

LONGITUDINÁLISAN REZGŐ VISZKOELASZTIKUS RÚD LÁTSZÓLAGOS KOMPLEX YOUNG-MODULUSA*

PRITZ TAMÁS**

[Beérkezett: 1981. február 6-án]

A Love-féle közelítő elmélet alapján tárgyaljuk viszkoelasztikus rudak longitudinális rezgését azokon a frekvenciákon, amelyeken az oldalirányú méret összemérhető a viszkoelasztikus hullám hosszával. Meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, amelyben a Love-féle elmélet jó közelítést ad, és közöljük a közelítés hibáját. Az elmélet szerint a hullámterjedést a viszkoelasztikus rúdban az anyag komplex Young-modulusának egy látszólagos értéke szabályozza nagyobb frekvenciákon, az oldalirányú mozgás következtében. Megmutatjuk, hogy a látszólagos dinamikai Young-modulus kisebb, a látszólagos veszteségi tényező pedig nagyobb, mint az anyag valódi jellemzője. A látszólagos és valódi értékek eltérése az oldalirányú méretnek és a hullámhossznak az arányától, valamint az anyag komplex rugalmas állandóitól függ.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az ideálisan rugalmas vagy viszkoelasztikus anyagú rudak longitudinális rezgését az elemi rúdelmélet csak addig a frekvenciáig írja le kielégítő pontossággal, amíg a rúd oldalirányú mozgásának hatását el lehet hanyagolni, azaz amíg az oldalirányú méret jóval kisebb, mint a hullámhossz. Ezeken a frekvenciákon a fázissebesség pl. a rugalmas rúdban az anyag dinamikai Young-modulusával arányos és a frekvenciától függetlenül állandó, feltéve, hogy a Young-modulus se függ a frekvenciától. A rugalmas rudak longitudinális rezgését tárgyaló pontosabb elméletekből [1–10] és ezek kísérleti ellenőrzéséből [11–14] ismeretes, hogy a fázissebesség csökken azokon a nagyobb frekvenciákon, amelyeken az oldalirányú méret összemérhetővé válik a hullámhosszal. Ezt a jelenséget úgy is lehet értelmezni, hogy ekkor a rugalmas hullám terjedését nem közvetlenül az anyag Young-modulusa, hanem annak egy látszólagos — kisebb — értéke szabályozza. A rugalmas anyagú rudakra kidolgozott elméleteket viszonylag egyszerűen lehet általánosítani a viszkoelasztikus rudakra is oly módon, hogy a rugalmas állandókat a komplex megfelelőekkel helyettesítjük [15–18]. Ezzel a módszerrel elméletileg kimutatták, hogy a viszkoelasztikus rudak csillapítási állandója növekszik az oldalirányú mozgás hatására a fázissebesség csökkenése mellett [16, 17]. Ezt a jelenséget

* A 7. Akusztikai Kollokviumon (Budapest 1979. március 26–30) tartott előadás átdolgozott anyaga.

** Pritz Tamás, 1158 Budapest, Örvárat u. 27/Á.

korábban már kísérletileg is tapasztalták [19]. Ebből következik, hogy a hullámterjedést a viszkoelasztikus rúdban a nagyobb frekvenciákon nem közvetlenül az anyag komplex Young-modulusa, azaz a dinamikai Young-modulusa és veszteségi tényezője, hanem ezek látszólagos értékei szabályozzák [17].

Ebben a cikkben viszonylag egyszerű módon levezetjük és megvizsgáljuk a viszkoelasztikus rudak látszólagos komplex Young-modulusát azzal a feltételezéssel, hogy valamennyi rugalmas állandó komplex mennyiség. Az itt közölt egyszerű analízis a Love-féle rúdelméleten alapul, amely matematikailag viszonylag egyszerű, bár nem pontos, de gyakorlati szempontból jó közelítéssel írja le a hullámterjedést abban a frekvenciatartományban, ahol az oldalirányú méret kisebb, mint a hullámhossz [1, 3, 17, 18]. Ezért a látszólagos komplex Young-modulus vizsgálata előtt meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, amelyben a Love-féle elmélet jó közelítést ad és itt a közelítés hibáját. Az itteni elméleti vizsgálat eredményei közvetlenül felhasználhatók a gyakorlatban azoknál a méréseknél, amelyek során viszkoelasztikus anyagok komplex Young-modulusát határozzák meg rúdszerű próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával.

