

EGY TENGELYSSZIMMETRIKUS ÉRINTKEZÉSI FELADAT A LINEÁRIS NYOMATÉKI FESZÜLTSGEI RUGALMASSÁGTANBAN

SZEIDL GYÖRGY*

[Beérkezett 1979. február 20-án]

A tanulmány feltérre ható köralakú merev nyomó bélyeg esetét vizsgálja nyomatéki feszültségek hatásának figyelembevételével. Az adódó vegyes kerületiértékfeladat megoldása a klasszikus esethez hasonlóan kettős integrálegyenletekre vezet. Kimutatja a dolgozat, hogy az l^2 anyagjellemző két szélső értékére ($l^2 = 0$ és $l^2 \rightarrow \infty$ esetére) síklappal lehatárolt bélyegnél a klasszikus nyomáeloszlás adódik. Másik megoldásként a kiegészítő munka minimumának elve javasolható. A kiegészítő energia funkcionál minimalizálása Ritz módszerével történik. Számpélda síklappal lehatárolt bélyegre vonatkozik. A megrajzolt diagramok érzékeltetik a klasszikus esettől való eltéréseket.

1. Bevezetés

A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan érintkezési feladataival — ismereteink szerint — eddig csupán az [1] tanulmány foglalkozott. Az idézett mű síkbeli viszonyok között félsíkra ható speciális alakú merev nyomó-bélyeg esetén ad megoldást. A klasszikus esettől eltérően azonban zárt alakú képletek levezetése nem volt lehetséges.

Jelen tanulmány a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan keretei között feltérre ható merev nyomóbélyeg esetét vizsgálja tengelyszimmetrikus viszonyokat feltételezve. A bélyeg és a feltér közötti surlódástól eltekintünk. A megoldás során a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan valameny-nyi feltevését érvényesnek tekintjük [2, 3].

A numerikus megoldáshoz — mechanikai szemléletessége miatt — a kiegészítő munka minimumának elve kerül felhasználásra. Ezzel összefüggésben röviden ismerteti a tanulmány a kiegészítő munka minimuma elvének alkalmazási lehetőségeit a fenti érintkezési problémával azonos jellegű vegyes kerületi érték-feladatok esetén a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtanban.

A klasszikus rugalmasságtan analóg problémájának megoldását számos rugalmasságtani monográfia, így SNEDDON könyve is részletesen ismerteti [13].

* Dr. Szeidl György, 3529 Miskolc, Derkovits u. 54

2. Az érintkezési feladat kettős integrálegyenletekre történő visszavezetése

A vizsgált 1. ábrán vázolt tengelyszimmetrikus peremértékfeladat esetén az r, ϑ, z hengerkoordináták használata célszerű. Legyen a $z = 0$ sík a féltér határolósíkja. Jelölje az elmozdulásvektor összetevőit $(u_r, 0, u_z)$, a nem szimmetrikus feszültségi tenzor nem eltűnő összetevőit $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}, \tau_{zr}, \tau_{rz}$, a nyomatéki feszültségi tenzor deviátoros részének nem eltűnő összetevőit $\mu_{z\vartheta}, \mu_{\vartheta z}, \mu_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta r}$. A féltér határolósíkján

$$\left. \begin{aligned} u_z(0, r) &= u_z = \delta - w_0(r); & 0 \leq r < a \\ \sigma_{zz}(0, r) &= 0; & a < r \end{aligned} \right\} \quad (2.1-1, 2)$$

$$\tau_{zr}(0, r) = \mu_{z\vartheta}(0, r) = 0; \quad 0 \leq r \quad (2.1-3, 4)$$

alakúak a peremfeltételek.

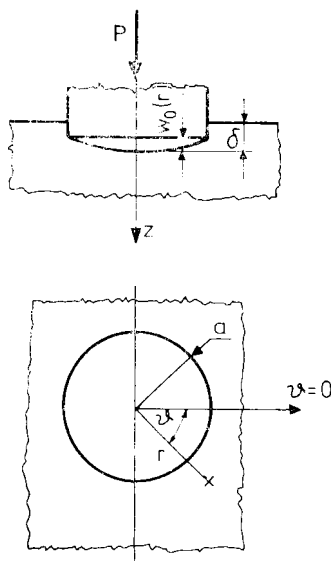
Itt $\delta = \text{const}$, a a bélyeg sugara, $w_0(r)$ pedig a bélyeg felületének formáját meghatározó síma függvényt jelöl.

Megköveteljük, hogy az elmozdulások — merevtestszerű mozgásoktól eltekintünk — és a feszültségek $z \rightarrow \infty$ esetén zérus értékűek legyenek.

A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan Boussinesq feladatának tengelyszimmetrikus viszonyok közötti megoldását a [4] tanulmány közli. A Boussinesq feladatra vonatkozó peremfeltételek a fentiektől csak annyiban különböznek, hogy (2.1–1.2) helyett a

$$\sigma_{zz}(0, r) = p(r) \quad (2.2)$$

egyenlet szerepel, ahol a $p(r)$ előírt terhelés.



