PANELSZERKEZETEK HATÁRÁLLAPOT-VIZSGÁLATA SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSSAL

VÁSÁRHELYINÉ DR. SZABÓ ANNA*

[Beérkezett: 1981. március 3-án]

Paneles szerkezetek lineáris rugókkal összekapcsolt merev testek sorozatával modellezhetők. A határállapot vizsgálata abban az esetben, ha a kapcsoló rugók folyási határa valószínűségi változó, sztochasztikus programozási feladatra vezet. A dolgozat bemutatja a feladat mechanikai és matematikai megfogalmazását, valamint a megoldás számítógépes módszerét egy mintafeladaton.

1. Bevezetés

Paneles szerkezetek erőjátékát a kapcsolatok kialakítása döntő mértékben befolyásolja. Míg a panelek házgyárakban, jól ellenőrizhető technológia mellett készülnek, a kapcsolatokat a helyszínen szerelik. Így itt az anyagállandók szórása lényegesen nagyobb. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a kapcsolatok folyási határának bizonytalansága milyen hatással van képlékeny állapotban a szerkezet törőparaméterének értékére.

Egyszerűség kedvéért síkbeli panelszerkezetekkel foglalkozunk. A kapcsolatok folyási határát valószínűségi változóknak tekintjük. Az ismertetendő módszer lényegesen bonyolultabb, mintha a folyási határt adott állandónak tekintenénk, azonban a számítási eredmények azt mutatják, hogy determinisztikus feltételezés esetén a biztonság kárára követünk el hibát.

2. Feltételezések és a feladat mechanikai váza

Számításainkat a merevtest modell alapján végezzük [1]. Vagyis a paneleket merev testeknek tételezzük fel, melyeket lineáris rugók kapcsolnak össze. Egy panelél mentén a keletkező húzó-nyomó, ill. nyíró erőket az 1. ábra szerint három rugóval vesszük fel.

Feltételezzük:

a) a szerkezet terhelése egyparaméteres, kinematikai teher nem hat.

b) minden egyes rugó alsó és felső folyási határa valószínűségi változó, ismert várható értékkel és szórással.

c) az egy-egy panelél mentén levő rugók folyási határai nem független valószínűségi változók, korrelációs mátrixuk adott.

d) a felső és alsó folyási határ független valószínűségi változók.

* Vásárhelyi Péterné, 1126 Budapest, Kiss János alt. u. 34

Határállapot problémák általános megoldási módszere a matematikai programozás. E módszer használatát a statikai és kinematikai tétel teszi lehetővé. Feladatunkat a statikai tétel alapján oldjuk meg, mely szerint a teherparaméter maximális értéke kisebb a törőparaméter értékénél vagy egyenlő azzal. Írjuk fel a szerkezet egyensúlyi egyenletét:

$$\mathbf{G}^* \cdot \mathbf{s} + \alpha \cdot \mathbf{q} = 0$$

Itt n: rugók száma
m: panelek száma
$\mathbf{G}^*$ $[3m, n]$: szerkezet geometriai mátrixa
$\mathbf{s}$ $[n]$: belső erők mátrixa
$\mathbf{q}$ $[3m]$: terhelés mátrixa
α: teherparaméter

Minden egyes erőre korlátot jelent az alsó $[k_a]$ és felső $[k_f]$ folyási határ értéke

$$k_a(i) \leq s(i) \leq k_f(i).$$

Keressük a teherparaméter maximális értékét

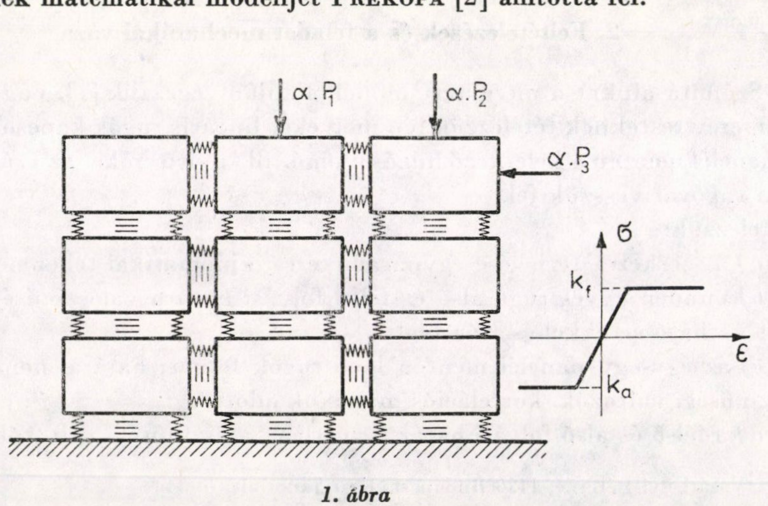
$$\alpha \to \max.$$

Az így felállított feladat, ha eltekintünk a feltételektől, lineáris programozási feladat.