2. A Love-féle elmélet

A Love-féle elmélet csak közelítő pontossággal és csak korlátozott frekvenciatartományban írja le a rudak longitudinális, lineáris rezgését az oldalirányú mozgás számításbavételével. Ezért az elmélet alkalmazása előtt meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, ahol jó közelítést kapunk és meghatározzuk itt a közelítés hibáját. Ezt oly módon végezzük, hogy összehasonlítjuk a közelítő Love-féle elmélet és egy pontos elmélet alapján számított fázissebesség — illetve a csillapítási állandó-frekvencia függvényeket. Ezelőtt azonban áttekintjük röviden az elemi és a Love-féle elméletet.

A legegyszerűbb elemi elmélet nem veszi számításba a rúd oldalirányú mozgásának hatását. A longitudinális hullámmozgást leíró differenciálegyenlet levezetésekor feltételezik, hogy a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosa az anyag Young-modulusával egyenlő. Szinuszos rezgőmozgás esetében a differenciálegyenlet az alábbi:

$$\frac{d^2 \hat{\xi}(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{E} \omega^2 \hat{\xi}(x), \quad (1)$$

ahol

$\hat{\xi}$ az x irányú (a rúd hossz tengelyének az iránya) rezgésmozdulás komplex amplitúdója, $\omega = 2\pi f$; f a frekvencia Hz-ben,

ρ a sűrűség és

E a Young-modulus, amely általános esetben komplex mennyiség, azaz

$$E = E_d(1 + j\eta_E). \quad (2)$$

Itt

E_d az anyag dinamikai Young-modulusa,

η_E a veszteségi tényező és

$j = \sqrt{-1}$ a képzetes egység.

A differenciálegyenlet megoldásával a viszkoelasztikus hullám fázissebességére az alábbi összefüggést kapjuk:

$$c_f = c_{f_0} \frac{\sqrt{2} D}{\sqrt{D+1}}, \quad (3)$$

ahol c_{f_0} a fázissebesség az ideálisan rugalmas anyagú (veszteség nélküli) rúdban:

$$c_{f_0} = \sqrt{\frac{E_d}{\rho}}, \quad (4)$$

továbbá

$$D = \sqrt{1 + \eta_E^2}. \quad (5)$$

A csillapítási állandó pedig

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_d} \frac{\sqrt{D-1}}{\sqrt{2} D}}. \quad (6)$$

A fenti fázissebesség nem függ a frekvenciától, a csillapítási állandó pedig lineárisan arányos azzal, feltéve, hogy mind a dinamikai Young-modulus, mind a veszteségi tényező a frekvenciától függetlenül állandó. Az elemi elmélet ezen következtetései azonban csak addig a frekvenciáig érvényesek, amíg a rúd oldalirányú mérete jóval kisebb, mint a hosszirányban terjedő hullám hossza.

A Love-féle közelítő elmélet számításba veszi bizonyos mértékben a rúd oldalirányú mozgásának hatását. A Love-féle differenciálegyenlet az alábbi [1, 3, 4, 17, 18]:

$$\rho \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (\nu i)^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

ahol

t az idő,

ν a Poisson-szám

i a rúd keresztmetszetének az x tengelyre számított inerciasugara. (Körkeresztmetszet esetében $i = a/2\sqrt{2}$, ahol a az átmérő; négyzetkeresztmetszet esetében, $i = b/\sqrt{6}$, ahol b az oldalhosszúság.)

A Love-féle elméletet eredetileg rugalmas rudakra dolgozták ki [1], de azt egyszerűen lehet általánosítani a viszkoelaszticitásra oly módon, hogy a rugalmas állandókat a komplex megfelelőikkel helyettesítjük. Teljesen általános esetben a Poisson-szám is komplex, azaz

$$\nu = \nu_d(1 + j\eta_\nu), \quad (8)$$

ahol ν_d a dinamikai Poisson-szám és η_ν a hozzátartozó veszteségi tényező. Szinuszos rezgés esetében a Love-féle differenciálegyenlet az alábbi alakban írható:

$$\frac{d^2 \hat{\xi}(x)}{dx^2} = - \frac{\varrho}{E \left[1 - \frac{\varrho}{E} (\omega \nu)^2 \right]} \omega^2 \hat{\xi}(x). \quad (9)$$

A fázissebességet és a csillapítási tényezőt a (9) differenciálegyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Jelöljük ezeket c_f -vel, illetve α' -vel. Azokat az összefüggéseket, amelyeket most átrendezett formában az itteni jelölésekkel felhasználtunk korábban SNOWDON [18] vezette le. A c_f fázissebességet és az α' csillapítási tényezőt a c_f -re, illetve az α -ra normalizált formában adjuk meg:

$$\frac{c_f'}{c_f} = \left[\frac{A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2} \right]^{-1/2}, \quad (10)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = - \frac{1}{d} \left[\frac{-A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

ahol

$$A = \frac{(1 - d^2) \Gamma - 2d \Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \quad (12)$$

$$B = \frac{-(1 - d^2) \Omega - 2d \Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \quad (13)$$

$$\Gamma = 1 - \frac{4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2}{1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{D+1}}{\sqrt{2} D} \right)^2 [(1 - d^2)(1 - \eta_\nu^2) + 4d \eta_\nu], \quad (14)$$

$$\Omega = 2 \frac{4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2}{1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{D+1}}{\sqrt{2} D} \right)^2 [d(1 - \eta_\nu^2) - (1 - d^2) \eta_\nu] \quad (15)$$

