Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Von G. ALEXITS in Budapest.

Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges Orthonormalsystem im endlichen Intervall (a, b). Bezeichne $\sigma_n^\alpha(x)$ das n-te (C, α)-Mittel der Orthogonalreihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Die Reihe (1) heißt fast überall *stark* (C, α)-summierbar, wenn es eine Funktion $s(x)$ gibt, so daß fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [s(x) - \sigma_m^{\alpha-1}(x)]^2 = o(n)$$

zutrifft. Man könnte (1) fast überall *sehr stark* (C, α)-summierbar nennen, wenn sogar für jede wachsende Indexfolge $\{\nu_n\}$

$$(2) \qquad \sum_{m=1}^{n} [s(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)]^2 = o(n)$$

fast überall gilt, wo die Ausnahmemenge mit $\{\nu_n\}$ natürlich variieren darf. ZYGMUND[1]) hat bewiesen, daß die fast überall stattfindinde Abelsche Summierbarkeit der Orthogonalreihe (1) unter der Bedingung $\Sigma c_n^2 < \infty$ schon die fast überall stattfindende starke (C, α)-Summierbarkeit für alle $\alpha > \frac{1}{2}$ nach sich zieht. ZALCWASSER[2]) hat die Frage gestellt, ob man in dieser Behauptung die starke Summierbarkeit — zumindesten für die (trigonometrische) Fourierreihe — nicht etwa durch die sehr starke Summierbarkeit ersetzen darf. Er

---

[1]) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362; Remarque sur la sommabilité des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise Cracovie, Sect. A*, **1926**, 185—191.

[2]) Z. ZALCWASSER, Sur la sommabilité des séries de Fourier, *Studia Math.*, **6** (1936), 82—88.

konnte aber nur beweisen, daß die Beziehung (2) für $\alpha=1$ und jede konvexe Indexfolge $\{\nu_n\}$ fast überall besteht.

Wir wollen nun — den Zygmundschen Beweisgang folgend — zeigen, daß diese Fragestellung unter gewisser Einschränkung der Größenordung von c_n bejahend zu beantworten ist.

Satz. *Bezeichne $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton zunehmende Zahlenfolge mit konvergentem $\Sigma n^{-1}\lambda_n^{-1}$, für welche die Folge $\left\{\frac{n}{\lambda_n}\right\}$ monoton zunimmt. Die fast überall stattfindende Abelsche Summierbarkeit der Orthogonalreihe* (1) *impliziert unter der Bedingung*

$$c_n^2=O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right) \tag{3}$$

für alle $\alpha>\frac{1}{2}$ die sehr starke (C,α)-Summierbarkeit fast überall.

Ist die Reihe f. ü. nach der Funktion $s(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus dem eingangs erwähnten Zygmundschen Satz insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^\alpha(x)=s(x)$ f. ü. $\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$, und so ist f. ü.

$$\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2=o(n).$$

Also haben wir wegen

$$\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)]^2\leqq 2\sum_{m=1}^{n}[s(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2+2\sum_{m=1}^{n}[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2$$

nur zu zeigen, daß die letzte Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\nu_m}(A_{\nu_m-k}^{\alpha-1})^2k^2c_a^2}{\alpha^2m(A_{\nu_m}^\alpha)^2},$$

wo A_ν^β den ν-ten Binomialkoeffizienten β-ter Ordnung bedeutet. Es gibt bekanntlich von ν unabhängige positive Konstanten C_1, C_2 derart, daß $C_1\nu^\beta\leqq A_\nu^\beta\leqq C_2\nu^\beta$ ist, folglich gilt die Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_a^b[\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x)-\sigma_{\nu_m}^\alpha(x)]^2\,dx=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\nu_m}(\nu_m-k)^{2\alpha-2}k^2c_k^2}{m\nu_m^{2\alpha}}.$$

Nach unserer Annahme (3) ist $k^2c_k^2=O\left(\frac{k}{\lambda_k}\right)$. Da die Folge $\left\{\frac{k}{\lambda_k}\right\}$ monoton wächst, folgt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, dx = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_m}{m \lambda_{\nu_m}} \frac{\sum_{k=1}^{\nu_m} (\nu_m - k)^{2\alpha-2}}{\nu_m^{2\alpha}},$$

und wegen $\alpha > \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{\nu_m} (\nu_m - k)^{2\alpha-2} = O(\nu_m^{2\alpha-1})$, also erhalten wir letzten Endes

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 \, dx = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \lambda_{\nu_m}} < \infty.$$

Daraus folgt bekanntlich die Konvergenz fast überall der Reihe der Integranden, woraus sich nach einem oft verwendeten Kroneckerschen Lemma fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{\alpha-1}(x) - \sigma_{\nu_m}^{\alpha}(x)]^2 = o(n)$$

ergibt, w. z. b. w.

Bekanntlich ist $\Sigma c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$ eine hinreichende Bedingung für die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall[3]). Aus unserem Satz ergibt sich mithin das folgende

K o r o l l a r. *Ist die Größenordnung der Koeffizienten* c_n *durch die Beziehung*

$$c_n^2 = O\left(\frac{1}{n \lambda_n (\log \log n)^2}\right)$$

eingeschränkt, so ist die Orthogonalreihe (1) *fast überall sehr stark* (C, α)-*summierbar für alle* $\alpha > \frac{1}{2}$.

(Eingegangen am 3. April 1955.)

[3]) D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108, und S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.