NÉHÁNY ENERGIATÉTEL A RUGALMAS TESTEK DINAMIKÁJÁBAN

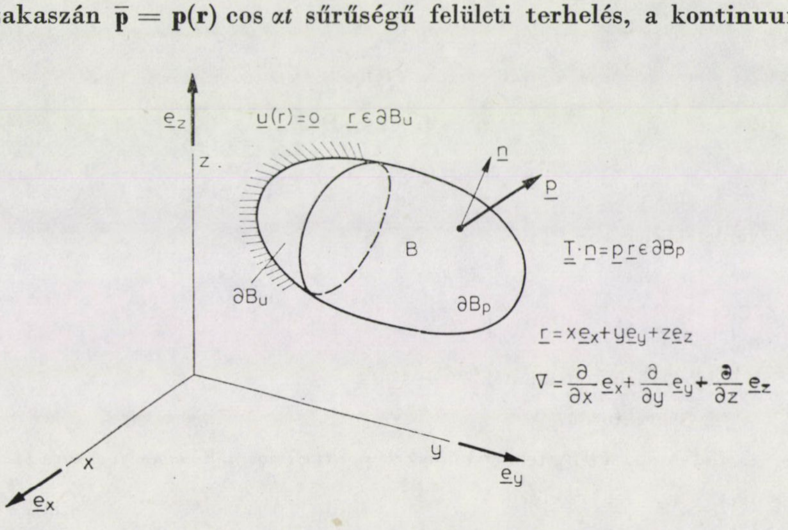
ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. december 18-án]

A tanulmány lineárisan rugalmas anyagú kontinuumok harmonikus gerjesztéshez tartozó kerületi érték feladatával kapcsolatban néhány új tételt ismertet. A dinamikus és statikus terhelésekhez tartozó hajlékonyságokra vonatkozó egyenlőtlenségi relációt a Z. Mróz-minimum tételének alkalmazásával bizonyítja. A tanulmány egy új fogalmat is értelmez, amely harmonikus gerjesztés esetében hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint statikus terhelés esetében az alakváltozási energia.

1. Bevezetés

Tekintsük az 1. ábrán vázolt lineárisan rugalmas anyagú kontinuumot, melynek tömegeloszlása a $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ sűrűséghelyvektor függvénnyel adott. A kontinuum ∂B határoló felületének ∂B_u peremszakaszán az $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulás vektor zérus értéküre előírt: $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ $\mathbf{r} \in \partial B_u$. A ∂B felület ∂B_p felületszakaszán $\overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\mathbf{r}) \cos \alpha t$ sűrűségű felületi terhelés, a kontinuum tér-



1. ábra. Lineárisan rugalmas anyagú test

* Dr. Ecsedi István 3531 — Miskolc, Vászonfehérítő u. 24. IV/1.

fogatán pedig $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cos \alpha t$ sűrűségű térfogati erőrendszer működik. Az előbbeikben t az időt, α pedig a terhelés körfrekvenciáját jelöli.

A rugalmasságtan szokásos feltevéseit alkalmazzuk:

1. az elmozdulások és az alakváltozások kicsinyek;
2. az anyag lineárisan rugalmas;
3. a hőhatások és a kezdeti feszültségek elhanyagolhatók.

A felsorolt feltevések következménye, hogy az

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t), \quad \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)$$

elmozdulásvektor, alakváltozási tenzor, feszültségi tenzor az alábbi alakban írhatók, ha eltekintünk a sajátlengésektől:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cos \alpha t\,,$$

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \cos \alpha t\,,$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cos \alpha t\,.$$

A feladat lényegében az $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulás vektor amplitúdó, $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$ alakváltozási tenzor amplitúdó $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r})$ feszültségi tenzor amplitudó meghatározására redukálódik.

Pusztán a helyvektortól függő amplitúdófüggvények a következő kerületiérték feladattal hozhatók kapcsolatba: ([1], [3]):

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q} + \alpha^2 \varrho \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in B\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \quad \mathbf{r} \in \partial B_p\,, \tag{2}$$

$$2\varepsilon = \mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u} \quad \mathbf{r} \in B\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{r} \in \partial B_u\,, \tag{4}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \mathbf{r} \in B\,. \tag{5}$$

A fenti egyenletekben

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z$$

a Hamilton-féle differenciál operátor

x, y, z — derékszögű koordináták,

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — egységvektorok,

$\mathbf{n} = n_x e_x + n_y e_y + n_z e_z$ a ∂B_p felületszakasz P pontbeli normális egységvektora (1. ábra)

$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ helyvektor,

„∘" a skaláris szorzás jele,

$\mathbf{u}\nabla$ és $\nabla\mathbf{u}$ — az $\mathbf{u}$ és ∇ vektorok diadikus szorzatai,

$\mathbf{C}$ — az anyagállandók negyedrendű izotrop, szimmetrikus tenzora, az úgynevezett Hooke-féle tenzor.