és

$$d = \sqrt{\frac{D-1}{D+1}}. \quad (16)$$

Ezekben az egyenletekben bevezettük az i/λ'_0 mennyiségét, mint változót, ahol λ'_0 a hullámhossz az ideálisan rugalmas anyagú rúdban az oldalirányú mozgás számításbavételével.

A közelítő Love-féle elmélet frekvenciatartományának és pontosságának vizsgálata elvégezhető oly módon, hogy a fenti összefüggésekkel számítható

fázissebesség és csillapítási tényező értékeket összehasonlítjuk azokkal, amelyeket egy pontos elmélet alapján számítunk. Rudak longitudinális rezgését a Pochhammer—Chree-elmélet [3–9] írja le pontosan, amely azonban csak végtelen hosszú rugalmas rudakra vonatkozik, és a viszkoelaszticitásra történő általánosítása matematikailag igen bonyolult [16]. Mivel a szakirodalomból csupán a hengeres, rugalmas rúd pontos fázissebesség függvénye ismeretes — amelyet a pontos Pochhammer—Chree-féle frekvenciaegyenlet megoldásával határoztak meg [9] —, ezért a Love-féle elmélet vizsgálatát is az ezzel való összehasonlítás alapján végezzük.

Az ideálisan rugalmas anyagú rúd fázissebességét a Love-féle elmélet alapján a (10), (12)–(16) egyenletekből kapjuk az $\eta_E = 0$ és $\eta_\nu = 0$ helyettesítésével. Így:

$$\frac{c'_{fs}}{c_{fs}} = \left[1 + 4\pi^2 v_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (17)$$

amely hengeres rúd esetében:

$$\frac{c'_{fs}}{c_{fs}} = \left[1 + \frac{1}{2} \pi^2 v_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

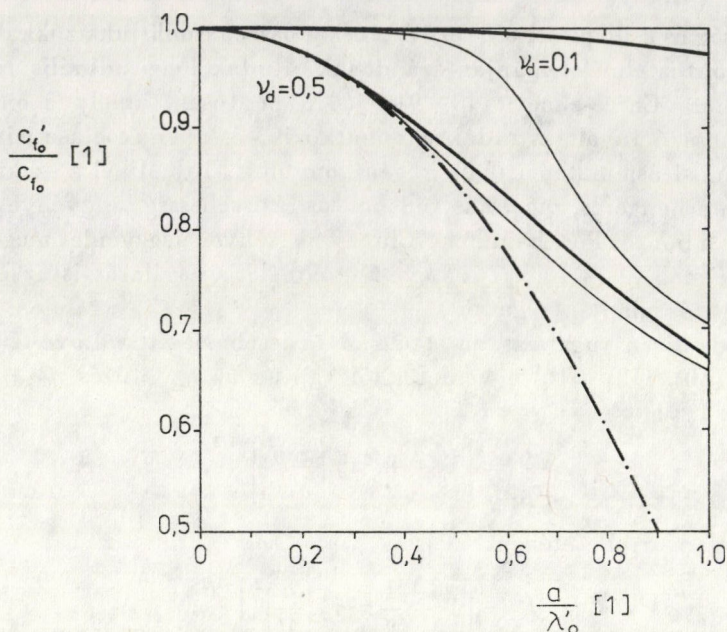
Ez utóbbi egyenlet gyakran az alábbi formában használatos:

$$\frac{c'_{fs}}{c_{fs}} \cong 1 - \frac{1}{4} \pi^2 v_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2, \quad (19)$$

