

kvadratikus programozási feladat megoldásán keresztül kapjuk meg.

Látható, hogy a (2.5)–(2.6) feltételeket a (3.6) alattiakkal helyettesítetük. Ez alapján a kontakt nyomás munkája zérus a $g(x)$ rés „elmozduláson”, azaz az

$$\int_{\Omega_i} P_i(x) g(x) dx$$

integrál értéke zérus, ha $p_i > 0$, és megfordítva, zérustól különböző, ha $p_i = 0$. Itt Ω_i az Ω tartomány azon altartománya, ahol $P_i(x)$ zérustól eltérő értékű.

A (3.7) megoldására a szokásos eljárások egyikét alkalmazhatjuk [10].

4. A (2.23) alatti optimálási probléma megoldása

A feladatot ismételten végesdimenziójú programozási feladatra kívánjuk visszavezetni. E célból az érintkezési nyomást a (3.1) szerint, míg a kezdeti rés megváltozását a

$$\Delta h(x) = \mathbf{h}^*(x)\Delta \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \quad (4.1)$$

alakban közelítjük meg. Attól függően, hogy a (4.1) alatti $\mathbf{h}(x)$ -t lokális vagy globális approximáció alapján építjük fel, a Δ diszkrét pontbeli résváltozásokat tartalmaz, illetve fizikai tartalmat nem kölcsönző állandókból összeállított vektornak felel meg.

A (2.21), (2.22) diszkrétizálásának két útját különböztethetjük meg:

1. A súlyozott maradékok módszerét alkalmazzuk.

2. A kollokációs módszert alkalmazzuk (diszkrét pontokban ellenőrizzük).

Az 1. esetben az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} g_0(x) P_i(x) dx, \quad \int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi(x) P_i(x) dx$$

$$(i = 1, \dots, k)$$

integrálokat határozzuk meg. Ekkor formálisan a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k - \mathbf{G}\lambda + \mathbf{R}\Delta = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$\chi(x) \Rightarrow p_{\max} \mathbf{v} - \mathbf{Q}\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (4.3)$$

egyenlet-egyenlőtlenséghez jutunk, ahol \mathbf{H}_k és \mathbf{G} az $\Omega = \Omega_{\text{opt}}$ esetében azonos a (3.7)-ben szereplőkkel.

A 2. esetben $i = 1, \dots, k$ számú pontokban felírva a $g_0(x)$ -t és a $\chi(x)$ -et, formálisan a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k^k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k^k - \mathbf{G}^k \lambda + \mathbf{R}^k \Delta = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

$$\chi(x) \Rightarrow p_{\max} \mathbf{v}^k - \mathbf{Q}^k \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (4.5)$$

diszkrétizált alakokhoz jutunk.

Megjegyzés-8: Ha a $\Delta h(x)$ -et és a $p(x)$ -et altartományonként (elemenként) állandó értékű approximációs függvénnyel approximáljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Q}^k = \mathbf{R}^k = \mathbf{E} \quad \text{egységmátrix.}$$

$$(k, k)$$

Megjegyzés-9: Egyszerűsítés céljából a továbbiakban nem teszünk különbséget a \mathbf{H}^k , \mathbf{H}_k^k stb. mennyiségek jelölése között.

Megjegyzés-10: Mivel a merevtestszerű elmozdulásból származó tag ($-\mathbf{G}\lambda$) és a kezdeti rés változásától függő tag ($\mathbf{R}\Delta$), mértékegységüket tekintve mm,

ezért az ismeretlenek számának csökkentése céljából célszerű ezek összegét használni a programozási feladatban:

$$l = -G\lambda + R\Delta, \tag{4.6}$$

majd a programozási feladatban szereplő p_{\max} , p , l meghatározása után az alábbi megfontolásból meghatározni a λ és a Δ értékeket.

Az l -es test merevtestszerű mozgásának I szabadságfoka esetén I számú pontban a kezdeti hézag megváltozását zérusnak írjuk elő. A (4.6) egyenletet felhasználva, az

$$\begin{aligned} l_1 &= -\tilde{G}(x_1)\lambda, \\ &\vdots \\ l_I &= -\tilde{G}(x_I)\lambda \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a merevtestszerű elmozdulás vektora

$$\lambda = \begin{bmatrix} \tilde{G}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{G}(x_I) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_I \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

és így az

$$R\Delta = l + G\lambda$$

meghatározható, ahonnan az R kvadratikus mátrix inverzének ismeretében a Δ kiszámolható. ($h^*(x) = P^*(x)$ esetében R pozitív definit.) A Δ ismeretében az l -es test megváltozott peremének helykoordinátája:

$$R^{opt}(x) \equiv R^{kezdeti}(x) - h^*(x)\Delta. \tag{4.8}$$

Ezek után a Megjegyzés-10 figyelembevételével írjuk fel a (2.23) alatti optimalizációs feladat diszkretizált alakját:

$$\min \{ p_{\max} \mid p \geq 0, G^*p - q = 0, H_k p - t_k + l = 0, v p_{\max} - Qp \geq 0 \} \tag{4.9}$$

Megjegyzés-11: Amennyiben az l -es test e_z irányú merevtestszerű eltolódással, vagy y tengelykörüli elfordulással rendelkezik, úgy a Tétel-1, -2, vagy Tétel-5, -6 értelmében $\chi(x) \equiv 0$, vagyis a (4.9) alatti programozási feladatban l db egyensúlyi egyenlet, k db érintkezési geometriai egyenlet és k db vezérléssel kapcsolatos egyenlet írható fel a p_{\max} és a $(k, 1)$ típusú p és l vektorok meghatározására. Ily módon lineáris, inhomogén algebrai egyenletrendszer megoldásán keresztül tisztázható az optimálási feladat.

Megjegyzés-12: A (4.9)-ben az \mathbf{l} vektor elemei tetszőleges előjelűek lehetnek. Így a feladat konkrét kiszámításakor az $\mathbf{l} = \mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-$, $\mathbf{l}^+ \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{l}^- \geq \mathbf{0}$ transzformációt hajtjuk végre.

Megjegyzés-13: Amennyiben a (2.23) alatti programozási feladatban $g_0(x)$ -et a (2.26) vagy (2.28) alapján számítjuk, úgy a feladat diszkretizálásakor a (2.24), (2.25) alattiakat is diszkretizálni kell.