Megjegyzendő az anyag homogenitását rugalmasság tekintetében sem követeljük meg, vagyis **C** függhet a helyvektortól is.

A tanulmány néhány tételt ismertet az (1), (2), (3), (4), (5) egyenletek által kijelölt kerületiérték feladat megoldásával kapcsolatban.

2. Néhány definició és tétel

2.1 A $\tilde{k} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{T}})$ rendezett hármas által meghatározott állapotot, ahol az

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}), \quad \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$$

mezők a (3), (4), (5) egyenleteket kielégítik, *kinematikailag megengedett állapotnak* nevezzük.

2.2. Az (1), (2), (3), (4), (5) egyenleteket kielégítő

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r})$$

mezők által meghatározott $e = (\mathbf{u}, \epsilon, \mathbf{T})$ rendezett hármast *a kontinium egyensúlyi állapotá*nak nevezzük.

2.3 A módosított alakváltozási energiát a következő kifejezés értelmezi:

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_B \epsilon : \mathbf{C} : \epsilon dB - \frac{1}{2}\alpha^2 \int_B \varrho \mathbf{u}^2 dB\,. \tag{6}$$

2.4 Jelölje Λ az előzőkben vizsgált ∂B_u felületszakaszon „befalazott" rugalmas test szabad rezgésének legkisebb saját frekvenciáját.

A Rayleigh-hányados minimum tulajdonságából következik, hogy bármely nem azonosan eltűnő, a (4) homogén kinematikai peremfeltételt kielégítő $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőn fennáll a

$$\int_B \operatorname{def}\mathbf{v} : \mathbf{C} : \operatorname{def}\mathbf{v}\, dB \geq \Lambda^2 \int_B \varrho \mathbf{v}^2\, dB \tag{7}$$

egyenlőtlenségi reláció, ahol

$$\operatorname{def}\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla + \nabla\mathbf{v})\,. \tag{8}$$

Legyen $\alpha < \Lambda$. A nyilvánvaló

$$\Lambda^2 \int_B \varrho \mathbf{v}^2 dB \geq \alpha^2 \int_E \varrho \mathbf{v}^2\, dB \tag{9}$$

egyenlőtlenség, és a (7) egyenlőtlenség kombinálásával azt kapjuk, hogy

$$A(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_B \operatorname{def}\mathbf{v} : \mathbf{C} : \operatorname{def}\mathbf{v}\, dB - \frac{1}{2}\alpha^2 \int_B \varrho \mathbf{v}^2\, dB > 0. \tag{10}$$

A (10) egyenlőtlenség szerint A = A(v) pozitív definit kvadratikus funkcionál, ha az A(v) értelmezési tartományának elemei a (3) homogén kinematikai peremfeltételt kielégítő vektormezők.

2.5 A kinematikailag lehetséges állapotok halmaza (a vektor összeadást és a valós számmal való szorzást a szokásos értelemben végezve) lineáris teret alkot.

2.6 Az alábbi

$$\Pi(\tilde{\mathbf{u}}) = A(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_B \mathbf{q}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\, dB - \int_{\partial B_p} \mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\, d\partial B \tag{11}$$

előírással értelmezett funkcionál starionaritási feltétele egyenértékű az (1),(2), (3), (4), (5) egyenletek által kijelölt kerületiérték feladattal, ha a Π funkcionál értelmezési tartományát a kinematikailag megengedett állapotok alkotják ([1], [6]).

Könnyen kimutatható a (10) egyenlőtlenség felhasználásával, hogy az egyensúlyi állapotnak megfelelő $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ megoldásnál, ha $\alpha < \Lambda$, a Π funkcionálnak abszolút minimuma van, azaz

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\tilde{\mathbf{u}}). \tag{12}$$

A (12) egyenlőtlenségi reláció igazolása Z. Mróztól származik [17]. Egydimenziós kontiniumra a (12) egyenlőtlenségi reláció felismerése L. J. Icerman nevéhez fűződik [4].