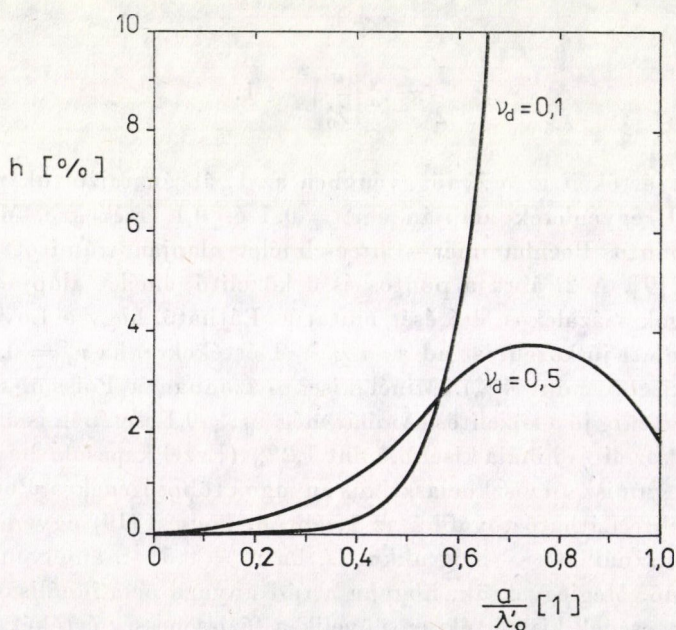
feltéve, hogy:

$$\frac{1}{2} \pi^2 v_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2 \ll 1.$$

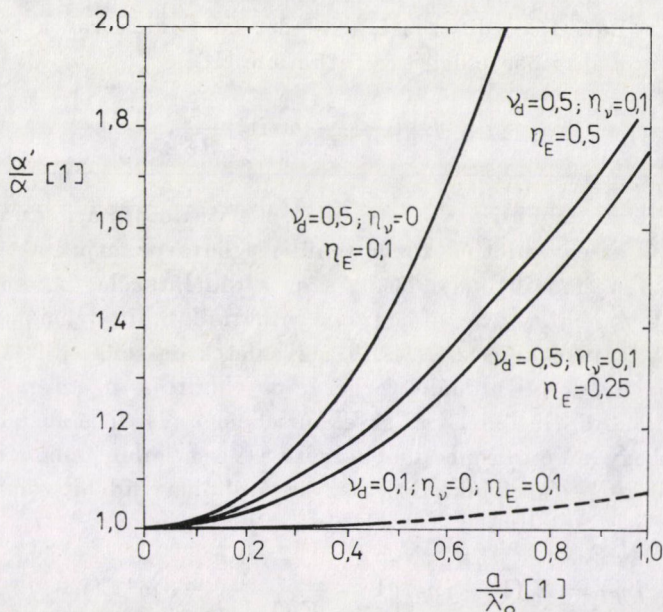
A c'_{fs}/c_{fs} értékeit az a/λ'_0 függvényben az 1. ábrán rajzoltuk meg a (18), illetve a (19) egyenletek alapján a $v_d = 0,5$ és $0,1$ értékekre. Megrajzoltuk ugyanitt a pontos Pochhammer—Chree-elmélet alapján számított c'_{fs}/c_{fs} függvényeket is [9]. A 2. ábra a pontos és a közelítő elmélet alapján számított fázissebességek százalékos eltérését mutatja. Látható, hogy a Love-féle elmélet (18 egyenlet) jó közelítést ad az $a/\lambda'_0 < 1$ értékekre, ha $v_d = 0,5$ (a közelítés hibája kisebb, mint 4%). Minél kisebb azonban a Poisson-szám, annál kisebb a/λ'_0 értékig jó a közelítés. Ámbár még $v_d = 0,1$ esetben is az $a/\lambda'_0 < 0,5$ értékekre a közelítés hibája kisebb, mint 1,2%. (Ezzel kapcsolatban megemlítjük, hogy a gumyszerű viszkoelasztikus anyagok többségének a Poisson-száma 0,5-höz közeli.) Látható továbbá az 1. ábrán, hogy a (19) egyenlet csak kb. $0,5 a/\lambda'_0$ -ig használható — még akkor is, ha $v_d = 0,5$ —, amelyen túl a hiba rohamosan nő. Megjegyezzük, hogyha a rúd anyaga nem ideálisan rugalmas, akkor a veszteségek kismértékben növelik a fázissebesség értékét [17], és így befolyásolhatják a Love-féle közelítés hibáját is.



1. ábra. A longitudinális hullám fázissebessége hengeres, ideálisan rugalmas rudakban. c_{t_0}' : fázissebesség az oldalirányú mozgás elhanyagolásakor (elemi elmélet), c_{t_0} : fázissebesség az oldalirányú mozgás számításbavételével; —, Pochhammer—Chree-elmélet [9]; — — — és — — —, Love-elmélet, (18), illetve (19) egyenlet



2. ábra. A fázissebességek százalékos eltérése. $h = [c_{t_0}'(L.) / c_{t_0}'(P. C.) - 1] \cdot 100 [\%]$, ahol $c_{t_0}'(L.)$ és $c_{t_0}'(P. C.)$ a közelítő Love-elmélet és a pontos Pochhammer—Chree-elmélet [9] alapján számított fázissebesség



