CSŐVEZETÉKRENDSZEREK RUGALMASSÁGI TERVEZÉSE*

II. MEMÓRIATAKARÉKOS HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

KOLONITS FERENC**
A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA

Jelen tanulmány első részében megállapítottuk, hogy a tervező közvetlen bevonása és a csőtervezés operatív számításigényei egyaránt célszerűvé teszik asztali gép alkalmazását a tervező csoport mellett. A hálózatszámító programok kapacitásigénye tetemes, jelen részben megkíséreljük ennek csökkentését.

Alkalmazott jelölések

$\bar{f}$ — hatkomponensű (3 eltolódás, 3 elfordulás) mozgásvektor, ill. ezekből alkotott hipervektor
$\bar{p}$ — hatkomponensű (3 erő, 3 nyomaték) terhelésvektor (dinám), ill. ezekből alkotott hipervektor
$\mathbf{Z}$ — 6×6-os rugalmassági mátrix, ill. ezekből alkotott hipermátrix
$\mathbf{F}$ — forgatómátrix
$\mathbf{R}$ — vektorszorzást reprezentáló mátrix
$\mathbf{B}_{ij}$ — j-ről i pontra mozgást áthelyező 6×6-os mátrix
REF — referenciapont
$\mathbf{S}$ — szűrő diagonálmátrix
$\mathbf{K}$ — szűrt rugalmassági mátrix (kényszereknél)
n — csomópontok, ill. ágak száma
k — kényszerkomponensek (ismeretlen reakciók) száma
$\bar{v}$ — csővektor, ill. megoldáskeresési irány
$\bar{r}$ — helyvektor, ill. az iterációs maradék vektora
l — egyenes csődarab hossza
R — csőív sugara
Φ — csőív nyílásszöge
I — csőkeresztmetszet másodrendű nyomatéka
E — csőanyag rugalmassági modulusa

3. A csőhálózat statikai számítása

3.1. Az ág járulékai

A csőhálózat elemei az *ágak*. Az ág rugalmas egyenes és ívelt csődarabok (elemek), valamint merevnek tekinthető szakaszok, pl. armatúrák folyamatosan kapcsolódó elágazásmentes sora. Az ágak kezdő- és végpontjaikon egy-

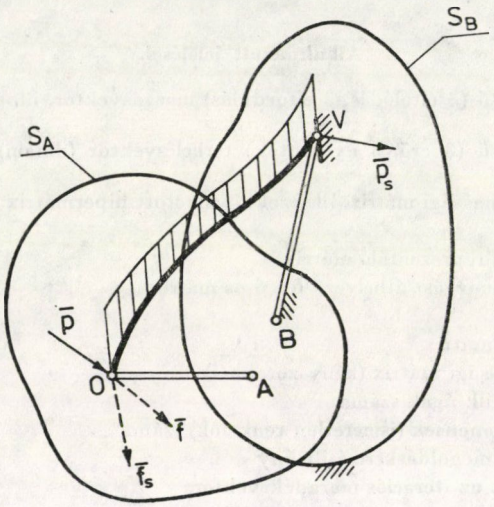
* Referátum az MTA Gépszerkezettani Bizottsága 1980. ápr. 21-i ülésén.
** Dr. Kolonits Ferenc, 1112 Budapest XI., Cirmos u. 4.

máshoz, ill. a környezethez csatlakozhatnak: ezen csatlakozási pontok a hálózat *csomópontjai.*

A későbbiekben felírandó hálózati egyenletrendszer a csomópontokra ható általános (hatkomponensű: erő és nyomaték) terhelés és ezen csomópontok mozgása (eltolódás és elfordulás) közt ad kapcsolatot.

Ezen kapcsolat a csomópontokat összekötő ágak bizonyos jellemzőiből építhető fel, amelyeket — mivel azt mutatják, miként járul hozzá az illető ág a rendszer alakváltozásához és a benne kialakuló erőkhöz — a befogott tartó ismeretes formuláinak mintájára az ág *járulékainak* nevezhetünk.

A járulékok, amelyek az ág kezdő- és végpontjának terhelési és mozgásállapotáról a fenti célra szükséges és elégséges információt adnak, az ág végét befogottnak feltételezve, az alábbiak (1. ábra):



1. ábra

— A kezdőpontot támadó $\bar{p}$ hatkomponensű (x, y, z erő- és nyomaték) terhelés alatt létrejövő $\bar{f}$ hatkomponensű mozgást (elmozdulást és a keresztmetszet elfordulását)

$$\bar{f} = \mathbf{Z}\bar{p} \tag{3.1}$$

összefüggésben megadó $\mathbf{Z}$ 6×6-os rugómátrix, amely mindenkor szimmetrikus és pozitív definit.

— Az ágat terhelő, adott törvényszerűség szerint megoszló terhelés (gyakorlatilag legfontosabb az egyenletesen megoszló önsúly) hatására a kezdőponton létrejövő $\bar{f}_{s,O}$ mozgás és a befogáson továbbadódó $\bar{p}_{s,V}$ terhelés. A kettőt összefoglalóan *súlyhatásnak* nevezzük.

— A befogáson a külső $\bar{p}$ terhelés is továbbadódik statikai áthelyezéssel, ennek végrehajtására még visszatérünk. Ez a „járulék" csak a kezdő- és végpont viszonylagos helyzetétől függ, az ágsajátságoktól nem.

A járulékok számszerű értéke függ a felírásnál alkalmazott (derékszögű, jobbsodrású) koordinátarendszer irányításától. Ha egy olyan I rendszerre kívánunk áttérni, amelynek tengely-egységvektorai K rendszerben megadva $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, úgy definiálnunk kell (csillaggal transzponáltat jelölve) a

$$\mathbf{F}_{IK} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}^* \\ \bar{j}^* \\ \bar{k}^* \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{i}^* \\ \bar{j}^* \\ \bar{k}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

forgatómátrixot; $\mathbf{FF}^* = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{E}$ (egységmátrix). A transzformált mennyiségek

$$\bar{p}_I = \mathbf{F}_{IK}\,\bar{p},\quad \bar{p}_K = \mathbf{F}_{IK}^*\,\bar{p}_I \tag{3.3}$$

és ugyanúgy minden terhelés- és mozgásvektorra; a rugómátrixra pedig

$$\mathbf{Z}_I = \mathbf{F}_{IK}\,\mathbf{Z}_K\,\mathbf{F}_{IK}^*,\quad \mathbf{Z}_K = \mathbf{F}_{IK}^*\,\mathbf{Z}_I\,\mathbf{F}_{IK}\,. \tag{3.4}$$

Előadódhatik olyan helyzet, hogy a számítás szempontjából nem az O pont, hanem valamilyen, O-val merev szakasszal összekötött A pont mozgása a lényeges. Az O ponti forgáskomponensek A-nál változatlanul megjelennek, a mozgás azonban az összekötő merev szakasz „kaszálása" következtében megváltozik. Ha a forgások kicsik és az áthelyezést mutató vektor negatívja $(\overrightarrow{AO})$

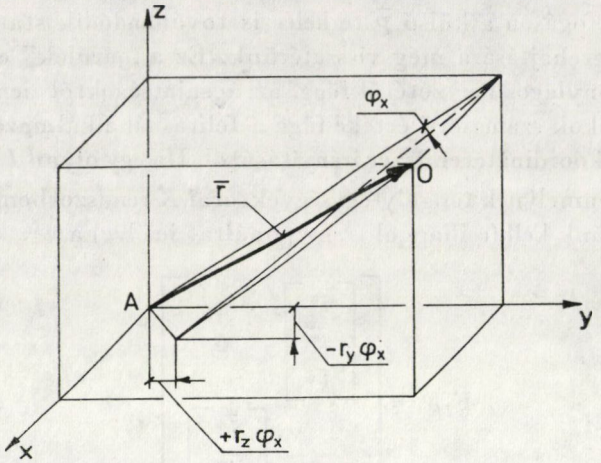
$$\bar{r}^* = [r_x, r_y, r_z],$$

úgy az elmozdulásnövekmény (2. ábra)

$$\left.\begin{aligned} \Delta\bar{F} &= \mathbf{R}_{AO}\,\bar{\varphi}, \\ \mathbf{R}_{AO} &= \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

összefoglalóan

$$\bar{f}_A = \mathbf{B}_{AO}\bar{f}_O,\quad \mathbf{B}_{AO} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{R}_{AO} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$