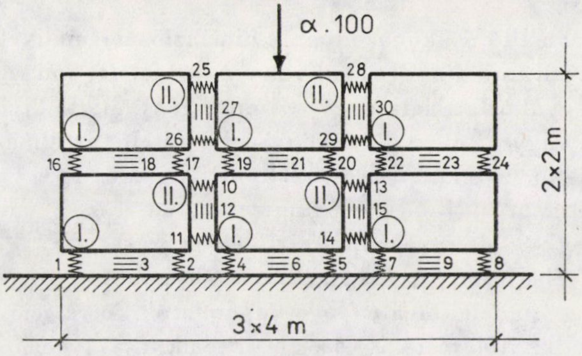
3. A feladat megoldásának matematikai módszere

Sztochasztikus programozásról beszélünk, ha a lineáris vagy nemlineáris programozás legalább egy paramétere valószínűségi változó.

Feladatunk valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat. Ennek matematikai modelljét PRÉKOPA [2] állította fel.



1. ábra



2. ábra

Feladatunk esetében

$$\mathbf{G}^* \cdot \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q} = 0,$$

$$P(\mathbf{k}_a \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{k}_f) \geq p,$$

$$(-\alpha) \to \min,$$

ahol p egy előírt valószínűségi érték.

A „d" feltétel miatt — k_a és k_f független valószínűségi változók — a sztochasztikus feltétel a következő alakban írható:

$$P(k_a \leq s)\, P(s \leq k_f) \geq p.$$

A szorzat első tényezője definíció szerint az eloszlásfüggvény függvényértéke s-nél. A második tényező egyenlőtlenségét —1-gyel szorozva, szintén eloszlásfüggvény függvényértéke —s-nél:

$$P(k_a \leq s)\, P(-k_f \leq -s) \geq p.$$

Az ismert várható értékek és szórások felhasználásával standard normális eloszlásra transzformáljuk a feltételt. Bevezetve a

$$\xi(i) = \frac{k_a(i) - E_k(i)}{D_{k_a}(i)} \qquad \eta(i) = \frac{-k_f(i) + E_{kf}(i)}{D_{kf}(i)}$$

$$\tilde{s}(i) = \frac{s(i) - E_{k_a}(i)}{D_{k_a}} \qquad \tilde{\tilde{s}}(i) = \frac{-s(i) + E_{kf}(i)}{D_{kf}(i)}$$

jelöléseket, a sztochasztikus feltétel alakja:

$$P\big(\xi(i) \leq \tilde{s}(i),\ i = 1 \ldots f\big)\, P\big(\eta(i) \leq \tilde{\tilde{s}}(i),\ i = 1, \ldots f\big) \geq p.$$

További kérdés, hány képlékenységi feltétel együttes bekövetkezését tartalmazza egy sztochasztikus feltétel, vagyis mennyi legyen az f értéke.

Ha $f = n$, akkor az összes képlékenységi feltételt egyetlenegy sztochasztikus feltétel tartalmazza. Ez lenne a feladat szempontjából a legjobb, a valósághoz legközelebb álló. Ekkor azonban n dimenziós normális eloszlás függvény értékét kell kiszámítani, ámde ez a művelet $n = 9$ felett, ami szerkezetek esetén mindig fennáll, gyakorlatilag a nagy számításigény miatt kivihetetlen.

Ha $f = 1$, vagyis ha egy képlékenységi feltételt tartalmaz egy sztochasztikus feltétel, akkor a feladat leegyszerűsödik ugyan, de egyrészt a változók közti korrelációt nem tudjuk figyelembe venni, másrészt — mint PRÉKOPA [2] bebizonyítja, nagy az elhanyagolás a biztonság kárára.

Az $f = 3$ választást — amit a „c" feltétel tartalmaz — a fenti okok indokolják. Így az egy panelél mentén levő kapcsolatok korrelációját — ami a legszorosabb, mivel kivitelezésük egyszerre történik — figyelembe tudjuk venni, ugyanakkor csak 3 dimenziós normális eloszlásfüggvény-értéket kell számítani.