Így formailag (2.26)-ból kollokációs diszkretizálásakor (a (4.2)-höz hasonlóan) a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k - \mathbf{G}\lambda + \left(\mathbf{R} + \mathbf{D}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right) \Delta = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

kifejezéshez jutunk, mivel az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} \frac{\partial H(x, x')}{\partial \mathbf{h}(x)} (\Delta h(x) + \Delta h(x')) p(x') dS' \Rightarrow$$

integrál a

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial H_{11}}{\partial h_1} 2\Delta_1 & \frac{\partial H_{12}}{\partial h_1} (\Delta_1 + \Delta_2) & \dots \\ \frac{\partial H_{21}}{\partial h_2} (\Delta_2 + \Delta_1) & 2 \frac{\partial H_{22}}{\partial h_2} \Delta_2 & \\ \vdots & & \end{array} \right] \mathbf{p} \\ & = \left[\begin{array}{ccc} 2 \frac{\partial H_{11}}{\partial h_1} p_1 & \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial h_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial h_2} \right) p_2 & \dots \\ \vdots & & \end{array} \right] \Delta = \mathbf{D}(\mathbf{p}) \Delta \end{aligned}$$

diszkretizált alakot nyeri a

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} \Big|_{(x_i, x_j)} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial \mathbf{h}}$$

jelölések felhasználásával.

Itt \mathbf{h} és Δ diszkrét pontbeli hézag, ill. hézagváltozás értékekből összeállított vektorok. A $g_0(x)$ -nek a (4.10)-alatti felírása összhangban van a (2.26)-nál elmondott iterációval, amennyiben a \mathbf{D} -ben szereplő \mathbf{p} -t az előző iterációból vesszük.

Megjegyzés-14: Amennyiben az érintkezésben álló testek érintkezési feladatakor a testekben kialakuló elmozdulásmezőt a végeselemes elmozdulás módszerrel határozzuk meg, úgy a \mathbf{H} , az \mathbf{f} a $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{h}$ és a $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{h}$ előállítását a Függelék szerint végezhetjük el.

5. Az érintkezésben álló szerkezeti elemek kopásának hatása az érintkezési feladat megoldására

A kopás előrehaladtával a testek közötti „kezdeti hézag” változik, és ezért a kialakuló feszültségállapot, valamint a testek közeledése is eltér a kopás megkezdésekor kapott értékektől. A tervező, üzemeltető mérnök számára érdekes lehet a kopás hatásának vizsgálata.

Tételezzük fel, hogy a vizsgált síkbeli testek egymáshoz képest síkjukra merőlegesen elcsúsznak. Ekkor a [11]-ben használatos hipotézis szerint az x helyen keletkező kopás az

$$\int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \tag{5.1}$$

integrál segítségével számítható, ahol \tilde{K} az anyagtól, a felületminőségétől, a testek közötti súrlódási tényezőtől függő állandó, $s(x, \tau)$ a testek x pontbeli relatív sebessége, $p(x)$ az érintkezési nyomás.

A (2.1)–(2.4) és az (5.1) alapján az

$$F = 0, M = 0 \tag{5.2a, b}$$

$$g(x) = \int_{S'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) - d(x) + \int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \geq 0, \tag{5.3}$$

$$p(x) g(x) = 0, p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega \tag{5.4a, b}$$

egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer megoldása jelenti a kopáskor jelentkező érintkezési feladat megoldását.

Az érintkezési nyomást

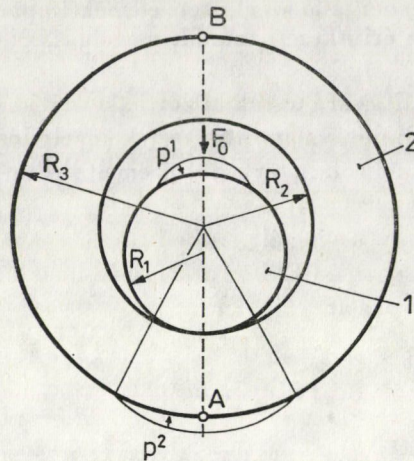
$$p(x, t) = P^*(x) p(t) \tag{5.5}$$

alakban közelítjük meg. Az időbeli diszkrétizáláskor $\Delta\tau$ időlépés intervallumban állandó érintkezési nyomást tételezünk fel. Ekkor az $i = j-1$ -edik időpillanatot (időintervallumot) követő j -edik időintervallumbeli állapotot a

$$\min \left\{ p_j^* g_j \mid p_j \geq 0, g_j = -G\lambda_j + H p_j - t + \sum_{s=1}^{j-1} K p_s \geq 0, G^* p_j - q = 0 \right\} \tag{5.6}$$

programozási feladat megoldása szolgáltatja, ahol az

$$\int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \Rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{K}s_i(x) \Delta\tau_i p_i(x)$$



5. ábra. Síkbeli — tárcsa és körgyűrű alakú — testek érintkezési feladata

kifejezés térbeli diszkrétizálásából nyerjük az (5.6) alatti szummációs kifejezést. Itt $p_i(x)$, $w_i(x)$ a $\Delta\tau_i$ időintervallumbeli érintkezési nyomás, illetve sebesség értéke.

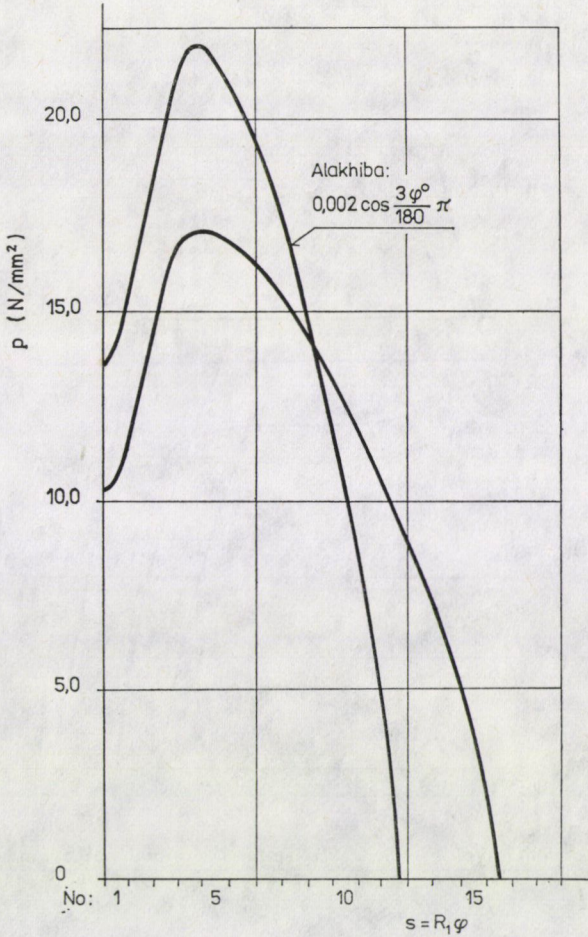
Látható, hogy a kopás a $\Delta\tau_i$ időintervallumban kialakuló nyomás értékével egyenes arányban változik. A \tilde{K} értékét kísérletekből ismerve, az (5.6) feladatot időlépésként megoldva követhetővé válik a kopás befolyása az Ω_p érintkezési tartomány és a $p(x, \tau)$ nyomás függvény alakulására.