2. ábra

A fenti **R** mátrix vektoriális szorzat komponenseit képezi mátrixművelettel, oszlopvektorba foglalva:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}\bar{v} &= [\bar{r} \times \bar{v}], \\ \mathbf{R}^* &= -\mathbf{R}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Ha a terhelés nem az ágvégen, hanem a csatlakozó merev szakasz A végpontjában támad, O pontban ez változatlan erőket, de a statikai áthelyezés következtében megnövekedett nyomatékokat jelent. Az előbbihez hasonlóan kimutatható, hogy

$$\bar{p}_O = \mathbf{B}^*_{AO}\,\bar{p}_A\,. \tag{3.8}$$

A korábban említett, külső terhelésből befogáson továbbadódó terhelés (áthelyezéssel)

$$\bar{p}_V = \mathbf{B}^*_{OV}\,\bar{p}_O\,. \tag{3.9}$$

A **B** áthelyezőmátrixokra fennáll

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}_{AO}\,\mathbf{B}_{OA} &= \mathbf{B}^*_{OA}\,\mathbf{B}^*_{AO} = \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}_{AA} &= \mathbf{B}^*_{AA} = \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}_{AO}+\mathbf{B}_{OA} &= \mathbf{B}^*_{AO} + \mathbf{B}^*_{OA} = 2\mathbf{E}, \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

és tetszőleges C pontra

$$\mathbf{B}_{AO} = \mathbf{B}_{AC}\,\mathbf{B}_{CO},\ \mathbf{B}^*_{AO} = \mathbf{B}^*_{CO}\,\mathbf{B}^*_{AC}\,. \tag{3.11}$$

Ha az AO merev rudat az OV ággal egyesítve egyetlen ágnak tekintjük, ennek rugómátrixa

$$\mathbf{Z}_{AO} = \mathbf{B}_{AO}\,\mathbf{Z}_0\,\mathbf{B}^*_{AO}\,, \tag{3.12}$$

súlyokozta saját mozgása az új végpontra

$$\bar{f}_{s,A} = \mathbf{B}_{AO}\bar{f}_{s,O}. \tag{3.13}$$

A befogáson továbbadódó súlyterhen mindez nem változtat, a külső teher áthelyezésénél a kezdőpontváltozás figyelembe veendő.

Az ág rugómátrixán és a saját mozgáson mit sem változtat, ha a befogást nem V-ben, hanem a rúdvéghez VB merev szakaszt csatolva B-ben vesszük fel. A befogáson továbbadódik súlyteherből

$$\bar{p}_{s,B} = \mathbf{B}^*_{VB}\bar{p}_{s,V}, \tag{3.14}$$

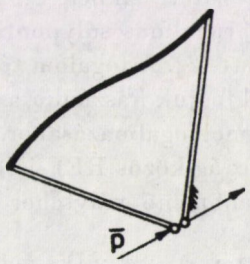
külső teherből

$$\bar{p}_B = \mathbf{B}^*_{AB}\bar{p}_A. \tag{3.15}$$

Az A, B pontra és az eredeti O, V-re értelmezett járulékok kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban állnak, tehát szükséges és elégséges mivoltukban egyenértékűek. Úgy is tekinthetjük, hogy a V ponthoz mereven hozzákötjük a teljes teret (S_B) és ezen teret rögzítjük, az O-hoz ugyancsak a teljes teret, az előbbi egy „fedő terét" (S_A) — ebben hat a külső terhelés. A járulékok ezen két tér kapcsolatát írják le, egy-egy bennük tetszőlegesen felvett pontra vonatkoztatva (1. ábra). Valamely pont mozgása S_B-ben a S_A-beli fedőpontjához képest végzett mozgás.

Lehetséges és célszerű a két vonatkoztatási pont olyan felvétele, hogy ezek a S_A és S_B terekben terheletlen állapotban egymás fedőpontjai legyenek. Más megfogalmazásban: a fizikai csomóponttól csomópontig menő ág mint hálózatelem helyett olyan elemet alkalmazunk, amelynek elejére és végére egyazon REFerenciapontba nyúló merev rudakat kötöttünk. Az eredeti és REF járulékok összefüggése (3.12 . . . 14)-ből adódik, (3.15)-ből pedig az, hogy a kezdőpontot támadó külső erő változatlanul adódik tovább (3. ábra).

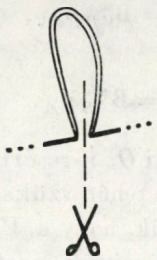
A REF járulékok előállítása a szokásosakhoz képest többletmunkát nem kíván, hiszen az ágakat mindenképp egyenes és ívelt elemeiből összegezve állítjuk elő: közömbös, hogy ezen összegzést a fizikai kezdő- és végpontra vagy máshová vonatkoztatva végezzük.



3. ábra

Az előálló alakzat funkcionálisan hasonló a jávai bábszínház figurájához, amelynek tagjait a játékos hosszú „vajang" pálcákkal mozgatja, a keze a referenciapont.

A fizikai hálózatba a fentebbiek szerint értelmezett elemekhez szükséges vajangokat nehézség nélkül beiktathatjuk. Ha a csövet valahol átvágjuk és az átvágás két partját tetszőleges alakú merev szakasszal összekötjük (4. ábra), ez az alakzat az ép csővel rugalmasságban egyenértékű.



4. ábra

A vajangosított ágon a statikai egyensúly feltétele az áthelyezések elmaradásával a korábbinál egyszerűbb. A támadó erő mintegy „végigfolyik" az ágon és „mátrixosan arányos" mozgáskülönbséget hoz létre a kezdő- és végpont közt. Részletes villamos analógia alakítható ki: (3.1) az Ohm-törvény, a mozgás — feszültség, a terhelés — áram, a rugómátrix — impedancia; a súlyhatások feszültség- és áramgenerátorok. A villamos hálózatok kezelésében kialakított módszerek adaptálhatók.

A **Z** és $\bar{p}_s$ a kezdő- és végpont felcserélésekor nem változik.

A REF bevezetésének további előnye, hogy a szóbanforgó csőalakzathoz igazodó felvételével a járulékok alakilag egyszerűsödnek. JÜRGENSONN két befogás között hőtágulással befeszített síkbeli csőág vizsgálatakor voltaképp REF-nek vette a nyomvonal „rugalmas súlypontját" és ilyen értelmezésben nyomatékmentes reakciót kapott [2]. A fogalom térbeli vezetékekre etekintetben nem általánosítható, de fel fogjuk használni az ágat alkotó elemek járulékainak minimális terjedelmű megfogalmazásakor. Ezeket alkalmasan illesztett REF-ekre írjuk fel, majd az ág közös REF-jére transzformálva összeadjuk (figyelembevéve, hogy a továbbmenő súlyteher a további elemekre külső teher).

A transzformációs formulák az i (i-ik) egység- és R közös REF között, tekintetbe véve a K közös és az I illeszkedő rendszer közti esetleges forgatást

is (3.3, 4):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{R,i} &= \mathbf{B}_{Ri}\mathbf{F}^{*}_{IK}\mathbf{Z}_{i}\mathbf{F}_{IK}\mathbf{B}^{*}_{Ri}, \\ \bar{f}_{s,R,i} &= \mathbf{B}_{Ri}\mathbf{F}^{*}_{IK}\bar{f}_{s,i}, \\ p_{s,R,i} &= \mathbf{B}^{*}_{iR}\mathbf{F}^{*}_{IK}\bar{p}_{s,i}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ez a hagyományos eljáráshoz képest csak annyi többletmunkát jelent, hogy meg kell határozni az „alkalmas" egység-REF térbeli helyzetét.

Egyelőre nem sikerült tisztázni, lehetséges, ill. célszerű-e valamilyen optimalizáló megkötést tenni az ág REF felvételére: a Jürgensonn-féle általánosítási problémák miatt ez kevéssé valószínű. Bizonyos azonban, hogy nem szabad szükségtelenül hosszú vajangokat alkalmazni. A számítógép ugyan nagy, de mégis korlátozott számú jeggyel jeleníti meg az egyes mennyiségeket. A forgásokban és erőkben jelentkező kerekítési hibák áthelyezéskor a hosszakkal szorzódnak, a (3.5) szerinti mozgás-, valamint forgásnövekmények hibája a „nagy számok kis különbsége" miatt tovább nőhet. A bábjátékhasonlatot folytatva: még biztos kezű játékos keze is reszket kismértékben, s ez áttételeződve rárakódik a báb szerep szerinti mozgására. Minél nagyobb az áttétel, annál zavaróbb a véletlenszerű táncolás, ami túlsúlyra jutván felismerhetetlenné teszi a cselekményt. Végeredményben a (3.16) transzformáció a járulékok meghatározottságát rontja.