1. ábra

Mondottak szerint az u_r , u_z elmozdulásokra, a σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , τ_{rz} , τ_{zr} feszültségekre és a $\mu_{z\theta}$, $\mu_{\theta r}$ nyomatéki feszültségekre vonatkozó [4] (4.10—1, ..., 9) alatti megoldások a jelen esetben is alkalmazhatók, ha ismeretes a bélyeg alatti $p(r)$ feszültségeloszlás. Ennek meghatározásához a [4], (4.10—2,6) alatti egyenletek felhasználásával (2.1—1.2)-ből az alábbi kettős integrálegyenletekhez jutunk

$$\delta - w_0(r) = - \int_0^a \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\bar{p}(k)}{1 + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{l^2 k^2}{2l^2 k^2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} J_0(kr) dk; \quad 0 \leq r < a \quad (2.3-1)$$

$$|\sigma_{zz}(r, 0) = 0 = \int_0^\infty k \bar{p}(k) J_0(kr) dk; \quad a < r. \quad (2.3-2)$$

Fenti összefüggésekben $J_0(kr)$ a zérusrendű elsőfajú *Bessel* függvényt, λ , μ , l^2 anyagi konstansokat, $\bar{p}(k)$ pedig $p(r)$ zérusrendű Hankel transzformáltját jelöli, $n^2 = k^2 + 1/l^2$. A Hankel transzformáció értelmezése [13] és (2.1—2) alapján

$$\bar{p}(k) = \int_0^a r p(r) J_0(kr) dr, \quad p(r) = \int_0^\infty k \bar{p}(k) J_0(kr) dk. \quad (2.4)$$

Az

$$r/a = \varrho; \quad ak = \xi; \quad L^2 = l^2/a^2; \quad N^2 = \xi^2 L^2 + 1$$

összefüggések felhasználásával (2.3) (2.4)-ben új változókra célszerű áttérni. Eszerint:

$$-(\Delta - W_0(\varrho)) = \int_0^\infty \bar{p}(\xi) [1 + G(\xi L)] J_0(\xi \varrho) d\xi; \quad 0 \leq \varrho < 1 \quad (2.5-1)$$

$$a^2 \sigma_{zz}(\varrho) = \int_0^\infty \xi \bar{p}(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi = 0; \quad 1 < \varrho, \quad (2.5-2)$$

ahol

$$G(\xi L) = \alpha \frac{1 - 2L^2 \xi^2 (1 - \xi L/N)}{1 + 2\alpha L^2 \xi^2 (1 - \xi L/N)} \quad (2.6-1)$$

$$W_0(\varrho) = \alpha \beta w_0(\varrho); \quad \Delta = \alpha \beta \delta,$$

továbbá

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 2(1 - \nu), \quad \beta = 2\mu \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} = E \frac{3 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

(E a Young-féle rugalmassági modulus, ν a Poisson szám.)

Vegyük észre, hogy $\lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = 0$.

A (2.5—1.2) alakú kettős integrálegyenletek vizsgálatával elsőként TRANTER foglalkozott [5]. Fredholm típusú másodfajú integrálegyenlet megoldására vezeti vissza a feladat megoldását COOKE tanulmánya [6].

Jelen dolgozat a (2.5—1.2) kettős integrálegyenletek megoldását a [7, 9] tanulmányok alapján ismerteti. Megjegyezzük azonban, hogy a [6, 7]-ben bemutatott eljárások egymással ekvivalensek. A kettős integrálegyenletek elméletét ismertető összefoglaló műként SNEDDON [14] könyve említendő.

3. A kettős integrálegyenletek megoldása

A (2.5—1.2) kettős integrálegyenletek megoldását

$$\bar{p}(\xi) = \int_0^1 \varphi(\eta) \cos \xi \eta d\eta \quad (3.1)$$

alakban keressük, ahol $\varphi(\eta)$ új ismeretlen függvény.

$\bar{p}(\xi)$ fenti előállítására kielégíti a (2.5—2) egyenletet. Ezt $\bar{p}(\xi)$ helyettesítését követő parciális integrálással majd az

$$\int_0^\infty \sin \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi = \begin{cases} (\eta^2 - \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} & \varrho < \eta \\ 0 & \varrho > \eta \end{cases} \quad (a)$$

integrál ([15] 6.671—1) figyelembevételével ellenőrizhetjük.

$\varphi(\eta)$ meghatározására (3.1) (2.5—1)-be történő helyettesítése és az

$$\int_0^\infty \cos \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi = \begin{cases} 0 & \varrho < \eta \\ (\varrho^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} & \varrho > \eta \end{cases} \quad (b)$$

integrál ([15] 6.671—2) felhasználása után az

$$\int_0^\varrho \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{\varrho^2 - \eta^2}} d\eta + \int_0^1 \varphi(\eta) \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi d\eta = W_0(\varrho) - A; \quad 0 \leq \varrho < 1$$

egyenlet adódik. Ha a bal oldalon álló első integrálban az $\eta = \varrho \sin \psi$ összefüggés alapján új változóra térünk át, a második integrálban pedig a Bessel függvények ismert

$$J_0(\varrho \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varrho \xi \sin \psi) d\psi$$

előállítását ([15] 8.411—2) helyettesítjük, akkor az

$$\int_0^{\pi/2} \left[\varphi(\varrho \sin \psi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi(\eta) \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \eta \cos(\varrho \xi \sin \psi) d\xi d\eta \right] d\psi = W_0(\varrho) - A \quad (3.2-1)$$

egyenlethez, végső soron tehát

$$\int_0^{\pi/2} F(\varrho \sin \psi) d\psi = W_0(\varrho) = W_0(\varrho) - A \quad (3.2-2)$$

alakú Schlömlich integrálegyenlethez jutunk.