6. Példák

6.1 A fentiek illusztrálására vizsgáljuk az 5. ábrán vázolt általánosított síkfeszültségi állapotban levő 1-es jelű kör alakú és a 2-es jelű körgyűrű alakú tárcsák normál érintkezési feladatát. Feltételezzük, hogy a 2-es jelű test A pontjának elmozdulása zérus, a terhelés pedig az ábrán vázolt módon az A , B pontokat összekötő tengelyre szimmetrikusan oszlik meg. Eredőjük a szóban forgó tengely irányába mutat. A megoszlóterhelés p^1 és p^2 sűrűségének értékei, az érintkezési feladat megoldásával tisztázott Ω_p tartomány felett megoszló p érintkezési nyomásból, a testekre felírható egyensúlyi egyenletek kielégítéséből számíthatók.

A testek geometriai méretei: sugarak: $R_1 = 40$ mm, $R_2 = 40,01425$ mm, $R_3 = 55$ mm; vastagságuk: $V = 20$ mm. Anyaguk azonos, csúsztató rugalmassági tényezőjük: $G = 73575,0$ N/mm², míg Poisson-féle tényezőjük: $\nu = 0,3$. A terhelés függőleges irányú eredője: $F_0 = 10$ kN.

Az érintkezési nyomást $2k$ számú $2\beta \cdot R_i$ ($i = 1, 2$) hosszúságú ívszakasz felett állandó sűrűségű terheléssel helyettesítjük [12].

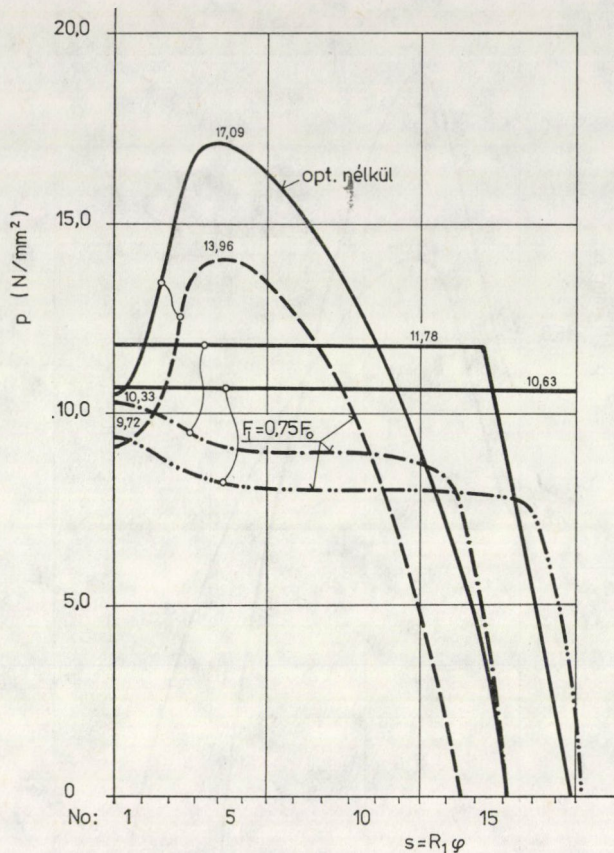


6. ábra. Az érintkezési nyomásfüggvény megoszlása a tárcsa pereme mentén $k = 18$ altartomány felett constans értékű nyomással történő approximációval számolva

6.1.1 Az F_0 terhelés hatására kialakuló érintkezési nyomás megoszlását a 6. ábra 1 jelű görbéje szemlélteti, amely jelentősen eltér a Hertz-elmélete szerint számítottól.

6.1.2 A 6. ábrán a $0,002 \cdot \cos \frac{3\varphi}{180} \pi$ mm alakhibájú R_1 sugárral készített 1-es test esetében kialakuló érintkezési nyomás megoszlását az alakhiba jelű görbe tünteti fel. Látható, hogy $2 \mu\text{m}$ -es alakhiba a p_{max} kb. 20%-os növekedését okozta az alakhiba nélküli esetben kapotthoz képest.

6.1.3 Az érintkezési nyomás optimalizálásával kapcsolatosan $k = 18$ db altartomány által kijelölt optimalizációs tartomány esetében a (2.15), (2.16a, b) és a (2.17a, b) alatti vezérlési függvény felvétele mellett oldjuk meg a feladatokat. A C^1 osztályú átmenetnél az $\Omega_{\text{átmenet}}$ -i tartományt $k = 9, 11, 13$ számú



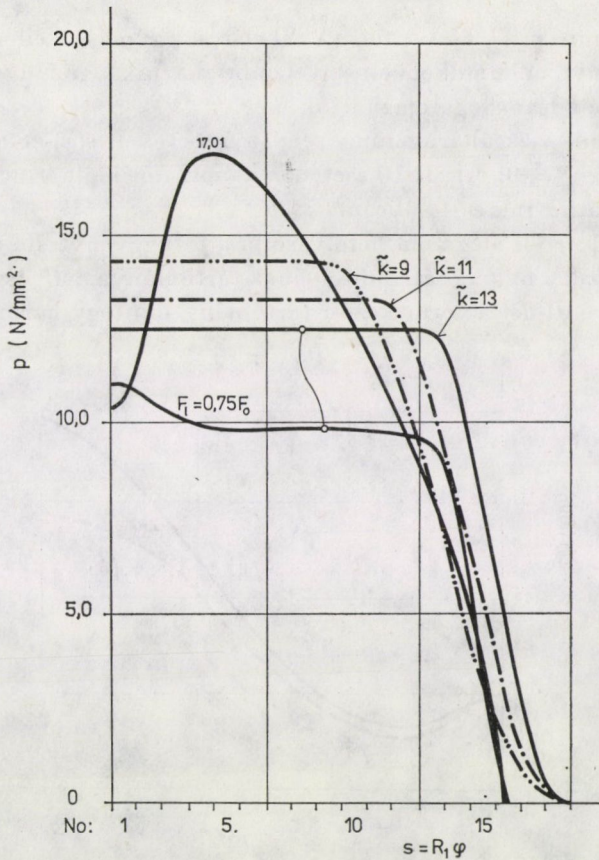
7a. ábra. $k = 18$ altartománnyal kijelölt $\Omega_{\text{opt}}/2$ esetén az optimalizált nyomásfüggvény lefutása állandó és trapéz alakra történő vezérléskor

altartományok által kijelölt L_1 (lásd 3. ábra) tartományi hosszal jelöljük ki: $(k - \tilde{k}) \cdot 2\beta \cdot R_1$.