Célszerű arra törekedni, hogy ez a romlás a szereplő csőrészek összességére a lehető legkisebb legyen: a választott REF a „lehető legközelebb" legyen a nyomvonalhoz. Rugalmasabb darabok nagyságukat meghaladó részarányban befolyásolják az összképet, ugyanígy a súlyosabbak is. Mindezen megfontolások újra csak valamiféle „rugalmas súlyponthoz" vezetnek. A gépi pontosság azonban kellő tartalékot jelent, hogy egzakt optimumra ne legyen szükség — elegendő, ha a REF-et a szereplő összes rugalmas alakzatok közepetáján „szemre" vesszük fel. Bizonyos azonban, hogy a járulékok szokásos definíciója a fizikai ág elejére és végére vett vonatkoztatási pontjaival távolról sem optimális.

A tapasztalatok szerint a rugómátrixok általában hajlamosak a gyenge meghatározottságra és ez különösen a későbbiekben alkalmazásra kerülő iterációs módszernél nehézséget jelenthet. A feltételek az algoritmus átgondolt programozásával javíthatók [6]. Megfontolandó, hogy az olyan rendszerek, amelyek bizonyos irányokban kiemelkedően merevek, vagy aránytalanul oszlik meg rugalmasságuk, általában különlegesen kedvezőtlenek, de tisztán konstrukciós szempontból is kerülendők (pontatlan szerelés, helyi túlterhelés kockázata). Függőleges cső több helyen történt merev felkötésénél (helyi axiális befeszülést okozott) éppúgy tapasztaltunk numerikus nehézségeket, mint tévesen, abszurd helyen felvett REF esetében.

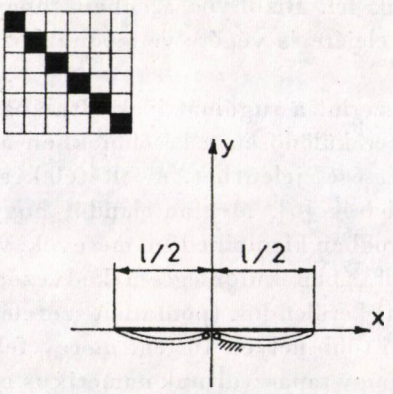
3.2. A járulékok felépítése elemekből

Az *egyenes elem* járulékait az 5. ábra szerinti rendszerben adjuk meg. A rugómátrix diagonális és a tengelyirányú húzás, hajlítás mellett szokásos elhanyagolása miatt szinguláris; $\bar{q}$ az egységnyi csőhosszra jutó megoszló súlyerő.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{l}{IE}\langle 0,\ l^2/12,\ l^2/12,\ 1+\nu,\ 1,\ 1\rangle \\ \bar{f}_s &= \frac{l^3}{6\,IE}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/4 & 0 \\ 0 & 0 & l/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\bar{q};\quad \bar{p}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\bar{q} \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Megjegyzendő, hogy **Z** fenti szingularitása csak akkor eredményezné a rendszermátrix szingularitását, ha egyenes szakaszt akarnánk hőtágulás felvételére kényszeríteni. A gyakorlatban vagy további csatlakozó elemek adják meg az egyenes tengelyirányában az ág szükséges rugalmasságát, vagy egyetlen egyenesből álló ágnál a tengelyirányú mozgás nincs korlátozva: ennek ellenkezője konstrukciós hiba.

A 6. ábra szerinti ívre Castigliano-tétellel számíthatók a járulékok. A k_i, k_0, k_t tényezők azt mutatják, hogy az ívet síkjában, ill. abból kihajlításra terhelő, valamint csavaró nyomaték hatására hányszorta nagyobb alakváltozás jön létre, mint egyenes cső hajlításánál. k_i értéke a Kármán-szám reciproka, k_0 ugyanennyi vagy 1 (ez kevésbé elterjedt feltevés), $k_t = 1 + \nu$. Az ismétlődő mennyiségekre rövid jelölést vezetünk be:



5. ábra

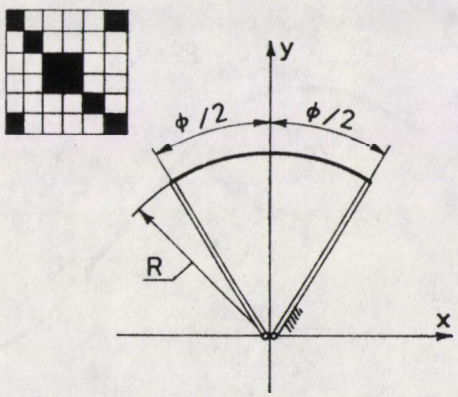
$$
\begin{aligned}
P &= (\Phi + \sin\Phi)/2,\\
M &= (\Phi - \sin\Phi)/2,\\
F &= \sin(\Phi/2),\\
C &= 2[F - (\Phi/2)\cos(\Phi/2)].
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{Z} = \frac{R}{IE}\begin{bmatrix}
k_t R^2 P & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_i RF\\
0 & k_i R^2 M & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & k_t R^2 \Phi & -2k_t RF & 0 & 0\\
0 & 0 & -2k_t RF & k_t P + k_0 M & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & k_t M + k_0 P & 0\\
2k_i RF & 0 & 0 & 0 & 0 & k_t \Phi
\end{bmatrix}
$$

$$
\bar{f}_s = \frac{R^3}{IE}\begin{bmatrix}
f_{11} & f_{12} & 0\\
f_{21} & f_{22} & 0\\
0 & 0 & f_{33}\\
0 & 0 & f_{43}\\
0 & 0 & f_{53}\\
0 & f_{62} & 0
\end{bmatrix}\bar{q},
\qquad
\begin{aligned}
f_{11} &= k_i R(\Phi P/2 - 2F^2),\\
f_{12} &= -k_i R(M + \Phi F^2)/2,\\
f_{21} &= k_i R(3M - \Phi F^2)/2,\\
f_{22} &= k_t R \Phi M/2,\\
f_{33} &= k_t R(\Phi^2/2 - 2F^2),\\
f_{43} &= (k_0 - k_t) FM,\\
f_{53} &= (k_0 + k_t) C + (k_0 - k_t) M\cos(\Phi/2),\\
f_{62} &= -2k_i C.
\end{aligned}
$$

$$
\bar{p}_s = R\begin{bmatrix}
p_{11} & 0 & 0\\
0 & p_{12} & 0\\
0 & 0 & p_{33}\\
0 & 0 & p_{43}\\
0 & 0 & 0\\
p_{61} & 0 & 0
\end{bmatrix}\bar{q},
\qquad
\begin{aligned}
p_{11} &= p_{22} = p_{33} = \Phi,\\
p_{43} &= -p_{61} = 2RF.
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

Az egyenes formulái tovább nem egyszerűsíthetők. Az ív rugómátrixából a REF a súlypontba helyezésével lehetne kiküszöbölni elemeket, de a



6. ábra

maradók bonyolódnának. A diagonalizálás ilyen módon nem lehetséges, mivel a sajátvektorok nem külön-külön, hanem együttesen is tartalmazzák a terhelés erő- és nyomatékrészét.

A járulékokat (3.16) szerint áthelyezzük a közös rendszerbe és REF-re. Az összegzés a $\mathbf{Z}, \bar{f}_s, \bar{p}_s$ gyűjtő változókba az alábbiak szerint történik ($:=$ az értékadás jele)

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{Z} := \mathbf{Z}_1\,;\ \bar{f}_s := \bar{f}_{s,1}\,;\ \bar{p}_s := \bar{p}_{s,1}\,;\\ &i := 2\,,\ \ldots\ n\text{-re}\\ &\mathbf{Z} := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}_i\,;\ \bar{f}_s := \bar{f}_s + \bar{f}_{s,i} + \mathbf{Z}_i\bar{p}_s;\ \bar{p}_s := \bar{p}_s + \bar{p}_{s,i}\,; \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

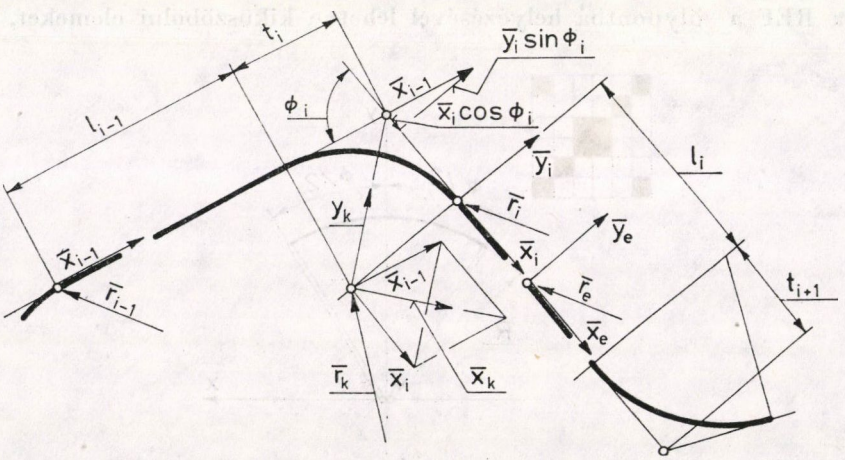
Merev szakasz csak a továbbadódó súlytehernél szerepel, a rugalmas járulékok összegzéséből kimarad.