2.7 Az A (v) funkcionálnak a következő homogenitási tulajdonsága van:

$$A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2 A(\mathbf{v}). \tag{13}$$

2.8 A Gauss-féle integrálátalakítási tétel és a szorzatfüggvény deriválási szabályának az együttes alkalmazásával kimutatható, hogy két különböző egyensúlyi állapothoz tartozó mezők esetében fennállnak az alábbi egyenletek, feltéve, hogy a terhelések körfrekvenciái megegyeznek:

$$\int_B \mathbf{T}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_2 dB = \alpha^2 \int_B \varrho\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2\, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{u}_2\, d\partial B + \int_B \mathbf{q}_1\cdot\mathbf{u}_2\, dB, \tag{14}$$

$$\int_B \mathbf{T}_2 : \boldsymbol{\epsilon}_1\, dB = \alpha^2 \int_B \varrho\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2\, dB + \int_B \mathbf{q}_2\cdot\mathbf{u}_1\, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_2\cdot\mathbf{u}_1\, d\partial B. \tag{15}$$

Minthogy

$$\int_B \mathbf{T}_2 : \boldsymbol{\epsilon}_1\, dB = \int_B \mathbf{T}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_2\, dB \tag{16}$$

a (14), (15) egyenletekből az alábbi tétel (felcserélhetőségi reláció) következik:

$$\int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\partial B = \int_B \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_1 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_1 \, d\partial B \,. \quad (17)$$

Megjegyzendő, hogy jóval általánosabb felcserélhetőségi relációk is ismertek a rugalmas testek dinamikájában [5].

2.9 Legyen

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_B \mathbf{T}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_2 \, dB - \alpha^2 \int_B \varrho \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB \,, \quad (18)$$

ahol $\mathbf{u}_1, \mathbf{T}_1$ és $\mathbf{u}_2, \mathbf{T}_2$ két különböző egyensúlyi állapothoz tartozó mezőket jelöl. Az előbbiek szerint nyilván

$$A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = A(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1), \quad (19)$$

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \,. \quad (20)$$

3. Összehasonlítási tétel

3.1 Legyen $\alpha < \Lambda$. Tekintsük a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{q}_1$ és a $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_2$ terhelés amplitúdókhoz tartozó egyensúlyi állapotokat.

Tétel. Fennáll az alábbi két egyenlőtlenségi reláció:

$$A(\mathbf{u}_1) \geq A(\mathbf{u}_2) + \int_B \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \, d\partial B \,, \quad (21)$$

$$A(\mathbf{u}_1) \geq A(\mathbf{u}_2) + \int_B \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\partial B \,. \quad (22)$$

Bizonyítás. Az $\alpha < \Lambda$ feltételből következik, hogy a módosított alakváltozási energia nem negatív, így nyilván

$$A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0 \,. \quad (23)$$

A (23) egyenlőtlenség részletes kifejtésével írhatjuk, hogy

$$A(\mathbf{u}_1) \geq - A(\mathbf{u}_2) + A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \,. \quad (24)$$

A (18), (19), (20) egyenletek felhasználásával könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$$\begin{aligned} -A(\mathbf{u}_2) + A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= A(\mathbf{u}_2) + A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - 2A(\mathbf{u}_2) = \\ A(\mathbf{u}_2) &+ \int_B \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \, dB + \int_{\partial B p} \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \, d\partial B \,. \end{aligned} \quad (25)$$

A (24) és (25) egyenlőtlenségek kombinálásával a bizonyítandó (21) egyenlőtlenségi relációt kapjuk. A (17) felcserélhetőségi tétel és a (21) egyenlőtlenségi reláció kombinálásával pedig a bizonyítandó (22) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

A (21) és (22) egyenlőtlenségi relációk az alábbi észrevétel alapján élesíthetők: $\lambda \mathbf{p}_2$ és $\lambda \mathbf{q}_2$ terhelés amplitúdókhoz nyilván $\lambda \mathbf{u}_2$ elmozdulásvektor amplitúdó tartozik, továbbá $A(\lambda \mathbf{u}_2) = \lambda^2 A(\mathbf{u}_2)$, ahol λ tetszőleges, valós szám. A fenti megjegyzés és az

$$A(\mathbf{u}_1, \lambda \mathbf{u}_2) = \lambda A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \tag{26}$$

azonosság, valamint a (18) egyenlet és a (24) egyenlőtlenségi reláció kombinálásával írhatjuk, hogy

$$A(\mathbf{u}_1) \geq -\lambda^2 A(\mathbf{u}_2) + \lambda \left(\int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\partial B \right). \tag{27}$$