3. ábra. A longitudinális hullám csillapítási tényezője hengeres, viszkoelasztikus rudakban α : csillapítási tényező az oldalirányú mozgás elhanyagolásakor (elemi elmélet), α' : csillapítási tényező az oldalirányú mozgás számításbavételével (Love-elmélet)

A teljesség kedvéért a 3. ábrán megrajzoltuk néhány hengeres, viszkoelasztikus rúd normalizált csillapítási tényezőjét (α'/α) az a/λ_0 függvényében. A számításokat a (11) ... (16) összefüggésekkel végeztük. Látható, hogy a viszkoelasztikus rúd csillapítási tényezője nő az oldalirányú mozgás következtében, és a növekedés mértéke függ a rúd anyagának dinamikai jellemzőitől (ν_d, η_v, η_E) is.

3. A látszólagos komplex Young-modulus

Láttuk, hogy nagyobb frekvenciákon az oldalirányú mozgás következtében a viszkoelasztikus rúdban a fázissebesség kisebb, a csillapítási tényező pedig nagyobb annál, mint ami az elemi elméletből következik. A fázissebesség alapvetően az anyag dinamikai Young-modulusával, a csillapítási tényező pedig a veszteségi tényezővel kapcsolatos. Ezért ezeken a frekvenciákon a viszkoelasztikus hullám terjedését a rúdban úgy is tekinthetjük, hogy azt nem közvetlenül az anyag komplex Young-modulusa, hanem annak egy látszólagos értéke szabályozza. Erre a tényre először PLASS és STEYER [3] hívta fel a figyelmet, akik a Love-féle elmélet alapján igazolták, hogy rugalmas anyagú rúdban az oldalirányú mozgás következtében a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosa nem azonos a Young-modulussal. A viszkoelaszticitásra

általánosított Love-féle differenciálegyenlet megoldásával a tengelyirányú feszültségre az alábbi összefüggés vezethető le [18]

$$\hat{\sigma} = E \left[1 - \frac{\varrho}{E} (\omega v i)^2 \right] \frac{d\hat{\xi}}{dx}, \quad (20)$$

ahol $\hat{\sigma}$ és $d\hat{\xi}/dx$ a tengelyirányú feszültség, illetve deformáció komplex amplitúdója. Ebből az egyenletből közvetlenül meghatározhatjuk a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosát, azaz a rúd látszólagos komplex Young-modulusát. Ugyanehhez az eredményhez juthatunk a differenciálegyenlet megoldása nélkül, egyszerűen az (1) és (9) egyenletek összehasonlításával is. Látható, hogy a rúd longitudinális rezgését az oldalirányú mozgás figyelembevételével formálisan le lehet írni az elemi elmélet (1) differenciálegyenletével oly módon, hogy a Young-modulus helyére a (9) egyenlet jobb oldalának nevezőjében lévő kifejezést írjuk. Ezért ez az utóbbi a rúd látszólagos komplex Young-modulusa, amelyet E' -vel jelölünk. Tehát

$$E'_d(1 + j\eta'_E) = E_d(1 + j\eta_E) \left[1 - \frac{\varrho}{E_d(1 + j\eta_E)} \omega^2 v_d^2 (1 + j\eta_v)^2 i^2 \right]. \quad (21)$$

A valós és képzetes részek szétválasztása után megkapjuk a rúd látszólagos dinamikai Young-modulusát és veszteségi tényezőjét. Ezeket célszerűen az anyag valódi dinamikai jellemzőire normalizálva adjuk meg:

$$\frac{E'_d}{E_d} = 1 - \frac{\varrho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 (1 - \eta_v^2), \quad (22)$$

$$\frac{\eta'_E}{\eta_E} = \frac{1 - \frac{\varrho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 2 \frac{\eta_v}{\eta_E}}{1 - \frac{\varrho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 (1 - \eta_v^2)}. \quad (23)$$

Gyakorlati szempontból célszerű a hullámhossz függvényében megadni a fenti összefüggéseket. Matematikailag azonban rendkívül bonyolult lenne a viskoelasztikus hullám hosszának bevezetése általános esetben ($\eta_E \neq 0$, $\eta_v \neq 0$). Ezért definiálunk egy fiktív hullámhosszat, amely E'_d ismeretében egyszerűen számítható:

$$\lambda'_f = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E'_d}{\varrho}}. \quad (24)$$