A nyomvonal megadása célszerűen a kezdőpont (o) referenciaponttól vett $\bar{r}_0$ helyvektorával, majd a nyomvonaltörésponttól töréspontig mutató $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \ldots$ csővektorokkal és a kiindulópontjukon érvényes $R_1, R_2, \ldots$ nyomvonallekerekítési sugárral történik.

A bevitt vektorokból rendre képezhető (7. ábra)

$$\begin{aligned} &v_i = \sqrt{\bar{v}_i^*\,\bar{v}_i},\ \bar{x}_i = \bar{v}_i/v,\ \ \Phi_i = \arccos\,(\bar{x}_{i-1}^*\,\bar{x}_i)\\ &t_i = R_i \tan\,(\Phi_i/2),\ \ \bar{y}_i = (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i \cos\Phi_i)/\sin\Phi_i,\\ &\bar{r}_i = \bar{r}_{i-1} + (l_{i-1} + t_i)\,\bar{x}_{i-1} + t_i\,\bar{x}_i,\ \ l_i = v_i - t_i - t_{i+1},\\ &\bar{z}_i = \bar{x}_i \times \bar{y}. \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Az első egyenes elemnél lekerekítés nem lévén, $\bar{y}_0$ a fentiek szerint nem képezhető: az $\bar{x}_0$-ra mindenkor merőleges $x_{0y} - x_{0z}$, $x_{0z} - x_{0x}$, $x_{0x} - x_{0y}$-val párhuzamos egységvektort vesszük fel.



7. ábra

Az egyenes elem rendszere a fenti i-vel azonos állású: a REF

$$\bar{r}_e = \bar{r}_i + l_i \bar{x}_i/2 . \tag{3.21}$$

A körív illesztett rendszere

$$\begin{aligned} &\bar{r}_k = \bar{r}_i - R\bar{y}_i , \\ &\bar{x}_k = (\bar{x}_{i-1} + \bar{x}) \Big/ \left(2 \cos \frac{\Phi_i}{2}\right) ; \; \bar{y}_k = (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i) \Big/ \left(2 \sin \frac{\Phi_i}{2}\right) , \\ &\bar{z}_k = \bar{z}_i . \end{aligned} \tag{3.22}$$

A $\bar{q}$ megoszló terhelést be kell forgatni az egyes elemek rendszerébe. A formulák szélteher vizsgálatára is alkalmasak, ha egyenesnél az axiális komponenst elhagyjuk, ívnél pedig — közelítéssel — a vetületre jutó terhet egyenletesen elosztjuk a nyomvonalon.

3.3 A számított rendszer és a kényszerek

Az általános szóhasználatban *csővezetékrendszernek* csövek valamilyen technológiai szempont szerint körülhatárolt, esetleg közvetlenül össze sem függő együttesét nevezik (pl. főgőz-rendszer). A számítás szempontjából *rendszer* az egy egységben számítandó, egymással összefüggő csövek együttese, az előbbinek többnyire csupán része. Olyan csőalakzat, amely csak helyben maradó vagy ismert mozgású környezeti pontokkal függ össze, más rugalmas csőalakzatok nem hatnak rá. Határán nem szükségszerűen ér véget fizikailag a vezeték: a folytatástól mindenfajta mozgást meggátló környezethez rögzítés (befogás) vagy minden irányban ellenállásmentesen deformálható csőelem (különleges kompenzátor) ugyanúgy elválasztja a rendszert, mintha a vezeték tovább se menne. A környezeti pontokhoz kapcsolódás szerkezetei — a *kényszerek* — a szorosan vett csőhálózattal együtt vizsgálandók.

Az ág járulékainak korábbi megfogalmazásából látható, hogy csak végpontjain — azaz a hálózat csomópontjain — tudunk figyelembe venni külső terhelést, ill. számíthatunk mozgásokat. A hálózatot ennek figyelembevételével kell csomópontok kijelölésével ágakra bontani. *Csomópont* tehát,

— ahol a vezeték a környezethez bármilyen:
  teljes (mind a hat irányban és értelemben) vagy részleges, merev vagy adott rugalmasságú összeköttetéssel: kényszerrel csatlakozik,
— ahol a vezetékre külső koncentrált terhelés hat,
— a vezeték elágazik, vagy fizikailag végetér (ha utóbbira nem hat egyszersmind terhelés vagy kényszer, a csatlakozó ágat a számításból kihagyhatjuk, mint terheletlent),
— ahol a vezeték mozgását valamilyen ok (pl. fenyegető helyszűke) miatt ellenőrizni kívánjuk.

Egy csomópontra a fentiek közül több is érvényesülhet. Az egyöntetűség kedvéért mondhatjuk úgy is, hogy minden csomópontra érvényesül kényszer, csak egyes esetekben olyan, ami minden irányban szabad mozgást enged. A külső koncentrált erők esetét a tárgyalásból kétféleképp is kiiktathatjuk:

— vagy megfelelő módon befoglaljuk a súlyhatásokba,
— vagy igen lágy, kellőképp megfeszített rugót kötünk a csőhöz: ennek kis mozgásai a feszítést nem módosítják lényegesen.

A kényszer a csomópontot és az (általában álló) környezetbeli fedőpontját összekötő különleges ág, amelynek

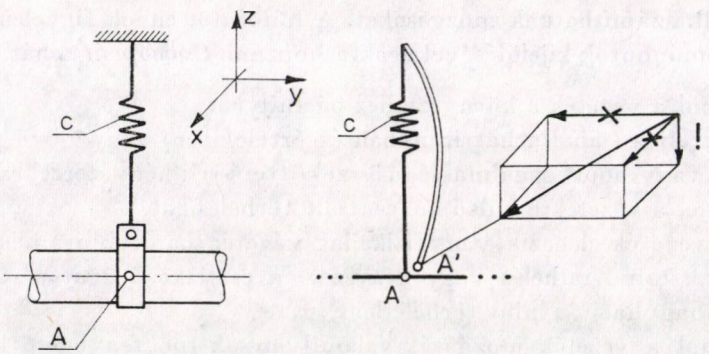
— geometriai hossza zérus,
— súlyhatásai nincsenek,
— rugómátrixa megfelelő koordinátarendszerben diagonális és többnyire szinguláris.

A gyakorlati csőszerkezetek többnyire úgy igazodnak az épületszerkezethez, hogy önként kínálkozik olyan derékszögű rendszer, amelynek tengelyeihez a csövek nagy része illeszkedik. A kényszerek zöme felfüggesztés vagy befogás, az oldalirányú kikötések-vezetések ritkábbak, és ezek irányítása sem tér el a főrendszertől. Gyakorlatilag elegendő olyan kényszereket vizsgálni, amely a rendszer egészének leírására használt koordinátarendszer tengelyirányaiban, ill. azok körül hatnak mereven vagy rugalmasan (általánosságban forgatást kellene beiktatni).

A 8. ábrán látható rugós felfüggesztést a mellette feltüntetett alakzattal modellezhetjük, ahol a rugó külső végét vajanggal az A' fedőponthoz kötöttük. A rugómátrix

$$\mathbf{Z} = \langle \infty, \infty, c, \infty, \infty, \infty \rangle . \tag{3.23}$$

A végtelen elemek formálisak, a számításban nincs szerepük. A számítás során azt kell majd vizsgálnunk, hogyan deformálják a rendszert a kényszerekről



8. ábra

átadódó reakcióerők. Olyan reakcióerő viszont eleve nem ébredhet, amely a kényszeren ∞ mozgást idézne elő: a kényszer a lehetséges reakciókat eleve megszűri. Ezt a szűrést egy 0 és 1 elemekből álló

$$\mathbf{S} = \langle 0, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle \tag{3.24}$$

diagonálmátrixszal való szorzás valósítja meg. Ha pedig a számításban eleve csak ilyen kompatibilis reakciókat veszünk tekintetbe, használhatjuk a

$$\mathbf{K} = \mathbf{SZ} = \langle 0, 0, c, 0, 0, 0 \rangle \tag{3.25}$$

szűrt rugómátrixot.