Az érintkezési nyomás lefutását, illetve a kezdeti hézag megváltozását a 7. és 8. ábrák tüntetik fel. Látható, hogy a Tétel—5 értelmében a $p(x)$ függvény valóban hozzásimul a $v(x)$ p_{max} burkoló függvényéhez. Az $F_I = 0,75 F_0$ csökkentett terheléskor az F_0 -nál optimalizált alakú nyomáseloszlástól eltérő függvényt kapunk. Ezekben az esetekben az 1-es test merevtestszerű eltolódásából adódóan, a csökkentett terheléshez tartozó p_{max} kisebb lesz, mint az optimalizálnál kapott érték.

Figyelemreméltó, hogy a 8. ábrán vázolt kezdeti hézagváltozások $1 \div 1,5$ μm -es értéke az érintkezési nyomás lényeges változását okozza.

A 9. ábra az Ω_{opt} tartomány hosszának (k altartományok számának) függvényében a p_{max} -ot az $N = V \int_{\Omega_{\text{opt}}} p(x) R d\varphi$ „normál erőt” és az 1-es test középső pontjának függőleges irányú λ_F eltolódását tünteti fel.



7b. ábra. $k = 18$ altartománnyal kijelölt $\Omega_{opt}/2$ esetében az optimalizált nyomásfüggvény lefutása a C^1 osztályú átmenetet biztosító alakra történő vezérléskor

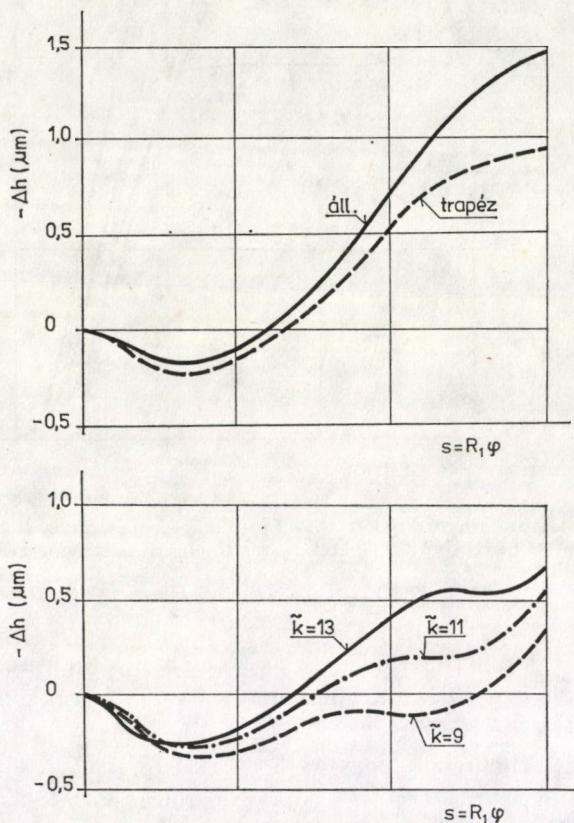
A 9a. ábrán kapott eredmények összhangban állnak a Tétel-1-ben megfogalmazottakkal, vagyis az Ω_{opt} növelésével a p_{max} csökken, és legkisebb a $v(x) = 1$ melletti vezérléskor.

A 9b. ábra görbéi jelzik, hogy az N normálerő az Ω_{opt} növelésével szintén növekszik. Amennyiben a testek síkjukra merőlegesen elcsúsznak egymáson, úgy a fellépő súrlódóerő arányos az N erővel. Tehát, ha a tervező azt a célt tűzi ki, hogy az optimalizáláskor kialakuló N ne legyen nagyobb, mint az optimalizálás nélküli esetben kapott érték, akkor látható, hogy állandó nyomás esetében ezt nem lehet biztosítani. A trapéz alakú nyomáeloszláskor $k \leq 10$ altartománynak megfelelő Ω_{opt} tartomány vehető csak fel. Ugyanakkor, ha megköveteljük a p_{max} , optimált $\geq p_{max}$, optimalás nélküli egyenlőtlenséget, akkor a vizsgált esetben az Ω_{opt} a $9 < k < 11$ számú altartomány által megadott tartományban változhatik csak.

Vagyis a $\min p_{\max}$ illetve $\min N$ cél elérése egymással ellentétes követelmények. Amennyiben mindkét célt figyelembe akarjuk venni, úgy a (2.36) alatti programozási feladatot fogalmazhatjuk meg.

Az általunk vizsgált rugalmas rendszer esetében $v(x)$ -et a (2.17) szerint megválasztva, a $\psi = 0; 0,1; 1; 10$ esetében kapott optimált érintkezési nyomás függvényeket láthatjuk a 10. ábrán.

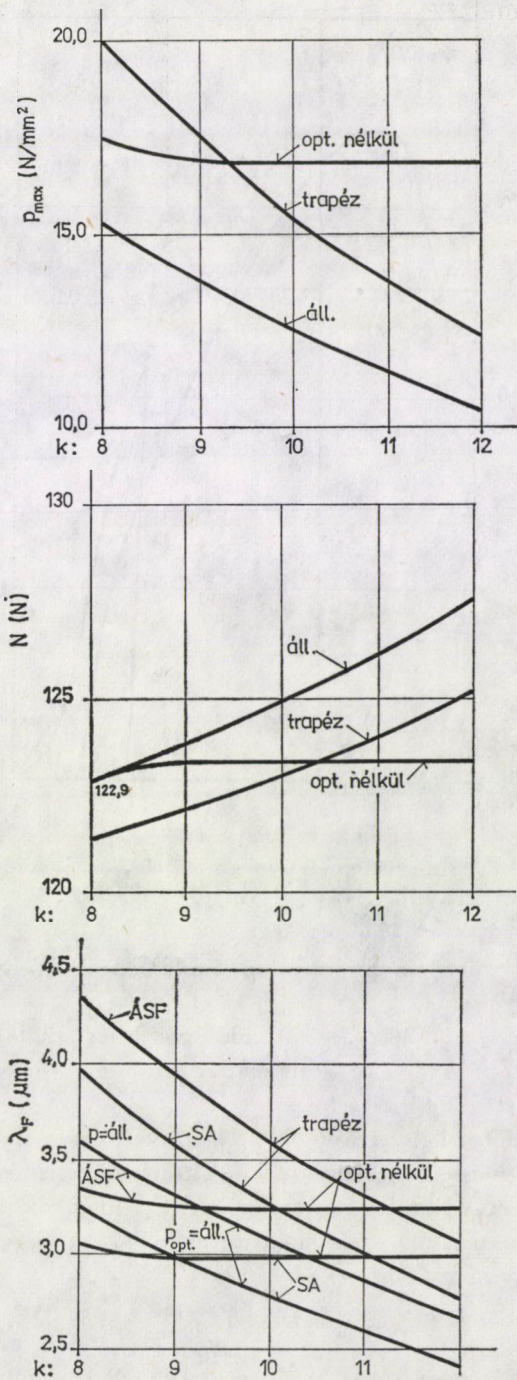
A $\psi = 0,1$ érték még nem befolyásolja a p függvényt, de már $\psi = 1$ -nél, ha nem is változik a nyomás állandóságának tartománya, a C^1 osztályú átmenet megszűnik. $\psi = 10$ -nél az érintkezési tartomány mintegy harmadára csökken