Utóbbi egyenlet

$$\int_0^{\pi/2} F(\varrho) = \frac{2}{\pi} \left[w(0) + \varrho \int_0^{\pi/2} w'(\varrho \sin \psi) d\psi \right] = \widehat{W}(\varrho) \quad (3.3)$$

megoldásába helyettesítve (3.2-1) alapján $F(\varrho)$ értékét a $\varphi(\varrho)$ -ra vonatkozó

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(\eta) K(\eta, \varrho) d\eta &= \widehat{W}(\varrho) \\ K(\eta, \varrho) &= \bar{G}(\eta + \varrho) + \bar{G}(\eta - \varrho) \\ \bar{G}(\eta) &= \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta d\xi \end{aligned} \quad (3.4)$$

másodfajú, szimmetrikus magú Fredholm típusú integrálegyenlet következik.

A (2.3-2), (3.1) összefüggések alapján (a) felhasználásával ellenőrizhető, hogy a bélyeg alatti feszültségeloszlás, valamint a féltérre ható nyomóerő a

$$a^2 \sigma_{zz}(\varrho) = \frac{\varphi(1)}{\sqrt{1 - \varrho^2}} - \int_{\eta=\varrho}^1 \frac{\varphi'(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \varrho^2}} d\eta \quad (3.5)$$

$$P = -2\pi \int_0^1 \varphi(\varrho) d\varrho \quad (3.6)$$

összefüggésekből számítható.

Nem sík alapú bélyeg nem teljes besüllyedése esetén a $z = 0$ síkon a normálirányú σ_{zz} feszültség folytonos. Ehhez a

$$\varphi(1) = 0 \quad (3.7)$$

egyenlet fennállása szükséges. A bélyeg δ benyomódása és az érintkezési tartomány a sugara a P nyomóerő ismeretében a (3.6), (3.7) egyenletek alapján határozható meg.

4. A klasszikus esettel történő egybevetés és a megoldhatóság kérdése

Legyen a bélyeg sík alapú ($w_0(r) \equiv 0$). Megmutatjuk, hogy a (3.4) alatti integrálegyenlet megoldásából ekkor $L \rightarrow 0$ és $L \rightarrow \infty$ esetén a klasszikus megoldás következik.

1) Az $L \rightarrow 0$ esetben — a határértékeket jobbra fenn álló zérus különbözteti meg — (3.4)-ből

$$\varphi^0(\varrho) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi^0(\eta) K^0(\eta, \varrho) d\eta = -\frac{2}{\pi} \Delta \quad (4.1)$$

következik.

Ismeretes — ([15] 3.741—2) —, hogy

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cos \xi \eta \sin \xi \varrho d\xi = \begin{cases} \pi/2 & \eta < \varrho \\ \pi/4 & \eta = \varrho \\ 0 & \eta > \varrho \end{cases} = \frac{\pi}{2} H(\varrho - \eta), \quad (4.2)$$

ahol H az egységugrás-függvény.

Könnyen meggyőződhetünk arról is (4.2) és (3.4—2.3) felhasználásával, hogy az

$$F_L(\eta, \varrho) = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} G(\xi L) \cos \xi \eta \sin \xi \varrho d\xi \quad (4.3)$$

funkcionál tekintetében [17] rendre teljesülnek az

$$\left. \begin{aligned} F_L^0(\eta, \varrho) &= \frac{\pi}{2} G(0) H(\varrho - \eta) \\ K^0(\eta, \varrho) &= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} F(\eta, \varrho) = \frac{\pi}{2} G(0) \delta(\varrho - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

egyenlőségek, ahol δ a Dirac függvény. A keresett $\varphi^0(\varrho)$ határérték (4.4—2) (4.1)-be történő visszahelyettesítése után adódik:

$$\varphi^0(\varrho) = -2\Delta/\pi(1 + G(0)). \quad (4.5)$$

Ennek birtokában (3.6) és (3.5) felhasználásával számítható a nyomóerő

$$P = 4\Delta/(1 + G(0)), \quad (4.6)$$

és az ismeretlen feszültségeloszlás

$$\lim_{L \rightarrow 0} \sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad 0 \leq r < a. \quad (4.7)$$

2) Az $L \rightarrow \infty$ esetben $K(\eta, \varrho)$ határértéke zérus és így (3.4)-ből a

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \varphi(\varrho) = -2\Delta/\pi \quad (4.8)$$

eredmény következik. Ezzel (3.6)-ból adódik a nyomóerő

$$P = 4A, \quad (4.9)$$

(3.5)-ből pedig a feszültségeloszlás

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad 0 \leq r < a. \quad (4.10)$$

A (4.8), (4.10) összefüggések valóban a klasszikus nyomáseloszlás összefüggései.