A merev kikötés irányában a rugóállandó **0**. A befogás jellemzői:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}, \ \mathbf{K} = \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \tag{3.26}$$

A minden irányban szabad mozgás „kényszere":

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{3.27}$$

A minden irányban rugóval megvalósított kényszerre:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}, \ \mathbf{K} = \mathbf{Z}. \tag{3.28}$$

A fenti reprezentáció az erőmódszernek felel meg, amikor a reakciókomponenseket tekintjük ismeretlennek. Gyakorlati vezetékeknél az egy-két komponensű részleges kényszerek miatt (aholis négy-öt ismeretlen mozgáskomponens adódik) általában ezúton kell kevesebb ismeretlennel dolgozni, mint a mozgáskomponensek meghatározását célul kitűző mozgásmódszernél. Az utóbbinak egyéb előnyei vannak, amelynek következtében pl. végeselemes módszereknél szinte kiszorította az erőmódszert, ilyen egyebek közt a rendszermátrix kevéssé kitöltött volta. A továbbiakban kidolgozandó egyenletmegoldási algoritmus mellett ez a különbség kevéssé jut érvényre, ezért nem tűnik szükségesnek eltérni a hagyományos erőmódszertől. Emellett szól az is, hogy a mozgásmódszer alapjául szolgáló **Y** merevségi mátrixokat csöveknél nem lehet közvetlenül előállítani, csak a rugómátrix invertálásával. Ezért a mozgásmódszer részleteivel nem foglalkozunk, csupán a teljesség kedvéért a kényszerek kezelését vázoljuk.

A vizsgált kényszer merevségi mátrixa

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \langle 0, 0, 1/c, 0, 0, 0 \rangle \tag{3.29}$$

nehézség nélkül, formálisan adódik. Végtelen elemeket akkor tartalmaz, ha valamelyik komponens merev. Ezekben az irányokban eleve nem vehetünk fel mozgáskomponenst; a fentiek mintájára $\mathbf{S}_m$ mozgásszűrőt és **W** szűrt merevségi mátrixot definiálhatunk (a bemutatott esetre $\mathbf{S}_m = \mathbf{E}$).

Befogásnál

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{0}, \ \mathbf{W} = \mathbf{0}; \tag{3.30}$$

minden irányban szabad mozgást engedő „kényszer" esetében

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{E},\ \mathbf{W} = \mathbf{Y} = \mathbf{O}; \tag{3.31}$$

minden irányban rugalmas kényszerre

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{E},\ \mathbf{W} = \mathbf{Y}. \tag{3.32}$$

A szűrt mátrixok összefüggése:

$$\mathbf{KW} = \mathbf{SS}_m = \mathbf{S} + \mathbf{S}_m - \mathbf{E} = \mathbf{E} - (\mathbf{S} - \mathbf{S}_m)^2. \tag{3.33}$$

A rugó-szűrő információkat igen tömör formában tárolhatjuk hatjegyű bináris számokkal, amelyeknél a sorrendben vett irányokra nézve *0* kényszer hiányára, *1* pedig jelenlétére utal, más kiegészítő információ hiányában merevre. Ily módon 63 a befogás vagy minden irányban rugalmas kényszer, 8 a felfüggesztés, 27 = 011011 az x-irányú mozgás és x körüli forgást megengedő vezetés leírója. A rugózásra vonatkozó információt ebbe a szükségképp pozitív számokból álló leírósorozatba az alábbi módon illeszthetjük. Kijelölünk a rugóállandók számára egy tárolóvektort (mondjuk A) és ebbe írjuk az összes szereplő állandókat, az ismétlődőket is csak egyszer. Ha valamelyik kényszer rugózott, a szűrő után egy negatív számmal megadjuk, visszafelé hányadik „értékes" kényszerkomponensről van szó, majd a rugóállandó indexét a tárolóvektorban utánaírjuk. A negatív előjel a feldolgozáskor mutatja, hogy nem szűrő, hanem rugómegadás következik.

Legyen egy kényszer merev függesztés, x és y irányban rugózott kikötés és tartalmazza a rugóállandókat az A vektor 2. és 5. eleme. A teljes leíró:

$$\ldots, 56, -3, 2, -2, 5, \ldots$$

Tekintve, hogy a leíró elemeinek nagysága korlátozott, a használt gép lehetőségeitől függően további tömörítés lehetséges.

A vázolt reprezentációban nem mutatkozott lehetőség a kényszerek merev rúd mentén történő általános áthelyezésére, hogy ily módon a teljes számítást függetlenné lehessen tenni a csomópontok térbeli helyzetétől. Teljes, mind a hat komponensre kiterjedően szabad, rugalmas vagy merev kényszert ugyan át lehet vinni tetszőleges REFre, részleges kényszernél a szűrés azonban úgy jelenik meg, hogy a REFnél megengedhető, kompatibilis terhelés komponensei közt lineáris kapcsolatnak kell fennállnia — ezt a lineáris kapcsolatot a csomópont és REF közti áthelyezőmátrixnak a „részlegességhez" igazodó szelete jellemzi.

3.4. A hálózati egyenlet és megoldása

A számítás közvetlen célja, hogy megállapítsuk, milyen terhelések adódnak a rendszerre és hová mozdulnak el a csomópontjai a ható súly- (és koncentrált) erők, valamint a hőtágulás megakadályozása következtében. Az ered-

mények birtokában az egyes elemek szilárdsági ellenőrzése a keresztmetszeti terhelések megállapításával külön műveletként végezhető.

A szerkezetet először is kellő számú kényszer eltávolításával statikailag határozottá tesszük. Ez elvileg sokféleképp végezhető, gyakorlatilag célszerű egyetlen befogást meghagyni. Ilyen a csőrendszeren extrém kivételektől eltekintve mindig van. Kedvező, ha ez a befogás maga nem mozog (pl. csatlakozó berendezés hőtágulása következtében — ha ilyen nem lenne, a választott befogást ellenkező mozgás teljes rendszerre szuperponálásával „meg kell állítani". Ha több lehetőség van, tapasztalat szerint célszerű a legmerevebb ághoz tartozó befogást meghagyni.

A kényszerek eltávolítása úgy értendő, hogy az illető csomópont környezetbeli fedőpontját felszabadítjuk. Különleges belső kényszer a zárt hurok. Ezt valamelyik csomópont mellett átvágjuk, így pótlólagos csomópont keletkezik. Az itt ható „reakcióerő", helyesen hurokerő ellentettje az átvágás másik partján levő csomópontra hat, és nagyságát az szabja meg, hogy megszüntesse a két csomópont közt felléphető mozgáskülönbséget: azok „mereven" kövessék egymást. A kényszerleíróban az új csomóponthoz 63 tartozik.

Az így szabaddá tett rendszerben az ágak tágulásának és súlyhatásainak később részletezendő összegzésével megállapítható, mennyit mozdulnak el a fedőpontok eredeti környezetbeni helyükhöz képest. A különbözetet tovább növeli, hogy ezek a helyek maguk is mozoghatnak (turbinacsonk stb.). A fedőpontokon olyan reakciók fognak ébredni, amelyek ezeket a mozgáskülönbözeteket megszüntetik és a fedőpont a környezettel újra összekapcsolható. Hurokátvágásnál az átvágás két partjának mozgáskülönbségét kell megszüntetni: az újonnan keletkezett csomópontot kell a régihez húzni.

A hagyományos eljárás az, hogy az ágak és kényszerek rugómátrixaiból az áthelyezőkkel alkotott hármasszorzatok összegzésével, egységes táblázatba rendezésével és a meg nem engedett reakciókomponensek (amelyek irányában visszatolást sem írhatunk elő, hiszen a mozgás szabad) sorának és oszlopának kihúzásával megkonstruáljuk a rendszer egyesített **Z** rugómátrixát, majd megoldjuk a

$$\mathbf{Z}\bar{p} = \bar{f} \tag{3.34}$$

egyenletet, ahol $\bar{p}$ a megengedett reakciókomponensek, $\bar{f}$ pedig a szükséges visszatolások rendezett vektora. Utóbbiak a fedőponti terhelések és mozgások egyesítésével, a szabad komponensek elhagyásával származtathatók. Méretszámuk a statikai határozatlanságot okozó kényszerkomponensek száma, azaz a rendszer (erőmódszerbeni) szabadságfokainak száma, amit a továbbiakban k-val jelölünk.