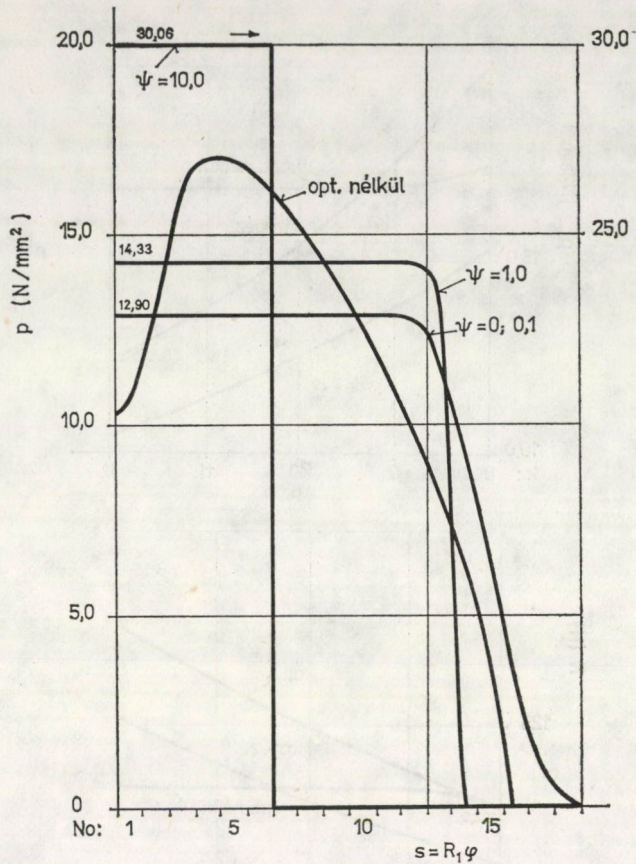
8. ábra. Optimalizált érintkezési nyomást biztosító Δh kezdeti hézag változások

le, a p_{\max} mintegy 2,34-szeresére növekszik a $\psi = 0$ -nál kapottak. A súrlódási veszteség csökkenése a p_{\max} nagymértékű növekedéséhez vezet.

6.4 Vizsgáljuk meg az 5. ábrán vázolt szerkezet kopását abban az esetben, ha az 1-es jelű elem a tárcsa síkjára merőlegesen mozdul el állandónak tekinthető $K = 1 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^3/\text{N}$ kopási mérték mellett. Az (5.6) alatti $\mathbf{K} = \langle K, \dots,$



9. ábra. P_{max} , N , λ_F változása az Ω_{opt} tartomány méretének (k altartomány számának) függvényében. ÁSF — általánosított sík feszültségi állapot, SA — sík alakváltozás

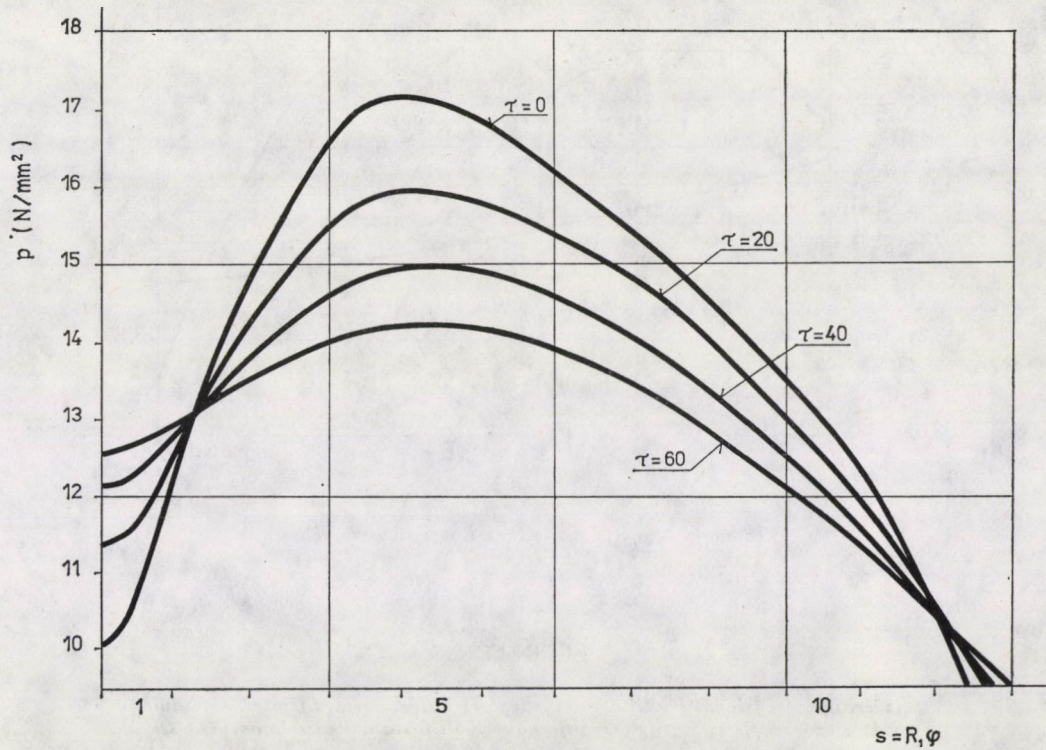


10. ábra. Optimalizálás „kettős” célfüggvénnyel. Az érintkezési nyomás lefutása (2.17) vezérlő függvény esetében $\psi = 0, 0,1, 1, 10$ súlyfaktor mellett