Továbbiak a megoldhatóság kérdésével foglalkoznak.

A (3.4) alatti Fredholm típusú másodfajú szimmetrikus magú integrálegyenlet szokásos alakja:

$$\varphi(\varrho) - \lambda \int_0^1 \gamma(\eta) \tilde{K}(\eta, \varrho) d\eta = \hat{W}(\varrho), \quad (4.11)$$

ahol

$$\lambda = 1, \quad \tilde{K}(\eta, \varrho) = -\frac{1}{\pi} K(\eta, \varrho): \quad (4.12)$$

A Fredholm-féle alternatívátétel [18a] értelmében a (4.11) integrálegyenletnek létezik egy és csak egy folytonos megoldása [18b], ha $\lambda = 1$ nem sajátértéke az adjungált homogén integrálegyenletnek. Utóbbi állítás a mag $[0,1] \times [0,1]$ intervallumon való folytonosságára tekintettel akkor is igaz, ha a $[0,1]$ intervallumon szakaszonként folytonos ψ függvények halmazán teljesül az

$$\begin{aligned} I_\delta(\psi) &= \int_\delta^1 \int_\delta^1 \tilde{K}(\eta, \varrho) \psi(\eta) \psi(\varrho) d\eta d\varrho = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_\delta^1 \int_\delta^1 \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \varrho d\xi \psi(\eta) \psi(\varrho) d\eta d\varrho < 0; \quad \delta \in (0, 1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

egyenlőtlenség, azaz, ha a mag negatív definit.

Az

$$I(\eta, \varrho) = \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \varrho d\xi$$

integrál a $\eta \in [\delta, 1]$, $\varrho \in [\delta, 1]$ tartományon egyenletesen konvergens, hiszen $\lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = C/u^2$; $C = \text{állandó}$. Ezt figyelembe véve (4.13)-ban felcserélhetők

az integrálások. Így

$$I_\delta(\psi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(\xi L) \left(\int_\delta^1 \psi(\varrho) \cos \xi \varrho d\varrho \right)^2 d\xi < 0,$$

mivel $G(\xi L) > 0$, hacsak $0 < \xi < \infty$; $L \geq 0$ és $-\infty < \nu \leq 0,5$. Q.e.d.

5. Közelítő megoldás előállítás

A (3.4) Fredholm integrálegyenlet megoldása páros indexű Legendre polinomok szerint haladó sor alakjában kereshető:

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k g_k P_{2k}(\varrho) \\ g_0 &= 1; \quad g_k = (2k-1)!!/2k!! \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

A sor ismeretlen a_k együtthatóinak számítására (3.4)-ből kiindulva ismert módon — pl. [9] — végtelen méretű lineáris egyenletrendszer vezethető le.

A dolgozat az egyenletrendszer levezetését e helyütt nem taglalja, csupán a bélyeg alatti feszültségeloszlás jellegére kíván rámutatni.

A viszonylag egyszerűen ellenőrizhető

$$\int_0^1 P_{2k}(\eta) \cos \xi \eta d\eta = (-1)^k \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2k+1/2}(\xi)$$

integrál segítségével a bélyeg alatti feszültségeloszlás Hankel transzformáltjára (3.1) és (5.1–1) alapján

$$\bar{p}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2k+1/2}(\xi) \quad (5.2)$$

az eredmény.

A [18] 7.7.4 pont (29), 2.9 pont (1), 10.9 pont (21), 10.10 pont (21), (24) formuláinak egymást követő felhasználásával kimutatható, hogy $\varrho \in [0, 1]$ esetén

$$\int_0^\infty \sqrt{\xi} J_{2k+1/2}(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{g_k} (1 - \varrho^2)^{1/2} P_2(\sqrt{1 - \varrho^2}). \quad (5.3)$$

Ezzel a bélyeg alatti feszültségeloszlásra (2.3–2), (5.2)-ből

$$p(\varrho) = \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \varrho^2)^{-1/2} P_{2k}(\sqrt{1 - \varrho^2}) \quad (5.4)$$

következik.

Megjegyzendő, hogy ALEKSZANDROV más úton teljes matematikai szigorúsággal is kimutatta a (2.5) alatti típusú kettős integrálegyenletekre vonatkozó megoldás fenti jellegét [11].

A szemügyre vett érintkezési feladat a Castigliano-féle variációs elv segítségével is tárgyalható. Klasszikus esetben a Castigliano-féle variációs elv érintkezési feladatokra történő alkalmazásával KALKER tanulmánya foglalkozik [10]. A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtanban ezt a lehetőséget a jelen tanulmány függeléke tekinti át. A vizsgált feladatra történő alkalmazást a jelen pontban mutatjuk be.