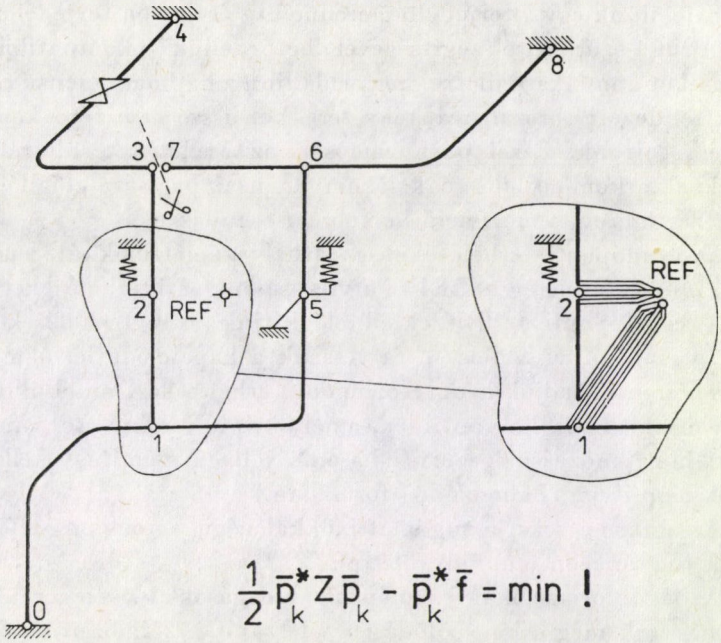
Ha kihasználjuk a szimmetriát, a megoldáshoz szükséges munkarekeszeken kívül a mátrix tárolásához $(k + 1)k/2$ számú rekesz kell, de így még nem kaptuk meg a kényszermentes irányokban fellépő mozgásokat. Utóbbihoz a

kihúzott sorokból $(6n - k)k$ terjedelmű részre is szükség van, ahol n a hálózat csomópontjainak száma (eltekintve a megmaradó befogástól).

A mátrix megkonstruálása elég hosszadalmas művelet és a rugómátrixok meglehetősen hajlamosak a gyengén meghatározottságra, úgyhogy nem lehet eleve kizárni az iteratív javítás szükségességét. (Bár a gyakorlatban azt tapasztaltuk, ha a megoldás pontatlansága már zavaró szintet ért el, akkor olyan gyengén meghatározott volt a rendszer, többnyire konstrukciós hibából kifolyólag, hogy az iteratív javítás sem hozott eredményt.) A REF bevezetésével a mátrixszerkesztés lényegesen egyszerűsíthető. A memóriaigény csökkentése érdekében azonban olyan algoritmust alakítunk ki, amely egy (3.34) transzformációt a mátrix explicit ismerete nélkül elvégez és iteratív eljárást alkalmazunk — ami a fentiek szerint nem eleve rosszabb megközelítés.

Számozzuk be a csomópontokat a megmaradó befogástól mint 0-tól mindenkor kifelé haladva, hurokátvágásnál az új csomópont sorszáma legyen mindig nagyobb, mint a másik parton levő régié. Csomópont sorszáma egyszersmind a belőle befogás felé menő ág sorszáma is. A csomópontokról vágjuk le az ágakat és indítsunk végeikről merev rudakat egy az egész hálózatra közös REF-hez, ahol aztán a kapcsolódó ágakat újra összekötjük. Így megjelennek a hálózatban a vajangosított ágak. A fizikai csomópontok és kényszerek maradnak a helyükön, a REFnél kialakított ágkapcsolódáshoz vajanggal csatlakoznak. Kényszermentes csomópontnál és befogásnál ez mellőzhető lenne, hiszen ezek a REFen is értelmezhetők lennének, az egyöntetűség miatt ettől eltekintünk (9. ábra).

Az ágak kapcsolódásának rendje tömören leírható az ún. „fa" és „hurok" vektorokkal. Az előbbi rendre minden csomópontra megadja, hogy a befogás felé milyen sorszámú csomóponthoz kapcsolódik — tehát a hálózatból létrehozott fa alakú irányított gráf szerkezetét mutatja. Az utóbbi ugyancsak minden csomópontra megadja, ha az hurokfelvágásnál keletkezett, milyen sorszámú csomópont áll a másik parton; ha nem, a megfelelő vektorelem zérus. Ez jogosabb, mint puszta helykitöltés, hiszen ezen csomópontok fedőpontját és a megmaradó, helytállónak tekintett befogást, a 0. csomópontot összekapcsolhatjuk merev szakasszal: a mozgások értelmezhetők úgy, mint a 0. csomóponthoz viszonyított relatív mozgások. Így fiktív hurkok átvágásából lehet származtatni a csomópontokat: a hurok fele a csomóponti erők által a befogásig feszített ágak együttese, a másik fele a környezeten keresztüljövő merev visszavezetés. Az átvágás szigorúan véve nem a csomópont, hanem a fedőpontja mellett történik, a fedőponttal összekötő kényszerek a csomóponton maradnak. A másik parton az eredeti hálózatban nem közvetlen a 0. csomópont áll. Ha mindezt a REFre átvitt hálózatra vonatkoztatjuk, ott a kényszerek már nem szerepelnek a képben és az átvágás a szóban forgó, valamint 0. csomópont referenciaponti megfelelője közt értelmezhető. Az erőmódszer természetét tekintve éppúgy hurokmódszer, mint a villamos hálózatok áram-



9. ábra

módszere; a mozgásmódszer a feszültségmódszerhez hasonlóan csomópontok egyensúlyát vizsgálja.

A 9. ábra hálózatára a vektorok elemeit a (3.35) táblázat tartalmazza.

Sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8
Fa	0	1	2	3	1	5	6	6
Hurok	0	0	0	0	0	0	3	0

(3.35)

Ebből a keretezett rész tekinthető nem-magától értődő információ hordozójának. Gyakorlati csőhálózatban a hurkok nem túl gyakoriak. A két vektor együttesen tárolható, ha rendre megadjuk a 2. csomóponttól a favektor elemeit, a hurokelemeket, ha vannak, a faelem után negatív előjellel iktatjuk a sorba. A leírók számszerűen korlátozott nagysága itt is lehetővé teszi a gépi sajátságoktól függő tömörítést.

Egy k terjedelmű kompatibilis rendezett (más szóval: a kényszerek szerint redukált) reakciókomponens-sorozat szorzása az összesített **Z**-vel, azaz kényszerirányokbeli mozgáskomponensek rendezett vektorává transzformálása az alábbi lépésekben történik:

a) Kijelölünk egy k terjedelmű eredmény- és egy $6n$ terjedelmű munkaterületet. A rugó-szűrő leírók segítségével „betördeljük" a kompatibilis reakciókomponenseket a munkaterületre, hogy előálljon a hatkomponensű csomóponti terhelések rendezett sorozata: a kényszerekkel össze nem férő komponensek helyére zérust írunk. Ezzel párhuzamosan az eredményterületre beírjuk a kényszereknek a kompatibilis reakciókomponensek hatására előálló mozgását; ha a kényszer merev, a megfelelő komponenst nullázzuk.

b) A csomóponti terheléseket az áthelyezőmátrixokkal rendre végigszorozva a munkaterületen a REFre átvitt csomóponti terheléseket képezzük.

c) A csomóponti terhelésekből előállítjuk az ágterheléseket. A legnagyobb sorszámtól visszafelé sorra vesszük a kapcsolódásleírókat és mindegyik terhelést hozzáadjuk azon csomópont terheléséhez, amelyikre a favektor, és levonjuk abból, ha van ilyen, amelyikre a hurokvektor mutat. (Megjegyezzük, hogy mozgásmódszernél hasonló jellegű számítást kellene végeznünk, csak nem ilyen „halmozódó" formában.)

d) Az ágterheléseket a rugómátrixokkal végigszorozva ágdeformációkat számolunk (ugyanazon munkaterületre).

e) Az ágdeformációkat csomóponti mozgásokká összegezzük, evégből fordítva másszuk meg a kapcsolódásleíró létráját. Az ágdeformáció az ággal azonos sorszámú csomópont mozgása, ha a másik vég rögzített: ez 1.-nél maga a valóságos mozgás. A továbbiakban minden csomópontnál az ott talált mozgáshoz adjuk azon csomópontét, amelyikre a fa- és levonjuk azét, amelyikre a hurokvektor mutat. (Mozgásmódszerrel a *c*-nél tett megjegyzés érvényes.)

f) A REFen értelmezett csomóponti mozgásokat áthelyezőmátrixokkal a fizikai csomópontokra visszük. Így „melléktermékként" eleve megkapjuk a csomópontok teljes mozgását, amit explicit mátrixos eljárásoknál külön kell számítani.

g) A szűrőleíró segítségével kiemeljük a kényszerirányú mozgáskomponenseket és ezeket az eredménytárolóban már meglevő kényszerdeformációkhoz adjuk.

Ha ez a végeredmény az előírt visszatolásokkal megegyezik, a kiindulásként felvett reakciókomponensek a feladat megoldását adják.