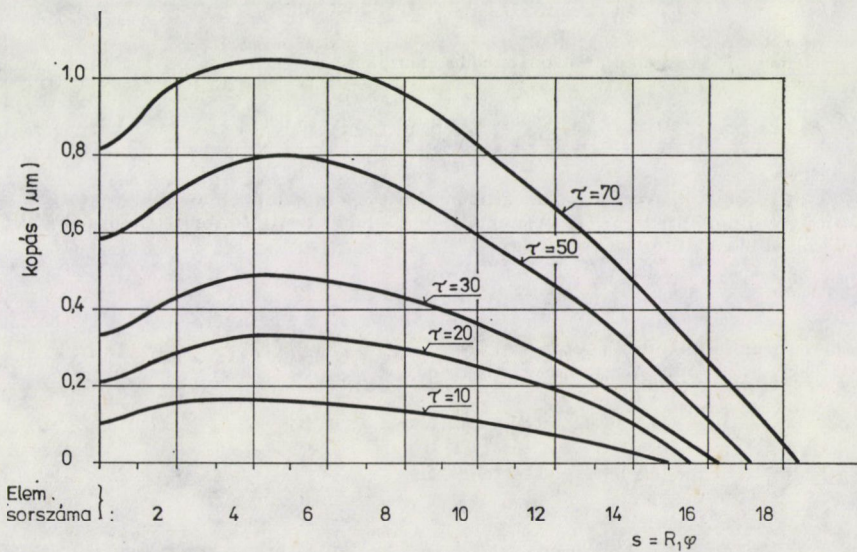
$K >$ diagonál mátrix az elemenként állandónak tekintett p nyomás approximációjából adódóan.

A 11. ábra a $\tau = 0, 20, \dots, 60$ „időlépéseknél” kialakuló nyomáeloszlást, a 12. ábra a kopás mértékét, míg a 13. ábra a p_{\max} maximális nyomást és a λ_F közeledés mértékét tünteti fel.

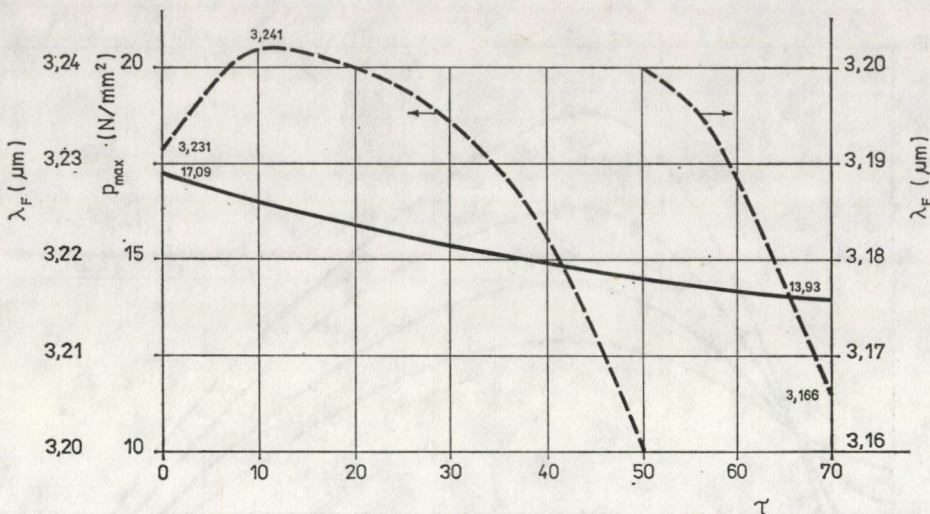
Figyelemre méltó, hogy $1 \mu\text{m}$ -es kopás az érintkezési nyomás maximumának mintegy 20%-os csökkenéséhez vezet. A kopás növekedésével az érintkezési tartomány, és így az N is kismértékben nő. Az eredmények azt mutatják, hogy a p_{\max} csökkenése százalékos összehasonlításban jóval nagyobb, mint az N -el arányos súrlódási veszteség növekedése.



11. ábra. A kopás hatására kialakuló érintkezési nyomás



12. ábra. Kopás mértéke τ „időpillanatban”

13. ábra. A p_{\max} , λ_F változása a τ függvényében

FÜGGELÉK

Az érintkezési feladat felállításánál fellépő \mathbf{H} hatásmatrix, \mathbf{f} ismert elmozdulás vektor és ezek \mathbf{h} szerinti deriváltjainak előállításával kapcsolatos kérdések

A potenciális energia minimuma elvet választva, az érintkezési feladat megoldására a programozási feladat az alábbi:

$$\min \{ \Pi \mid \mathbf{u}_N^e - \mathbf{u}_N^h + \mathbf{h} \geq \mathbf{0} \}, \quad (\text{F.1})$$

anol vége-selemes módszer alapján a potenciális energia

$$\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}^{e*} \mathbf{S}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{e*} \mathbf{q}^e \right]. \quad (\text{F.2})$$

Itt \mathbf{S}^e — a merevségi mátrix, \mathbf{u}^e — az általánosított csomóponti elmozdulásvektor, \mathbf{q}^e — az általánosított csomóponti terhelési vektor, \mathbf{u}_N^e — az e jelű test kitüntetett „normális” irányú elmozdulásából összeállított vektor, azaz

$$\mathbf{u}_N^e = \mathbf{A}^e \mathbf{u}^e, \quad (e = 1, 2) \quad (\text{F.3})$$

\mathbf{h} — kezdeti hézagból alkotott vektor.

Az (F.1)-hez rendelt Lagrange-féle függvény

$$L = \Pi - \mathbf{p}^* (\mathbf{u}_N^e - \mathbf{u}_N^h + \mathbf{h}), \quad (\text{F.4})$$

amiből a Kuhn—Tucker-féle feltételek értelmében

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (\text{F.5a—c})$$

következik. Itt \mathbf{p} — az érintkezési nyomással kapcsolatos multiplikátor vektor [13].

A további lépéseket az optimalizációs feladat szempontjából vizsgáljuk. A jelölések egyszerűsítése céljából a kezdeti geometriához tartozó mennyiségeknél az alsó k index jelölést elhagyjuk.