A függelék (7.10) formulája szerint tengelyszimmetrikus viszonyok esetén a

$$\Phi(p) = \int_0^a p(r) (u_z - 2\dot{u}_z) r dr \quad (5.5)$$

funkcionál minimumát kell meghatározni, ahol u_z az ismeretlen $p(r)$ -hez tartozó megoldás, $\dot{u}_z$ pedig előírt elmozdulás. A (2.1–1) és az $u_z(r, 0)$ -ra vonatkozó megoldást adó (2.3–1) összefüggések alkalmazásával — tekintettel a (2.5–1) levezetése során végzett átalakításokra — (5.5)-ből

$$J(p) = -\frac{2\beta}{a} \int_0^1 (\delta - w_0(\varrho)) \varrho p(\varrho) d\varrho - \int_0^\infty [1 + G(\xi L)] T^2(\xi) d\xi \quad (5.6)$$

adódik. Itt

$$J(p) = \beta \Phi(p)/a^3, \quad (5.7)$$

és

$$T(\xi) = \int_0^1 \eta p(\eta) J_0(\xi \eta) d\eta.$$

Megjegyzendő, hogy ugyanezen funkcionált kapjuk, ha a (3.4) integrálegyenlet megoldására a NOBLE által javasolt variációs módszert használjuk [12, 14].

A $J(p)$ funkcionál minimumát Ritz módszerével keressük. $p(\varrho)$ -t az (5.4) összefüggés szerint választva az ismeretlen a_k együtthatókra a

$$\frac{\partial J(p)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

minimumfeltételből végtelen méretű lineáris egyenletrendszerhez jutunk.

A számítások során célszerű felhasználni a Legendre polinomok ortogonalitását:

$$\int_0^1 P_{2i}(\sqrt{1-\varrho^2}) P_{2j}(\sqrt{1-\varrho^2}) \varrho (1-\varrho^2)^{-1/2} d\varrho = \begin{cases} (4i+1)^{-1} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

és az (5.3) integrált zérusrendű Hankel transzformálnak tekintve a transzformáció megfordításával nyerhető

$$\int_0^1 J_0(\xi\eta) P_{2k}(\sqrt{1-\eta^2}) \eta(1-\eta^2)^{-1/2} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_i \frac{1}{\sqrt{\xi}} J_{2i+1/2}(\xi)$$

kifejezést, továbbá a

$$\delta = w_0(\varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_{2k}(\sqrt{1-\varrho^2})$$

sorfejtést, ahol

$$b_k = (4k+1) \int_0^1 \varrho(\delta - w_0(\varrho)) (1-\varrho^2)^{-1/2} P_{2k}(\sqrt{1-\varrho^2}) d\varrho.$$

Végeredményként az a_k együtthatókra vonatkozó

$$\sum_j A_{ik} a_k = B_i; \quad i, k = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa és jobb oldala tekintetében

$$A_{ik} = g_i g_k [\delta_{ik}/(4k+1) + I_{ik}]; \quad B_k = -\frac{2}{\pi} \frac{\beta a b_k}{4k+1} \quad (5.10)$$

$$I_k = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} G(\xi L) J_{2i+1/2}(\xi) J_{2k+1/2}(\xi) d\xi; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

adódik, ha a [15] 6.538–2 integrált is kihasználjuk:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_{2i+1/2}(\eta) J_{2j+1/2}(\eta) d\eta = \begin{cases} (4j+2)^{-1}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

A (3.7) feltételt a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \quad (5.11)$$

egyenlet fejezi ki.

A nyomóerő értéke

$$P = -2\pi a_0. \quad (5.12)$$

Kimutatható (5.1–1) felhasználásával, követve a [9]-ben leírt gondolatmenetet, hogy (3.4)-ből ugyancsak az (5.9, 10) lineáris egyenletrendszer következik.

Az (5.9, 10) lineáris egyenletrendszer tanulmány által javasolt levezetést a mechanikai gondolatmenet áttekinthetősége indokolja.

Közelítő megoldáshoz — véges számú egyenlethez az — (5.4) sorfejtés véges szeletének felhasználásával jutunk.

6. Számpélda

Numerikus számításokat sík alapú bélyeg esetére végeztünk.