A fenti algoritmust, ill. annak egyes részeit felhasználhatjuk az ágak hőtágulása és a súlyhatások összegzésére, azaz előjelváltás és csonkmozgásokkal helyesbítés után a visszatolások megállapítására. Ezen teljes hatkomponensű visszatolásokból a szűrőleíró segélyével válogatjuk ki azt a k számú komponenst, amelyet a reakciók meghatározásához előírunk. A *f)* alatt kapott teljes csomóponti mozgásból is le kell vonni a teljes visszatolást, mert így kapjuk meg, hogy az egyes csomópontok hová mozdulnak el a környezeti fedőpontjukhoz képest (ami lehet, hogy maga is elmozdult) — így ellenőrizhetjük, megengedhető-e a cső kimozdulása a csőtartószerkezeten, faláttörésben stb. Előfeszítést megmaradó befogásból kifelé eső oldalon levő ágvégek ellenértelmű

befogásból kifelé eső oldalon levő ágvégek ellenértelmű kimozdításával vehetünk figyelembe (mindegy ugyanis, hogy egy csőágban bizonyos szakaszt kivágunk és összehúzzuk, vagy a befogásoknál ugyanannyival széhúzzuk, a párhuzamtartás problmáitól eltekintve). Az előfeszítés tényleges helye és az elmozdított ágvégek közti szakaszon a csőtartók számított mozgását megfelelően helyesbíteni kell.

A szokásos iterációs módszerek céljainknak nem felelnek meg, mert a transzformáción kívül a mátrix diagonálelemei vagy olyan egyéb, pl. spektrumra vonatkozó adatok ismeretét kívánják, amelyek kevéssé valószínű, hogy a transzformációból egyszerűen becsülhetők. Célszerűbb a feladatot kvadratikus alak minimalizálására visszavezetni. Előírt $\bar{f}$ visszatolások mellett a kényszerekkel összeférő $\bar{p}_k$ terhelések közül az lesz a feladat megoldása, amelyre a

$$Q = \frac{1}{2}\bar{p}_k^* \mathbf{Z}\bar{p}_k - \bar{p}_k^* \bar{f} = \frac{1}{2}(\bar{p}_k - \mathbf{Z}^{-1}\bar{f})^* \mathbf{Z}(\bar{p}_k - \mathbf{Z}^{-1}\bar{f}) - \frac{1}{2}\bar{f}^* \mathbf{Z}^{-1}\bar{f} \quad (3.36)$$

kiegészítő potenciális energia minimális. Az átalakításból látszik, hogy a felület függőleges tengelyű, eltolt, általános-elliptikus paraboloid, amelynek egyetlen minimuma valóban a megoldás. A minimum értéke a potenciális energia negatívja.

A minimum megközelítésére az irány menti csökkentés módszere alkalmas. Valamely $\bar{p}_0$ kezdeti értéktől $\bar{v}$ vektor irányában továbblépve a felület $(\bar{v}, Q)$ hipersíkkal való metszetét kell vizsgálnunk, ami parabola. A minimális értéket azon $\bar{p}_0 + \alpha\bar{v}$ helyen kapjuk, amelyre

$$\alpha = \bar{v}^*(\bar{f} - \mathbf{Z}\bar{p}_0)/(\bar{v}^* \mathbf{Z}\bar{v}) . \quad (3.37)$$

Az irányokat legegyszerűbben úgy vehetjük fel, hogy a k komponens közül rendre egyik egységnyi, a többi nulla. Ez nem egyéb, mint a Gauss—Seidel-módszer körülményes megvalósítása, ami ugyan biztosan konvergens, lévén Z pozitív definit, csak lassú.

A keresés iránya lehet a Q negatív gradiense, a $\bar{p}$ közelítés hibájaként vagy maradékként is értelmezhető

$$\bar{r} = \bar{f} - \mathbf{Z}\bar{p} . \quad (3.38)$$

Ha azonban a Z mátrix sajátértékei nagyon különböznek egymástól, azaz durván a csőrendszer különböző irányokban értelmezhető rugalmasságai igen eltérnek, akkor hosszú, keskeny völgyben a negatív gradiens a szemközti fal felé mutat és csak lassan oldalazunk be a mélypontba [4]. Ilyen sajátságok a gyakorlatban el nem kerülhetők — más oldalról szemlélve mindez a gyengén meghatározottsággal egyenértékű. Az önmagában véve lassú konvergencia mellett tehát még a pontatlanságok halmozódása is várható, amire a számított irány mentén csökkentő eljárások különösen érzékenyek, hiszen maga az irány is bizonytalanná válik.

A minimumkeresés irányainak alkalmasabb megválasztásával némi többletszámítás árán a konvergencia lényegesen javítható. Legyen az egymástól lineárisan független $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ vektor halmaza olyan, hogy

$$\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}_j \begin{cases} = 0, & \text{ha } i \neq j \\ \neq 0, & \text{ha } i = j, \end{cases} \tag{3.39}$$

az ilyen vektorokat Z-ortogonális- vagy Z-konjugáltnak mondjuk. A k-dimenziós tér bármely vektora, tehát a $\bar{p}_0$ kezdeti érték szükséges javítása is előállítható ezen vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{v}_i + \bar{p}_0 \tag{3.40}$$

(3.39) felhasználásával

$$\alpha_i = \bar{v}_i^* \mathbf{Z}(\bar{p} - \bar{p}_0)/(\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}) = \bar{v}_i^*(\bar{f} - \mathbf{Z}\bar{p}_0)/(\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}_i), \tag{3.41}$$

ami összhangban áll (3.37)-tel. Ha a $\bar{v}_i$ vektorokat folyamatosan generáljuk és a $\bar{p}_0$ közelítésből rendre $\bar{p}_1, \ldots$ iteratív közelítésekként állítjuk elő (3.40) tagjait, ez az iteráció (konjugált gradiens-módszer) k lépésben pontos eredményhez vezet, $\bar{p}_k = \bar{p}$. A $\bar{v}$ — k valamely k elemű lineárisan független $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_k$ vektorhalmazból a Gram—Schmidt-eljárással képezhetők. Ha $\bar{n}$-ként a k-dimenziós tér tengelyvektorait választjuk, az eljárás a Gauss-elimináció megfelelője lesz. Ki lehet azonban mutatni, hogy a számítás ellenőrzéséhez amúgyis szükséges maradék- (negatív gradiens) vektorok:

$$\bar{r}_j = \bar{f} - \mathbf{Z}\bar{p}_{j-1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{Z} \bar{v}_i \tag{3.42}$$

ugyancsak lineárisan függetlenek és $\bar{n}$-kénti alkalmazásukkal a Gram—Schmidt számítási séma nagymértékben egyszerűsödik. A formulákat többféleképpen is kialakíthatjuk, minimális számításigény mellett numerikusan leginkább kedvezőnek a Fletcher—Reeves-változat tűnik. Ennek képletei [4], [7].

$$\begin{aligned} &\bar{v}_1 = \bar{r}_1 = \bar{f} - \mathbf{Z}\bar{p}_0, \\ &\ldots \\ &\bar{q}_i = \mathbf{Z}\bar{v}, \\ &\alpha_i = \bar{r}_i^* \bar{r}_i / \bar{q}_i^* \bar{v}_i, \\ &\bar{p}_i = \bar{p}_{i-1} + \alpha_i \bar{v}_i, \\ &\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i - \alpha_i \bar{q}_i, \\ &\beta_i = \bar{r}_{i+1}^* \bar{r}_{i+1} / \bar{r}_i^* \bar{r}_i, \\ &\bar{v}_{i+1} = \bar{r}_{i+1} + \beta_i v_i, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3.43}$$

Az eljárás a hibák elkerülhetetlen halmozódása miatt általában nem vezet k lépésben pontos eredményhez, tovább folytatva azonban a maradék csökkenthető, amíg a további javítást a hibahalmozódás lehetetlenné nem teszi. Kedvező esetben megtörténhet (tapasztaltuk is), hogy k-nál jóval kevesebb lépésben igen pontos eredményt kapunk.

A módszer helyfoglalása az explicit mátrixos eljáráshoz képest jóval kevesebb: a $6n$ munkatér meg egy k terjedelmű vektor az adatoknak és eredményeknek mindkettőnél kell, sajátos helyfoglalásként voltaképp a $\bar{v}$ és $\bar{q}$ vektorok $2k$ helyigénye vethető össze a mátrix k-val négyzetesen növekvő és a teljes feladatnál n-től is függő terjedelmével. A számítási idők egybevetése nehéz, mert a mátrix megkonstruálásának és a kiküszöböléses eljárás esetleges iteratív javításának időigényét is vizsgálatba kell vonni egyfelől — szembeállítva másik oldalról a k lépés igen bizonytalanul becsülhető meghaladásából adódó időt is figyelembe vevő igényekkel. Erre csak azonos gépen, nagyszámú vezetéken végzett „összehasonlító lövészet" statisztikája adhatna választ, és ezen a jelen eljárás nem tekinthető eleve esélytelennek.