A (27) jobb oldala a λ paraméter függvénye, könnyen kimutatható, hogy a

$$\lambda^* = \frac{\int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\partial B}{2A(\mathbf{u}_2)} \tag{28}$$

helyen abszolút maximummal rendelkezik, s e maximum értéke

$$\Phi = \frac{\left(\int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\partial B \right)^2}{4A(\mathbf{u}_2)}. \tag{29}$$

A (27) egyenlőtlenség és a (28) képlet kombinálásával kapjuk az alábbi egyenlőtlenségi relációt:

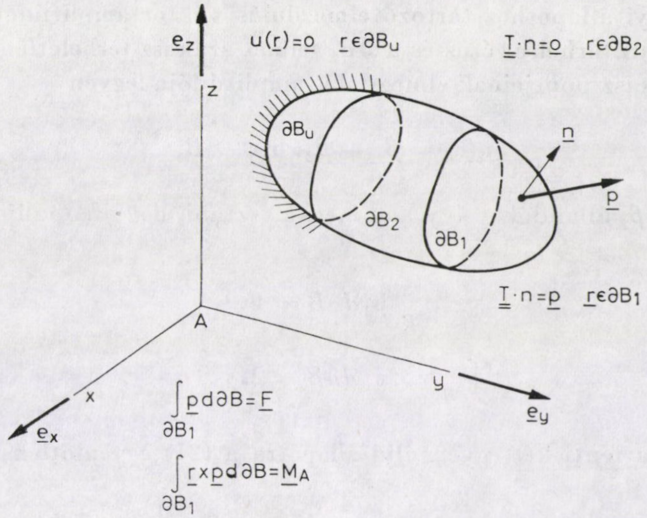
$$A(\mathbf{u}_1) \geq \frac{\left(\int_B \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\partial B \right)^2}{4A(\mathbf{u}_2)}. \tag{30}$$

A (30) egyenlőtlenségi relációból általában élesebb alsó korlátot nyerünk az $A(\mathbf{u}_1)$ módosított alakváltozási energia számára, mint a (21) egyenlőtlenségi relációból.

A bizonyított összehasonlítási tétel és (30) alsó korlát alkalmazásához megemlítjük a (14), (18) egyenletekből következő

$$2A(\mathbf{u}) = \int_B \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, d\partial B. \tag{31}$$

azonosságot.



2. ábra. **Előírt tulajdonságú felületi terhelés szemléltetése**

3.2 A (21) egyenlőtlenségi reláció egy következménye

Legyen adott a ∂B_p felületszakasz ∂B_1 részén működő felületi terhelés amplitúdójának az A ponthoz kötött eredő vektorkettőse (2. ábra):

$$\int_{\partial B_1} \mathbf{p}\, d\partial B = \mathbf{F}, \tag{32}$$

$$\int_{\partial B_1} \mathbf{r}\times\mathbf{p}\, d\partial B = M_A\,. \tag{33}$$

Legyen tovább

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\ \mathbf{r}\in \partial B_2,\ (\partial B_p = \partial B_1 + \partial B_2),\ \mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\ \mathbf{r}\in B\,.$$

Mindazon felületi terhelés amplitúdó függvényeket tekintve, amelyek ugyanazon felületszakaszon működnek és statikailag egyenértékűek, a módosított alakváltozási energia azon felületi terhelés amplitúdó megoszlásnál minimális, amelyik a ∂B_1 felületszakasz pontjainak merevtestszerű elmozdulását idézi elő, vagyis amelyhez tartozó elmozdulás vektor amplitúdó a ∂B_1 felületszakaszon a

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\times\mathbf{r}\ \mathbf{r}\in\ \partial B_1 \tag{34}$$

alakba írható. A (33) és a (34) képletben $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ állandó vektorok, továbbá $\times$ a vektorális szorzás jele.