Figyelembe véve, hogy ekkor

$$B_0 = \frac{2}{\pi} \beta a \delta; \quad B_k = 0 \quad k \neq 0$$

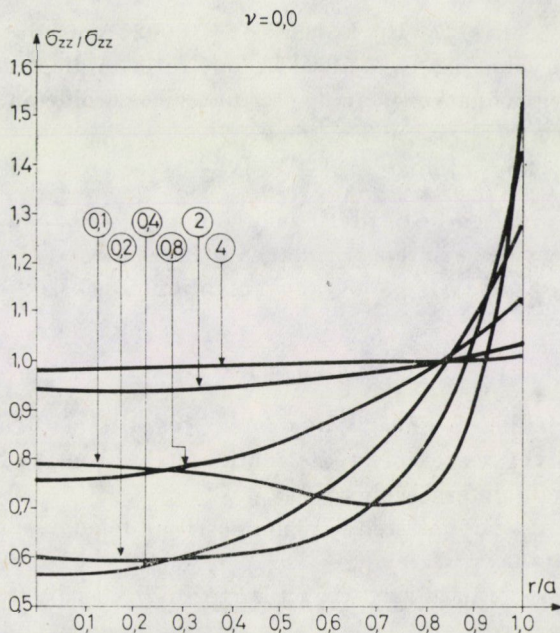
és

$$A_{00} = 1 + I_{00}$$

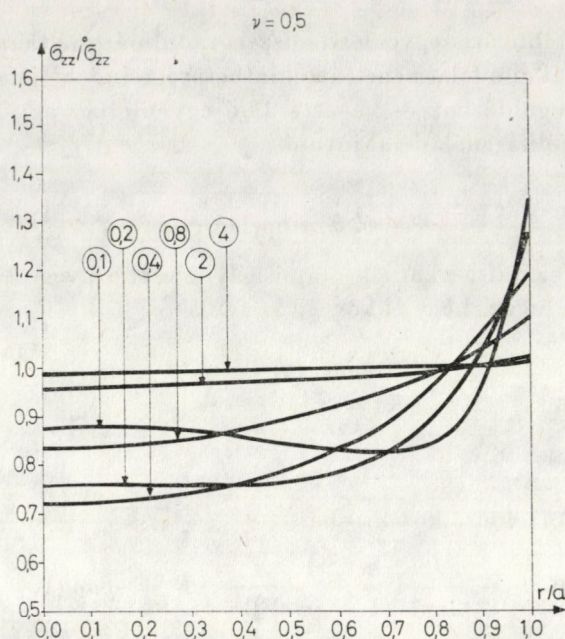
(5.13)-ra is tekintettel első közelítésben

$$\sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad P = 4\beta a \delta / (1 + I_{00}).$$

Innen — I_{00} (5.11—3) szerint L függvénye — $L \rightarrow 0$, és $L \rightarrow \infty$ esetén a (4.6,7) és (4.9,10) formulákhoz jutunk.



2. ábra. A bélyeg alatti σ_{zz} feszültség és a klasszikus esetre érvényes σ_{zz} megoldás hányadosa azonos nyomóerő esetén, ha ν értéke zérus



3. ábra. A hélyeg alatti σ_{zz} feszültség és a klasszikus esetre érvényes $\hat{\sigma}_{zz}$ megoldás hányadosa azonos nyomóerő esetén, ha ν értéke 0,5

A $\nu = 0; 0,5$, $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm², $\delta = 0,0025$ cm adatokra vonatkozó számítási eredményeket a 2. és 3. ábrák szemléltetik. A diagramok jellege meg- egyezik a félsíkra vonatkozó analóg érintkezési probléma kapcsán nyert diagramok jellegével [1].

Jól látszik, hogy $\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{zz} / \hat{\sigma}_{zz} \rightarrow 1$. $L \rightarrow 0$ esetén a határérték szintén egységnyi. Az $L = 0,1$ görbe kezdeti szakaszán az $L = 0,2, 0,4$ esetre érvényes görbékkel összevetve ez szintén érződik. A σ_{zz} feszültség [1]-el azonos karak- tert mutat a hélyeg széle felé haladva: gyorsabban növekszik mint a klasszikus esetben ($\sigma_{zz} / \hat{\sigma}_{zz} > 1$).

7. Függelék

Jelen függelékben a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan egy érintkezési típusú vegyes peremértékfeladata esetén mutatjuk be a Castigliano-féle variációs elv alkalmazási lehetőségét.

A dolgozatban tárgyalt tengelyszimmetrikus feladat az itt bemutatott- nak speciális esete.

A számítások során az (x_1, x_2, x_3) kartéziuszi koordinátarendszert hasz- náljuk és alkalmazzuk a szokásos jelöléseket: δ_{qs} Kronecker szimbólum, ε_{pq} permutációs szimbólum, vessző után álló index koordináta szerinti deriválást jelent, összegezési konvenció néma indexpárra.

Térfogati terhelésektől eltekintünk.

A lineáris nyomatékú feszültségi rugalmasságtan mezőegyenleteit a φ_p szögelfordulásvektort, az ε_{pq} elmozdulási és κ_{pq} forgási alakváltozási tenzort, az u_p elmozdulásvektorral megadó

$$\varphi_q = \frac{1}{2} \varepsilon_{qvr} u_{r,v}, \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} (u_{p,q} + u_{q,p}), \quad \kappa_{pq} = \varphi_{q,p}$$

kinematikai egyenletek,

a centroszimmetrikus esetre érvényes

$$\varepsilon_{pq} = C_{pqrs} \sigma_{(rs)}, \quad \kappa_{pq} = A_{pqrs}^D \mu_{rs} \quad (7.2)$$

Hooke-törvény — C_{pqrs} , A_{pqrs} az anyagi állandók tenzora, $\sigma_{pq} = \sigma_{(pq)} + \sigma_{[pq]}$ a feszültségi tenzor (kerek zárójelben álló indexpár szimmetrikus, szögletes zárójelben álló indexpár ferde szimmetrikus részt jelez), μ_{pq} a μ_{pq} nyomatékú feszültségi tenzor deviátoros része — és a

$$\sigma_{pq,p} = 0, \quad \mu_{pq,p} + \varepsilon_{qrs} \sigma_{rs} = 0 \quad (7.3)$$

egyensúlyi egyenletek alkotják [3].