A fenti eljárást EMG-666-os asztali kisgépen megvalósítottuk, szilárdsági számítással együtt 4 egymáshoz kapcsolódó program formájában, az adatátvitelt magnószalag végzi. A gép 1008 rekesze 1—1 12 decimális pontosságú lebegőpontos számot vagy 8 gépi utasítást tárolhat. A szűk keresztmetszet a hálózatszámítás, ez a számítható rendszer nagyságát 20 ág mellett $k = 42$-re korlátozza. A tárkijelölés dinamikus, kisebb k-nál az ágak száma 24-ig nőhet és viszont. Ez a terjedelem extrém esetektől eltekintve a gyakorlat számára elegendő. A maximális időigény nagyjából az asztali géptől várható keretek közt marad (a legnagyobb $n = 19$, $k = 43$ rendszer 66 percet futott). A hibahalmozódás veszélyessége az ágak és kényszerek számától együttesen függ, tapasztalati adatokból a szükséges lépésszám az elméleti k-val szemben

$$K \approx 0{,}1\,(k + n)\,k \tag{3.44}$$

értékre becsülhető, amelytől kis rendszereknél inkább felfelé, nagyoknál inkább lefelé adódik eltérés. Az egyes lépések időigénye mind n-től, mind k-tól függ, az ágmátrixszorzás döntő súlya következtében az elsőtől jobban:

$$t \approx 0{,}792n + 0{,}0543k\ [s]\,. \tag{3.45}$$

Az alapul vett rendszerekben 1 ágra átlagosan 2 kényszerkomponens jutott, az ágszám több mint hétszeres súlyú. A fenti arányban k-t kiküszöbölve és a két becslést egybevonva az összesített időigény

$$Kt \approx 0{,}09\,(k + n)\,kn\,. \tag{3.46}$$

A BEAD, RUGÓ, HÁLÓ, SZIL nevű részprogramok blokksémáját a 10. ábra mutatja. A konjugált gradiens-iterációban részletezett műveletsorok:

— $V[1 : k]$ kényszerek szerint redukált vektor $W[1 : 6*n]$ munkaterületre helyezése (azaz teljes hatkomponensű mennyiségek sorozatává alakítása),

ill. a $Q[1 : k]$ transzformált vektor $A[\ldots]$ rugóállandóktól függő részének betöltése, amit a $RS[\ldots]$ rugó-szűrő leíró vezérel;

— REF-csomóponti, W-ben tárolt terhelések ágterheléssé összegzése $FH[1 : m]$ fa-hurokvektor szerint.

A továbbfejlesztés a memóriaigény valamelyes, de k-val még mindig csak egyenesen arányos növelésével lehetséges valamilyen stabilizált konjugált gradiens—változat alkalmazásával (pl. Lánczos-módszer [5]). Lehetőséget adhat a javításra, ha tekintetbe vesszük, hogy a $\bar{v}$-k és $\bar{r}$-ek sorozatára bizonyos egyéb összefüggések is érvényesek, továbbá ha egyes kritikus részműveleteket dupla pontosságú aritmetikával végzünk. A konjugált gradiens módszerek területén jelenleg is folynak kutatások, nem elképzelhetetlen hatékonyságuk további javulása.

3.5. Kiegészítő megjegyzések

Az ismertetett megoldási módszer két alapeleme a hálózat vajangosítása és a konjugált gradiensmódszer alkalmazása a hálózatmátrix felírása nélkül, előnye a számításhoz szükséges memóriakapacitás lényeges csökkenése. Valószínű, hogy a hálózat kisebb változtatásai előnyösebben programozhatók — kétségtelen azonban, hogy egyaron hálózat többféle kényszermozgásának értékelésére az explicit mátrixos módszer gyorsabb (más kérdés, hogy ezt az ismétlési lehetőséget sok program nem tartalmazza, és gyakorlati jelentősége sem túl nagy).

A vajangok alkalmazásának előzményei, speciális és adhoc jelleggel JÜRGENSONN és HAMPEL [3] módszerében megtalálhatók, de nem fejlesztették átfogó kezelési eljárássá. Általános tartószerkezeti vizsgálatoknál HALL és WOODHEAD [9] alkalmaz rugalmas tartószakasz elejéhez és végéhez csatolt tetszőleges alakú merev elemeket, egyazon pontba futó változatban is, de utóbbival csak a két végen ható terhelés egyensúlyát és a rugalmasság leírási iránytól való függetlenségét szemlélteti. Ugyancsak említi a mátrix (legalábbis közel-)diagonális, számítási munka és meghatározottság szempontjából előnyös kialakításában a rugalmassági középpont és szimmetria, ill. becslés alapján felvett (közelítő) főtengelyek szerepét. Minőségi utalásokon túlmenően csak síkbeli alakzatokat tárgyal, JÜRGENSONN megfogalmazásához hasonlóan. Más irányú általánosítás keretében LIVESLEY [10] a referenciaponti terhelést és mozgást mint rugalmas szakasz feszültségi és alakváltozási állapotát jellemző általános mennyiségek („stress resultant-", „element deformation vector") egy megjelenési formáját mutatja be.

Valószínű, hogy a jelen tanulmányban alkalmazott modell hasznos lehet más szerkezeti problémák megoldásakor is, amennyiben a hálózatvizsgálatból kiiktatja a teher és mozgás térbeli áthelyezésből adódó változását.

A konjugált gradiens-módszer lineáris algebrai egyenletekre történő alkalmazását RALSTON úgy kommentálja, eleganciája- és hatékonyságának

elismerése mellett, hogy a klasszikus direkt és iterációs eljárások valamelyike mindenfajta mátrixtulajdonság esetén kedvezőbb. Valószínű, hogy a választott megközelítés: egyenlet helyett direkt szélsőérték-feladat esetében — az általa ismertetettek közt — viszont a konjugált gradiensmódszer a legalkalmasabb eszköz, és maga a megközelítés annál versenyképesebb lesz, minél hatékonyabbá teszik az eszközt újabb vizsgálatok (a kétségtelen memóriatakarékosságon túlmenően). Ennek jelentőségét kiemeli az a tény, hogy a műszaki-fizikai problémák igen széles köre fogalmazható meg szélsőérték-feladatok alakjában; bizonyos felfogásban ez a hagyományos „differenciálegyenletes" természetleírás általános alternatívája lehet [8]. Javaslatunk azonban végső soron nem a konjugált gradiensmódszerhez kötődik, hanem bármilyenhez, ami a mátrix explicit ismerete nélkül alkalmazható.

Szerző ehelyütt is köszönetét kívánja kifejezni korreferenseinek, dr. Bosznay Ádám professzornak és dr. Fekete Jánosnak, akik munkáját értékes tanácsaikkal és észrevételeikkel segítették.

IRODALOM

1. Fekete, J.: Untersuchungen der elastischen Formänderung von Rohrleitungen und Rohrnetzwerken, Fortschr. Ber. VDI, R. 7. Nr. 5. Juli 1967
2. Jürgensonn, H. v.: Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau, Springer, Berlin 1953
3. Hampel, H.: Rohrleitungsstatik, Springer, Berlin 1972
4. Ralston, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
5. Bahvalov, N. Sz.: A gépi matematika numerikus módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1977
6. Forsythe, G. E.—Moler, C. B.: Lineáris algebrai problémák megoldása számítógéppel, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976
7. Mangasrian, O. L.: Techniques of Optimization, *Trans. ASME (Ind.)*, May 1972, 365—372
8. Gyarmati I.: Nemegyensúlyi termodinamika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967
9. Hall, A. S.—Woodhead, R. W.: Frame Analysis (2. ed.), Wiley, N. Y. 1967
10. Livesley, R. K.: Matrix Methods of Structural Analysis (2. ed.), Pergamon, Oxford 1975

Versatility in Designing Pipline Systems, Part II — Memory-Economical Systems Calculation. — In part 1 of the present paper it has been pointed out that both the direct participation of the designer and the operative calculation demand mean equal motivations for the use of a desk calculator for the planning group. The capacity demand of the network computation program is considerable, in this part of the paper reduction of that is being tried.

Planung von Rohrleitungen, 2. Teil: Speicherekonomische Netzrechnung. — Im Teil 1. der vorliegenden Abhandlung wurde festgesetzt, daß die Benützung einer Tischrechnenmaschine neben der Planungsgruppe sowohl durch den unmittelbaren Einsatz des Entwurfsbearbeiters, als auch durch die operativen Rechnungsanforderungen der Rohrleitungsplanung bedingt ist. In diesem Teil der Abhandlung wird versucht die erhebliche Kapazitätsanforderung des Netzrechnungsprogramms zu verringern.