(Ha $\eta_v = 0$, akkor $\lambda'_f = \lambda'_0$). Vegyük figyelembe továbbá, hogy

$$\frac{\varrho}{E_d} \omega^2 = \frac{E'_d}{E_d} \left(\frac{2\pi}{\lambda'_f} \right)^2,$$

ezekkel

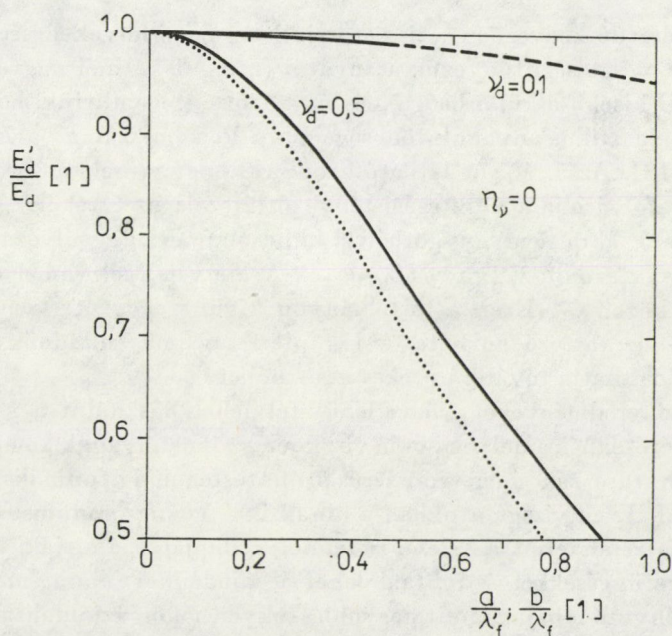
$$\frac{E'_d}{E_d} = \left[1 + 4\pi^2 v_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_f'} \right)^2 (1 - \eta_v^2) \right]^{-1} \quad (25)$$

és

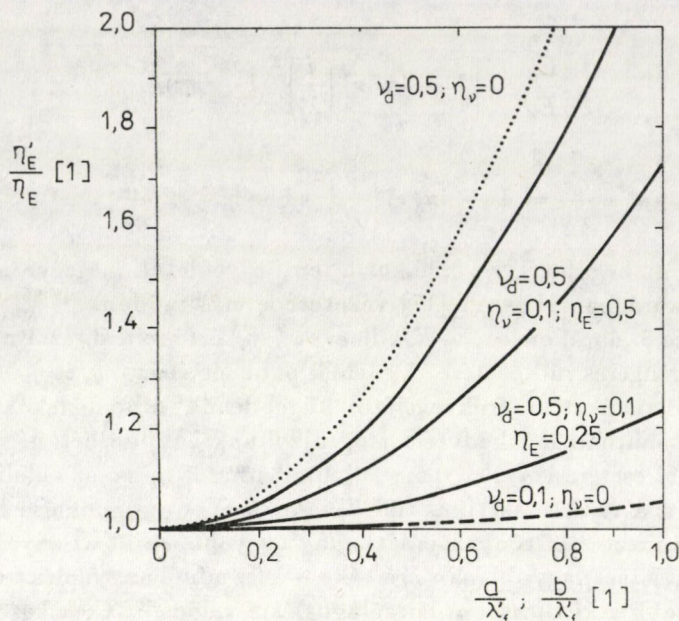
$$\frac{\eta'_E}{\eta_E} = 1 + 4\pi^2 v_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_f'} \right)^2 \left(1 - \eta_v^2 - 2 \frac{\eta_v}{\eta_E} \right). \quad (26)$$

Megjegyezzük, hogyha $\eta_v = 0$, akkor a fenti egyenletek megegyeznek azokkal, amelyeket korábban HUSZTY [17] vezetett le más módon.

A 4. és 5. ábrákon az E'_d/E_d , illetve η'_E/η_E értékeit ábráztuk a/λ_f' függvényében, hengeres rúd esetére. A görbék paramétere: v_d , η_v és η_E . (A komplex rugalmas állandókat a frekvenciától függetlenül, állandónak tekintettük.) Az összehasonlíthatóság kedvéért megrajzoltunk egy görbét négyzetkeresztmetszetű rúd esetére is ($v_d = 0,5$, $\eta_v = 0$). Látható, hogy az oldalirányú mozgás hatására a viszkoelasztikus rúd dinamikai Young-modulusa látszólag kisebb, míg a veszteségi tényezője látszólag nagyobb, mint az anyagra jellemző valódi érték. Minél nagyobb az a/λ_f' értéke — azaz minél nagyobb a frekvencia —, annál nagyobb a különbség a látszólagos és a valódi értékek között. Látható továbbá a 4. és 5. ábrán, hogy E'_d/E_d csökken, míg η'_E/η_E nő a Poisson-szám növelésével. A Poisson-szám veszteségi tényezője viszont alig befolyásolja