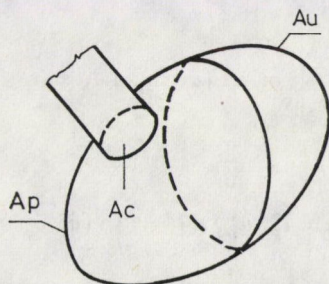
A vizsgált 4. ábrán vázolt testre — melynek határfelületét az egyszerűség kedvéért simának tételezzük fel — az

$$u_s = 0, \quad \varphi_p (\delta_{ps} - n_p n_s) = 0; \quad x_K \in A_u \quad (7.4)$$

$$P_s = n_p \left[\sigma_{(qs)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{qrs} (\mu_{rk,k}^D - \mu_{(n)}^D) \right] = 0; \quad x_k \in A_p \quad (7.5)$$

$$n_p \mu_{pq}^D (\delta_{qs} - n_q n_s) = 0; \quad x_k \in A_p \cup A_c \quad (7.6)$$

$$u_q n_q n_s = \dot{u}_s, \quad P_q (\delta_{qs} - n_q n_s) = 0; \quad x_o \in A_c$$



4. ábra

alakú peremfeltételeket írjuk elő, ahol $\frac{p}{\mu}_{(n)} = n_p \mu_{pq} n_q$, $\dot{u}_s$ pedig $A_c - n$ adott sima függvény.

A fenti peremfeltételek mellett $A_c - n$ — mely az érintkezési tartományt jelenti — csak normálirányú terhelés lehetséges.

A σ_{rs}^* , μ_{rs}^* mezőket statikailag lehetségesnek nevezzük, ha eleget tesznek a (7.3) mezőegyenleteknek és a dinamikai, jelen esetben tehát a (7.5), (7.6–2) peremfeltételeknek.

A kiegészítő munka kifejezése jelen esetben a

$$\pi_c(\sigma_{rs}^*, \mu_{rs}^*) = \frac{1}{2} \int_V (C_{pqrs} \sigma_{(pq)}^* \sigma_{(rs)}^* + A_{pqrs} \frac{p}{\mu}_{pq}^* \frac{p}{\mu}_{rs}^*) dV - \int_{A_c} P_q n_q n_s \dot{u}_s dA \quad (7.7)$$

módon írható.

A Castigliano elv szerint (7.7) a tényleges σ_{rs} , μ_{rs} megoldásánál minimális.

Tekintsünk most egy másik az előző, (a (7.1–3) mezőegyenletek, (7.4), (7.5), (7.6) peremfeltételek által meghatározott) peremértékfeladattól csupán az $A_c - n$ előírt peremfeltételek tekintetében eltérő peremértékfeladatot.

Legyen a

$$P_q n_q n_s = p_s^* \quad x_K \in A_c \quad (7.8)$$

peremelőírás az új peremfeltétel, ahol p_s^* ismert normálirányú terhelés. Tegyük fel, hogy ismeretes a (7.1–3) mezőegyenletek és (7.4), (7.5), (7.6–2), (7.8) peremfeltételekkel megadott új peremértékfeladat megoldása. Ez a megoldás egyben statikailag lehetséges elmozdulás-, szögelfordulásmezőt, alakváltozási és feszültségi tenzormezőket is megad a régi (7.1–3), (7.4, 7.5, 7.6) peremértékfeladatra vonatkozóan.

Az említett módon nyert statikailag lehetséges mezőkkel (7.1,2)-t is kihasználva a (7.7)-ben álló térfogati integrál átalakítható felületi integrállá.

Az átalakítások során (7.3)-t, a (7.3)-ból következő

$$\sigma_{[pq]} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{pqr} \mu_{rk,k}$$

összefüggést, a Gauss tételt és a vizsgált test határoló felületének sima voltából adódó

$$\int_A n_q \varepsilon_{qrs} (\mu u_s)_{(n),r} dA = 0$$

integrált kell kihasználni.

A számítás eredménye:

$$\begin{aligned} \int_V (C_{pqrs} \sigma_{(pq)}^* \sigma_{(rs)}^* + A_{pqrs} \frac{p}{\mu}_{pq}^* \frac{p}{\mu}_{sr}^*) dV &= \int_A (n_p \sigma_{pq}^* \dot{u}_q + n_p \mu_{pq}^* \dot{\varphi}_q) dA = \\ &= \int_A [P_s^* \dot{u}_s + n_p \mu_{pr}^* (\delta_{rq} - n_r n_q) \dot{\varphi}_q] dA. \end{aligned}$$

Erre és a (7.4), (7.5), (7.6—2) és (7.8) peremfeltételekre is tekintettel írható, hogy

$$\pi_c(\dot{\sigma}_{sr}^*, \dot{\mu}_{rs}^*) = \int_{A_c} p_s^* \left(\frac{1}{2} \dot{u}_s - \dot{u}_s \right) dA. \quad (7.9)$$

A vizsgált tengelyszimmetrikus érintkezési feladat esetén A_c a bélyeg által meghatározott a sugarú kör, A_p a féltér határolósíkjának A_c -n kívüli része, A_u a végtelen távoli sík. (A [4] (10.1,2) összefüggések szerint az elmozdulások a végtelen távoli síkon zérus értékűek.), p^* -nak $p(r)$, u_s -nek u_z felel meg (z nem index!). E feladat megoldása tehát a (7.9)-ből adódó

$$\Phi(p) = \int_0^a p(r) (u_z - 2\dot{u}_z) r dr \quad (7.10)$$

funkcionál minimumának megkeresésére vezethető vissza.