I. Tételezzük fel, hogy a kezdeti rést a merevtestszerűen nem mozgó test felületének megváltoztatásával kívánjuk beállítani. Legyen ez a test a 2-es jelű. Ekkor az (F.5a) értelmében

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{S}^2 \mathbf{u}^2 - \mathbf{q}^2 - \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (\text{F.6})$$

ahonnan az

$$\mathbf{u}^2 = (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p}, \quad (\text{F.6a})$$

illetve az (F.3)-ra való tekintettel, az

$$\mathbf{u}_N^2 = \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p} + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2,$$

azaz

$$\mathbf{u}_N^2 = \mathbf{H}^2 \mathbf{p} + \mathbf{f}^2, \quad (\text{F.7})$$

ahol \mathbf{H}^2 — a 2-es test hatásmátrixa, \mathbf{f}^2 — az ismert terhelésből származó elmozdulás vektor.

Vegyük az (F.6) \mathbf{h} szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \mathbf{S}^2 \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} - \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0},$$

amiből

$$\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}} = (\mathbf{S}^2)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} + \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} \right).$$

Az (F.3) értelmében

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \mathbf{A}^2 \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.9})$$

illetve $\partial \mathbf{u}_N^2 / \partial \mathbf{h}$ értéke az (F.7) alapján

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{H}^2 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}}. \quad (\text{F.10})$$

Az (F.9), (F.10) összevetéséből az (F.6a) és az (F.8) figyelembevételével az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} - \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) \left((\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p} \right) + \\ + \mathbf{A}^2 \left((\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} \right) + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} \right), \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial \mathbf{h}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial \mathbf{h}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.12})$$

vagyis a \mathbf{H}^2 , \mathbf{f}^2 mennyiségeknek a \mathbf{h} vektor elemei szerint vett deriváltjai az \mathbf{A}^2 , \mathbf{S}^2 mátrixok deriváltjain keresztül fejezhetők ki.

Vizsgálatainkat korlátozzuk vékonyfalú elemekre. Vékonyfalú elemeknél (Kirchhoff—Love hipotézisre épülő héjlemeletnél, Bernoulli-féle hipotézisre épülő prizmatikus tartóknál) a merevségi mátrix deriváltjának kiszámítása állandó falvastagság esetében igen egyszerű. Ugyanis ezekben az esetekben a merevségi mátrix

$$\mathbf{S}^2 = (b^3) \mathbf{S}_0^2 \quad (\text{lemezeknél, héjaknál}) \quad (\text{F.14})$$

$$\mathbf{S}^2 = \frac{\mathbf{S}_0^2}{(b^3)} \quad (\text{tartóknál}) \quad (\text{F.13})$$

alakban képezhető, ahol b — a lemez, héj vastagsága, a tartó magassága, és így lemezeknél

$$\frac{\partial S^2}{\partial h_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b} = 3(b)^2 S_0^2 = \frac{3}{b} S^2, \quad (\text{F.15})$$

míg a tartónál

$$\frac{\partial S^2}{\partial h_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b} = -\frac{3}{b} S^2. \quad (\text{F.16})$$

Amennyiben az Ω tartományon a lemez, héj, tartó szakaszonként (elemenként) állandó, de különböző vastagságú, úgy a fenti deriváltakat elemenként kell venni.

Mivel az A^2 a jelen felállításban „projektor” mátrix (A^2 -ből az u_N^2 kitüntetett irányba eső elmozdulásokat állítja elő), ezért annak deriváltja zérus. (Vékonyfalú elemeknél az u_N^2 -t a középfelület elmozdulásának tekintjük és az érintkezési-elválási feltétel felírásakor vesszük csak figyelembe a falvastagságot a h elemeinek meghatározásakor.) A $\partial q^2/\partial h$ derivált csak akkor különbözik zérustól, ha a testre térfogaton megoszló terhelés vagy hőterhelés hat.

Ily módon vékonyfalú, állandó falvastagságú elemekből felépített rugalmas héjszerkezet esetében a falvastagság megváltoztatásából adódóan a hatásmátrix deriváltja

$$\frac{\partial H^2}{\partial b} = -A^2 [(S^2)^{-1} S^2 (S^2)^{-1} A^{2*}] \frac{3}{b} = -\frac{3}{b} H^2, \quad (\text{F.17})$$

míg prizmatikus tartóknál

$$\frac{\partial H^2}{\partial b} = \frac{3}{b} H^2. \quad (\text{F.18})$$

2. Térjünk át arra az esetre, amikor a kezdeti hézag változásából adódó geometriai változtatást az 1-es jelű, merevtestszerű mozgást végző testen kívánjuk végrehajtani.

A [13] munka eredményeit felhasználva írhatjuk, hogy az érintkezést-elválást kifejező geometriai egyenlőtlenség

$$y^{(0)} = H p - G u_1^1 - t = 0, \quad (\text{F.19})$$

ahol

$$\begin{aligned} H &= H^1 + H^2, \quad H^1 = A_{11}^1 (S_{22}^1)^{-2} A_{11}^{1*}, \\ H^2 &= A^2 (S^2)^{-1} A^{2*} \quad \text{— a hatásmátrixok,} \\ G &= A_1^1 - A_{11}^1 (S_{22}^1)^{-1} S_{21}^1 \quad \text{— a geometriai mátrix,} \\ t &= f^1 - f^2 - h \quad \text{az ismert terhelésből, kezdeti} \\ &\quad \text{geometriából származó vektor,} \\ f^1 &= A_{11}^1 (S_{22}^1)^{-1} q_{11}^1, \quad f^2 = A^2 (S^2)^{-1} q^2. \end{aligned}$$

Itt S_{22}^1 az 1-es jelű test merevségi mátrixának invertálható része, A_{11}^1 az S_{22}^1 mátrixot szorzó elmozdulásokhoz tartozó A^1 „projektor” mátrix része, u_1^1 a merevtestszerű mozgást biztosító elmozdulásvektor, q a terhelési vektor.

Jelen esetben a normálirányú elmozdulásvektor

$$u_N^1 = A_1^1 u_1^1 + A_{11}^1 u_{11}^1. \quad (\text{F.20})$$

Az

$$L = \Pi - p^* (A^2 u^2 - A^1 u^1 + h) \quad (\text{F.21})$$

Lagrange-féle függvényből a már használt (F.5a) feltételből az

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_{11}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_{11}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^1 \\ A_{11}^1 \end{bmatrix}^1 p = 0 \quad (\text{F.22})$$

egyenlethez jutunk.