Vagyis a megoldandó feladat:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \cdot q = 0$$

$$P(\xi_i < \bar{s}_i,\ i = k+1,\ k+2,\ k+3)_j\ P(\eta_i < \bar{\bar{s}}_i,\ i = k+1,\ k+2,\ k+3)_j \geq p_j,$$

$$j = 1 \ldots n/3,$$

$$(-\alpha) \to \min \qquad k = 3(j-1).$$

Ezt a sztochasztikus programozási feladatot a FIACCO és MCCORMICH által kidolgozott SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) módszerrel oldottuk meg. Ezzel az eljárással az alábbi büntető függvény minimumát lehet megkeresni

$$P(x^{(k)}, r^{(k)}) = F(x^{(k)}) + \frac{1}{r^{(k)}} \sum_{i=1}^{n} H_i^2(x^k) - r^k \sum_{i=n+1}^{m} \ln G_i(x^k),$$

ahol $F(x)$ célfüggvény
H_i i-edik egyenlőségi feltétel
G_i i-edik egyenlőtlenségi feltétel

Az $r^{(1)}$ pozitív súlyfaktorok az iteráció során monoton csökkenő sorozatot alkotnak ($r^{(0)} > r^{(1)}_{..} > r^{(i)}_{..} > 0$).

A miniumkeresés gradiens módszerrel történik.

A háromdimenziós, adott korrelációjú standard normális eloszlásfüggvény értékét MILTON [3] módszerével határozzuk meg. A háromdimenziós normális eloszlásfüggvényt transzformáltuk egy kétdimenziós függvény impropius integráljának és egy egydimenziós normális eloszlásfüggvénynek a szorzatára. Az utóbbi közvetlenül számítható, a kétdimenziós integrálást Simpson szabállyal közelítettük.

A háromdimenziós normális eloszlásfüggvény gradiens számítását SZÁNTAI [4] levezetése alapján visszavezettük kétdimenziós normális eloszlásfüggvény függvényértékének meghatározására.

4. Numerikus tapasztalatok

Az ismertetett eljárással oldottuk meg a következő feladatot:

A vízszintes panelélek mentén levő I. típusú kapcsolatok, a függőlegesek mentén levő II. típusú kapcsolatok adatai a következők:

	Húzási, ill. nyomási rúgók				Nyírási rúgók			
	E_{k_a}	D	E_{k_f}	D	E_{k_a}	D	E_{k_f}	D
I. típus	−80	1	6	1	−7	0,5	7	0,5
II. típus	−50	1	20	1	−5	0,5	5	0,5

Korrelációs mátrix az egy él mentén levő rugók közt:

$R =$	Húzás, nyomás	Húzás, nyomás	Nyírás
Húzás, nyomás	1	0,2	0,7
Húzás, nyomás	0,2	1	0,7
Nyírás	0,7	0,7	1

A sztochasztikus feltételeknél $P \geq 0,95$.

A feladatot mind sztochasztikus változókat feltételezve, mind a folyási határokat determinisztikusnak véve megoldottuk.
Eredmények egyes rugóerőknél:

	s_1	s_2	s_9	s_{19}	s_{25}	s_{26}	s_{27}	α
Determinisztikus eset	12,7	−21,3	−3,7	−76,39	−32,1	20,0	5,0	1,63
Sztochasztikus eset	10,3	−20,7	−5,2	−73,42	−35,7	18,6	4,76	1,47

Mint látható, a jelenlegi szórásadatok esetében a teherparaméter értéke nem lényegesen kisebb sztochasztikus esetben, mint determinisztikus esetben. Ugyanakkor nagy eltérések mutatkoznak az egyes rugóerőknél, ami a korreláció feltételezésének eredménye.

A program CDC-3300-as gépen futott, 3064 sec. CPU időt vett a számítás igénybe. A konvergencia gyorsasága a kezdővektor felvételétől erősen függ.

IRODALOM

1. KALISZKY, S.: Analysis of Panel Buildings by the Use of Rigid Panel Model. *Periodica Polytechnika* (1979), II
2. PRÉKOPA A.: Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról. Matematikai doktori értekezés, Budapest 1970

3. MILTON, R. G.: Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral. *Technometrics* 4 (1972), No 4
4. SZÁNTAI T.: Egy eljárás a többdimenziós, normális eloszlásfüggvény és gradiense értékeinek meghatározására. *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1976) 2
5. BOLOTIN, V. V.: Statisztikai módszerek a szerkezetek mechanikájában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970

Plastic Limit State Analysis of Panel Constructions by Stochastic Programming. — Panel constructions can be modeled by a series of rigid elements connected by linear springs. The investigation of the limit state, in case where the yield stress of the connecting springs is a random variable, leads to a stochastic programming problem. The paper presents the mechanical and mathematical formulation as well as the computerized method to the solution on an example.

Grenzzustandsuntersuchung von Paneelkonstruktionen mit Hilfe stochastischer Programmfertigung. — Paneelkonstruktionen können durch Serien von mit Linearfedern verbundenen Starrkörpern modelliert werden. Die Untersuchung des Grenzzustands führt im Fall, wo die Fließgrenze der verknüpfenden Federn eine Zufallsänderliche ist, zu einer stochastischen Programmfertigungsaufgabe. Die Abhandlung stellt die mechanische und die mathematische Formulierung, sowie die Rechenmaschinenmethode der Lösung durch ein Zahlenbeispiel dar.