IRODALOM

S z a k c i k k e k

1. MUKI, R.—STERNBERG, E.: The influence of couplestresses on singular stress concentrations in elastic solids *ZAMP*, **16** (1965), 611—648
2. MINDLIN, R. D.—TIERSTEN, H. F.: Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, **11** (1962), 415—448
3. KOITER, W. T.: Couple stresses in the theory of elasticity, *Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, **B67** (1964), 17—29, 30—44
4. Сейдл, Д.: Осесимметричная граничная задача в линейной моментной теории упругости. *Publications of Technical University for Heavy Industry, Miskolc, Series-D Natural Sciences* **34** (1979), 27—41
5. TRANTER, C. J.: On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry, *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, **3** (1950), 411—419
6. COOKE J. C.: A solution of Tranter's dual integral equations problem, *Quart. J. Mech. and Applied Math.* **9** (1956), 103—110
7. Лебедев, П. Н.—Уфлянд, Я. С.: Осесимметричная контактная задача для упругого слоя, *ПММ* **22** (1958), 321—326
8. SCHLÖMICH, O.—WITZSCHEL, B.: Ueber die Besselsche Funktion, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **II.**, (1857), 138—165
9. SZEFER, G.—GASZYNSKI, J.: Axisymmetric punch problem under condition of consolidation, *Archives of Mechanics* **27** (1975), 497—515
10. KALKER, J. J.: Variational principles of contact elastostatics, *J. Inst. Maths. Applies* **20** (1977), 199—219
11. Александров, В. М.: О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики, *ПММ*, Вып. 6. (1967), 1117—1131
12. NOBLE, B.: The approximate solution of dual integral equations by variational methods, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **11** (1958), 115—126

K ö n y v e k

13. SNEDDON, I. N.: Fourier transforms, McGraw-Hill, New-York—Toronto—London 1951
14. SNEDDON, I. N.: Mixed boundary value problems in potential theory, Noorth-Holland, Amsterdam 1966
15. Градштейн, И. С.—Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва 1963

16. WHITTAKER, E. T. — WATSON, G. N.: A course of modern analysis, University Press, Cambridge 1952, 229
17. LIGHTHILL, M. J.: Introduction to Fourier analysis and generalised functions, University Press, Cambridge, 1969
18. PETROWSKY, I. G.: Lectures on the theory of integral equations, Mir Publishers, Moscow 1971, a 19, b 101
19. ERDÉLYI, A. — BATEMAN, H.: Higher transcendental functions, McGraw-Hill Book Company, New-York — Toronto — London, 1955

An Axisymmetrical Punch Problem in the Linear Couple-stress Theory of Elasticity. — The case of the elastic half space under a cylindrical rigid punch is investigated by taking the effect of the couple-stresses into account. The solution of the resulting mixed boundary-problem leads, similarly to the classic case, to dual integral equations. It is pointed out that the case of the two extreme values ($I^2 = 0$ and $I^2 \rightarrow \infty$) of the material property I^2 for the flat-end cylindrical punch, the classic stress distribution is obtained. For another solution the principle of minimum complementary energy might be suggested. Minimizing of the functional of the complementary energy is carried out by using Ritz's method. A numerical example relates to the flat-end punch. The diagrams plotted suggest the deviations from the classic case.

Ein Achsialsymmetrisches Kontaktproblem in der linearen Momentenspannungs-Elastizitätstheorie. — Untersucht wird der Fall des auf den elastischen Halbraum wirkenden starren Zylinderstempels unter Berücksichtigung der Wirkung der Momentenspannung. Die Lösung der sich daraus ergebenden gemischten Randwertaufgabe führt, wie im klassischen Fall, zu dualen Integralgleichungen. Es wird demonstriert, daß sich für die zwei Randwerte ($I^2 = 0$ und $I^2 \rightarrow \infty$) des Stoffwerts I^2 im Fall eines durch eine ebene Fläche abgeschlossenen Stempels die klassische Spannungsverteilung ergibt. Als eine andere Lösung der Aufgabe kann das Prinzip des Minimums der Komplementärenergie benutzt werden. Die Minimalisierung des Komplementärenergiefunktional wird mit Hilfe der Ritzschen Methode durchgeführt. Ein numerisches Beispiel behandelt einen durch eine Fläche abgeschlossenen Stempel. Die vorgeführten Diagramme zeigen die Abweichungen vom klassischen Fall.