Az (F.20) egyenletet h szerint deriválva, majd az (F.22)-ből az u_{11}^1 elmozdulást kifejezve, illetve annak deriváltját véve, behelyettesítés és rendezés után az

$$u_N^1 = H^1 p + G u_1^1 + f^1 \quad (\text{F.23})$$

egyenletre is tekintettel, a

$$\frac{\partial u_i^1}{\partial h} = - \frac{\partial H^1}{\partial h} p + \frac{\partial G}{\partial h} u_i^1 + \frac{\partial f^1}{\partial h} - H^1 \frac{\partial p}{\partial h} + G \frac{\partial u_i^1}{\partial h}$$

kifejezés adódik, ahol a H^1 hatásmátrix deriváltja

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial A_{II}^{1*}}{\partial h} + \frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*} - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*}, \quad (F.24)$$

a geometriai mátrix deriváltja pedig

$$\frac{\partial G}{\partial h} = \frac{\partial A_I^1}{\partial h} - \frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} S_{21}^1 + A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} S_{21}^1 - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{21}^1}{\partial h}, \quad (F.25)$$

végezetül az ismert f^1 elmozdulás deriváltja

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_i^1}{\partial h} + \left(\frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} \right) (S_{22}^1)^{-1} q_{II}^1. \quad (F.26)$$

Következésképpen

$$\frac{\partial (S_{22}^1)^{-1}}{\partial h} = - (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1}.$$

A kezdeti geometriánál állandó b vastagságú lemezt, illetve héjat feltételezve, $\partial A^1 / \partial h = 0$ mellett a

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = \frac{\partial H^1}{\partial b} = - \frac{3}{b} A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*} = - \frac{3}{b} H^1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = - \frac{3}{b} A_{II}^1 (H^1 + (S_{22}^1)^{-1}) S_{21}^1,$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_i^1}{\partial h} - \frac{3}{b} f^1$$

eredményeket nyerjük. Az (F.24)–(F.26) összefüggéseket prizmatikus tartóra felhasználva, a

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = \frac{3}{b} H^1, \quad \frac{\partial G}{\partial h} = \frac{3}{b} A_{II}^1 (H^1 + (S_{22}^1)^{-1}) S_{21}^1$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_i^1}{\partial h} + \frac{3}{b} f^1$$

deriváltakat kapjuk.

IRODALOM

1. CONRY, T. F.—SEIREG, A.: A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact, *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E.*, **38** (June 1971), 387–392
2. Журавлева, Т. А.—Пановко, Й. Г.: О некоторых особенностях изгиба балок при односторонней связи упругим основанием, *Строительная механика и расчет сооружений*, № 3 (1971) 18–21
3. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Some Remarks on the Solution of Contact Problems of Elastic Shells, *Archivum Budowy Maszyn*, **24** (1977), 187–202
4. SINGH, K. P.—PAUL, B.: Stress Concentration in Crowned Rollers, *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B*, **97** (August 1975), 193–196
5. OH, K. P.—TRACHMAN, E. G.: A Numerical Procedure for Designing Profiled Rolling, *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, Series F*, **98** (Oktober 1976), 68–75

6. HARNETT, M. J.: The Analysis of Contact Stresses in Rolling Element Bearings, *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, Series F, **101** (January 1979), 105—109
7. HAUG, E. J.—KWAK, B. M.: Contact Stress Minimization by Contour Design, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **12** (1978), 917—930
8. Пацельт, И.: Применение квадратичного программирования в контактных задачах теории упругости, *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry*, Series D., Natural Science, Vol. **33** (1979), 171—221
9. PÁCZELT, I.: Some Optimization Problems Connected with Contact Problems in the Linear Theory of Elasticity, *Variational Methods in Mechanics of Solids*, Ed. by S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, Oxford 1980
10. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, „Springer-Verlag“ Berlin 1962
11. Галин, Л. А.—Горячева, И. Г.: Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа, *ПММ*, **41** (1977), 807—812
12. PÁCZELT, I.—NÁNDORI, F.—ECSEDI, I.: Néhány síkragalmasságtani érintkezési feladat megoldása kvadratikus programozás segítségével, *NME Mechanikai Tanszék*, 1977 (kézirat)
13. PÁCZELT, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method, *Acta Techn. Hung.* **82** (1976), 353—375

Optimization of the Distribution of the Contact Pressure. — A procedure simply realizable by calculation technique is presented to be used to the optimization of the distribution of the contact pressure produced in case of a contact without friction. The minimum of the highest pressure is searched for in such a way that in the vicinity of the border of the contact region the progression of the pressure should assure the condition that the stress pattern developing at the transmission of the load is not singular at the points of the region of contact. This can be realized by a suitable formation of the bounding surfaces of bodies. The optimum form might be produced by solving linear programming problem. Propositions are established in connection with the control of the pressure and the effect of the power loss by friction, on minimizing the highest pressure, is investigated. In case of thin-walled shells and plates as well as prismatic beams, the effect of the change in the wall thickness taking place as a result of optimizing, will be taken into consideration by the development in series of the effect-function according to the Taylor series. In case of the method of finite element displacement, the problems of the influence-matrix and the production of the displacements caused by known loadings and their derivatives, with respect of the gaps, are investigated. Numerical examples are presented for controlling the pressure in case of the contact of ring-formed plane solids and the time-dependent progress of wear in proportion to the contact pressure is analysed.

Optimierung der Verteilung des Kontaktdruckes. — Es wird ein rechnerisch einfach realisierbares Verfahren zur optimalen Verteilung des beim reibungslosen Kontakt auftretenden Kontaktdruckes beschrieben. Der Mindestwert des höchsten Druckes wird mit der Absicht gesucht, daß in der Nähe des Kontaktdruckbereichs die Bedingung, daß der sich bei der Lastübertragung entwickelnde Spannungszustand in den Punkten des Kontaktbereiches nicht singulär sei, gesichert werde. Dies kann durch die entsprechende Ausgestaltung der Grenzoberflächen der Körper erreicht werden. Die Optimalform wird aus der Lösung der linearen Programmierungsaufgabe erhalten. In Zusammenhang mit der Regelung des Druckes wird die Auswirkung des durch die Reibung verursachten Leistungsverlustes auf die Minimalisierung untersucht. Im Fall von dünnwandigen Schalen und Platten, bzw. von prismatischen Trägern wird die Wirkung der bei der Optimierung stattfindenden Änderung der Wanddicke durch die nach der Taylorsche Reihe durchgeführte Entwicklung der Wirkungsfunktion berücksichtigt. Im Fall der Elementenverschiebungsmethode werden die Probleme der Wirkungsmatrix, der durch die bekannten Belastungen hervorgerufenen Verschiebungen und der nach der Lücke Derivierten derselben behandelt. Zahlenbeispiele werden zur Steuerung des Druckes, im Fall des Kontakts von ebenen ringförmigen Körpern, sowie der zeitliche Ablauf der zum Kontaktdruck proportionalen Abnutzung untersucht.