4. ábra. Viszkoelasztikus rudak látszólagos dinamikai Young-modulusa (E'_d) az oldalirányú méret-hullámhossz arány függvényében. —, körkeresztmetszet;, négyzetkeresztmetszet



5. ábra. Viszkoelasztikus rudak látszólagos veszteségi tényezője (η'_E) az oldalirányú méret-hullámhossz arány függvényében. — körkeresztmetszet; négyzetkeresztmetszet

E'_d/E_d értékét, de kedvezően „visszatartja” az η'_E/η_E növekedését. Ez utóbbi hatás függ a veszteségi tényezők arányától (η_v/η_E) is. Minél nagyobb az η_v/η_E értéke, annál kisebb a különbség η'_E és η_E között. Megemlítjük, hogy a gumi-szerű viszkoelasztikus anyagok többségének a Poisson-száma valós vagy az η_v kis értékű [18]. Az 5. ábrán látható azonban, hogy η_v -nek még kis értéke is jelentősen befolyásolja a veszteségi tényező látszólagos értékét.

A 4. és 5. ábra függvénygörbéivel kapcsolatban hangsúlyozni szükséges, hogy ezek csak azon a/λ_f (vagy b/λ_f) értékekre érvényesek, amelyekre fennáll a Love-féle közelítés. (Ezen a tartományon kívül szaggatott vonallal húztuk az $\nu_d = 0,1$ -hez tartozó görbét.) A komplex rugalmas állandók frekvenciafüggése módosíthatja továbbá ezeket a görbéket.

A fenti eredményeket közvetlenül fel lehet használni a gyakorlatban azoknál a méréseknél, amelyek során viszkoelasztikus anyagok komplex Young-modulusát határozzák meg, rúdszerű próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával. Ezen vizsgálatokban a dinamikai Young-modulust és a veszteségi tényezőt rendszerint az elemi rúdelmélet alapján számítják. Ekkor tehát a fenti összefüggésekkel számítani lehet a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező hibáját, amit nagyobb frekvenciákon az oldalirányú mozgás hatásának elhanyagolása okoz. Ha pedig ismert ezen hiba megengedett értéke, akkor a vizsgálat felső határfrekvenciáját lehet meghatározni. Ebből a célból megadtuk a hibák néhány százalékos értékét az I. táblázatban ($\nu_d = 0,5$, $\eta_v = 0$).

I. táblázat

Viszkoelasztikus rúd látszólagos dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének százalékos eltérése az anyag valódi dinamikai jellemzőihez képest

$$(\nu_d = 0,5, \nu_\nu = 0), h_E = \left(\frac{E'_d}{E_d} - 1 \right) 100 [\%], h_\eta = \left(\frac{\eta'_E}{\eta_E} - 1 \right) 100 [\%].$$

$\frac{a}{\lambda'_0}$ vagy $\frac{b}{\lambda'_0}$	Körkeresztmetszet		Négyszekeresztmetszet	
	h_E [%]	h_η [%]	h_E [%]	h_η [%]
0,1	-1,22	1,2	-1,62	1,64
0,15	-2,70	2,77	-3,57	3,70
0,2	-4,70	4,93	-6,17	6,58
0,25	-7,16	7,7	-9,32	10,28
0,3	-10,0	11,1	-12,9	14,8

Ebből látható például, hogyha a vizsgálat felső frekvenciahatárának — szokásos módon — az $a/\lambda'_0 = 0,1$ (ill. $b/\lambda'_0 = 0,1$)-et tekintjük, akkor az E_d és η_E számított értékének hibája kisebb, mint 1,7%. (Itt $\lambda'_f = \lambda'_0$, mivel $\nu_\nu = 0$.) Ha viszont kb. 10% hibát engedünk meg a dinamikai jellemzők számított értékében, akkor a vizsgálatot azon frekvenciáig végezhetjük — az elemi rúd elmélet alapján —, amíg $a/\lambda'_0 < 0,3$ (henger), illetve $b/\lambda'_0 < 0,25$ (négyzetkeresztmetszet). Megjegyezzük, hogy bár ez a hibaszámítás a közelítő Love-féle elméleten alapul, mégis kielégítő pontosságúnak tekinthetjük a gyakorlat szempontjából, mivel a közelítés pontossága az illető frekvenciatartományban igen jó. (A Love-féle közelítés hibája csupán 0,1% a $0,1a/\lambda'_0$ -nél és 0,71% a $0,3a/\lambda'_0$ -nél, ha $\nu_d = 0,5$.) Ezért tehát az elemi elmélet alapján számított dinamikai jellemzőket helyesbíthetjük is a (25), illetve (26) egyenletek alapján a Love-közelítés frekvenciatartományában, feltéve, hogy ismert a komplex Poisson-szám értéke.

IRODALOM

1. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publications, New York 1944.
2. LORD RAYLEIGH: Theory of Sound. Dover Publications, New York 1945.
3. ABRAMSON, H. N.—PLASS, H. J.—RIPPERGER, E. A.: Stress Wave Propagation in Rods and Beams. Advances in Applied Mechanics, Vol. V. New York 1958.
4. REDWOOD, M.: Mechanical Waveguides. Pergamon Press, Oxford 1960.
5. KOLSKY, H.: Stress Waves in Solids. Dover Publications, New York 1963.
6. MEITZLER, A. H.—MEEKER, T. J.: Guided Waves in Elongated Cylinders and Plates. Physical Acoustics, Vol. 1A, Ed. Mason, W. P., Academic Press, New York 1964.
7. SKUDRZYK, E. J.: Simple and Complex Vibratory Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park and London 1968.
8. ACHENBACH, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland/American Elsevier Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York 1975.

9. BANCROFT, D.: The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars. *Physical Review* **59** (1941), 588—593.
10. Гриченко, В. Т., Мелешко, В. В.: Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины. *Акустический Журнал* **24** (1978), 861—866
11. ZEMANEK, JR. J., RUDNICK, I.: Attenuation and Dispersion of Elastic Waves in a Cylindrical Bar. *The Journal of the Acoustical Society of America* **33** (1961), 1283—1288.
12. ZEMANEK, JR. J.: An experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America* **51** (1972), 265—283.
13. BOOKER, R. E., SAGAR, F. H.: Velocity Dispersion of the Lowest Order Longitudinal Mode in Finite Rods of Circular Cross Section. *The Journal of the Acoustical Society of America* **49** (1971) 1491—1498.
14. Похлебкин, В. Н.—Чернышев, Е. В.—Шерай, В. В.: О продольных колебаниях упругих цилиндров конечной длины. *Акустический Журнал* **22** (1976), 943—944
15. EDMONS, P. D.: On Correlating the Loss Factor of Cylindrical and Spherical Resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America* **33** (1961), 615—622.
16. COQUIN, G. A.: Attenuation of Guided Waves in Isotropic Viscoelastic Materials. *The Journal of the Acoustical Society of America* **36** (1964), 1074—1080.
17. HUSZTY, D.: Über die Wellenfortpflanzung in viskoelastischen Stäben. *Proceedings of the Conference on Acoustics of Solid Media*, Warsaw, 1966. 57—66.
18. SNOWDON, J. C.: *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*. John Wiley and Sons, New York 1968.
19. NAAKE, H. J., TAMM, K.: Sound Propagation in Plates and Rods of Rubber Elastic Materials. *Acustica* **8** (1958), 65—76.

Apparent Complex Young's Modulus of a Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod. — The longitudinal vibration of viscoelastic rods is dealt with on the basis of Love's approximate theory, at frequencies, at which the lateral dimension might be compared with the viscoelastic wavelength. The frequency range is defined wherein Love's theory yields a close approximation, and the error of the approach is presented. According to the theory, the propagation of the wave in the viscoelastic rod is, at higher frequencies, controlled by an apparent value of the complex Young's modulus of the material, due to lateral movement. It is pointed out that the value of the apparent dynamic Young's modulus is smaller and the apparent loss factor is higher than the actual characteristics of the material. The deviation of the apparent and actual values depends on the ratio of the lateral dimension and the wavelength, as well as on the complex elastic constants of the material.

Der virtuelle, komplexe Young-Modul eines Längsschwingung vollführenden visko-elastischen Stabs. — Behandelt wird die Längsschwingung von visko-elastischen Stäben aufgrund der Loveschen Näherungstheorie an den Frequenzen, wo die Lateraldimension mit der visko-elastischen Wellenlänge vergleichbar ist. Der Frequenzbereich wird ermittelt, wo die Love-Theorie eine gute Näherung liefert, und der Näherungsfehler dargestellt ist. Nach der Theorie wird die Wellenfortpflanzung im visko-elastischen Stab, infolge der Seitenbewegung in den höheren Frequenzen durch einen scheinbaren Wert des komplexen Young-Moduls des Materials gesteuert. Es wird bewiesen, daß der Wert des virtuellen dynamischen Young-Moduls kleiner, und der virtuelle Verlustbeiwert größer als der Wert der Materialeigenschaft ist. Die Abweichung zwischen den wirklichen und virtuellen Werten hängt vom Verhältnis der Lateraldimension und der Wellenlänge sowie von den komplexen Elastizitätskonstanten des Materials ab.