Bizonyítás. **Legyen $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{r})$ olyan egyensúlyi állapothoz tartozó megoldás, amelyhez tartozó térfogati terhelés zérus és a megfelelő felületi terhelés kielégíti a (32) és (33) egyenleteket, továbbá $\mathbf{p}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{0}\ \mathbf{r}\in\partial B_2$. Jelölje $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{r})$**

azon egyensúlyi állapothoz tartozó elmozdulás vektor amplitúdót, amelyhez tartozó térfogati terhelés zérus és a ∂B_2 felület szakasz terheletlen, továbbá a ∂B_1 felületszakasz pontjainak elmozdulás amplitúdója legyen

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \times \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \in \partial B_1 \tag{35}$$

alakú. A $\boldsymbol{\beta}_1$ és $\boldsymbol{\beta}_2$ állandókat úgy kell megválasztani, hogy fennálljon az alábbi két egyenlet:

$$\int_{\partial B_1} \mathbf{p}_2 \, d\partial B = \mathbf{F}, \tag{36}$$

$$\int_{\partial B_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_2 \, d\partial B = \mathbf{M}_A . \tag{37}$$

Alkalmazzuk a fenti két egyensúlyi állapotra a (21) egyenlőtlenségi relációt:

$$A(\mathbf{u}_1) \geq A(\mathbf{u}_2) + \int_{\partial Bp} (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \, d\partial B = A(\mathbf{u}_2) . \tag{38}$$

A (38) egyenlőtlenségi reláció lényegében az előzőkben megfogalmazott állítás igazolását jelenti.

4. A Castigliano-tétel általánosítása

A módosított alakváltozási energia megadható a feszültségi tenzor amplitúdó és a test térfogatán megoszló

$$\mathbf{t} = \varrho \alpha^2 \mathbf{u} \tag{39}$$

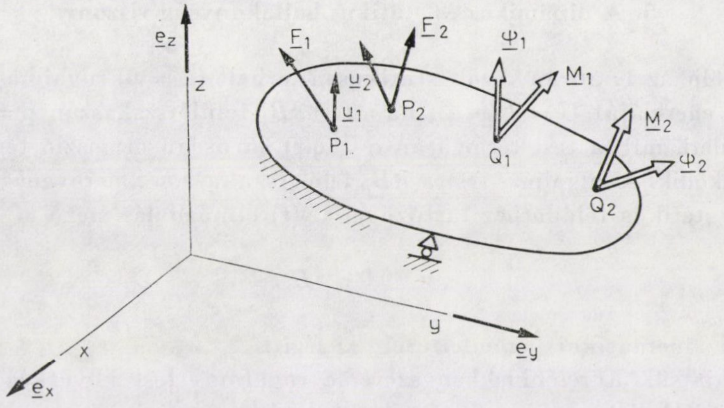
tehetetlenségi erőrendszer amplitúdó függvényeként:

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{T} : \mathbf{D} : \mathbf{T} \, dB - \frac{1}{2} \int_B \frac{\mathbf{t}^2}{\varrho \alpha^2} \, dB . \tag{40}$$

Következőkben a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor amplitúdó és a tehetetlenségi erőrendszer amplitúdó függvényeként felírt módosított alakváltozási energiát *módosított kiegészítő energiának* hívjuk és K-val jelöljük. Az általánosított Castigliano-képlet levezetésekor csak azt a megkötést használjuk, hogy α nem egyezik meg a rugalmas test azonos megtámasztási feltételekhez tartozó egyenlet sajátfrekvenciájával sem.

A (31), (40) egyenletek kombinálásával nyert

$$2K(\mathbf{T}) = \int_B \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dB + \int_{\partial B_p} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, d\partial B \tag{41}$$



3. ábra. Koncentrált harmonikus erőkkel és nyomatékokkal terhelt test

egyenletből következik, hogy a 3. ábrán vázolt fix megtámasztású test esetében rögzítve az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \dots$ erő és az $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ erőpár amplitúdók támadáspontjait és állásait a módosított kiegészítő (alakváltozási) energia az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \dots$ $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, mennyiségek függvénye:

$$K = K(F_1, F_2, \dots; M_1, M_2, \dots) \tag{42}$$

Valamennyi terhelés amplitúdót λ szorosra növelve, homogenitási tulajdonság alapján írhatjuk, hogy

$$K(\lambda F_1, \lambda F_2, \dots; \lambda M_1, \lambda M_2, \dots) = \lambda^2 K(F_1, F_2, \dots; M_1, M_2, \dots). \tag{43}$$

Euler homogén függvényekre vonatkozó ismert tételéből következik, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial F_1} F_1 + \frac{\partial K}{\partial F_2} F_2 + \dots + \frac{\partial K}{\partial M_1} M_1 + \frac{\partial K}{\partial M_2} M_2 + \dots = 2K. \tag{44}$$

A (41) egyenlet szerint

$$2K = F_1 u_2 + F_2 u_2 + \dots + M_1 \psi_1 + M_2 \psi_2 + \dots \tag{45}$$

A (45) egyenletben, u_1, u_2 a P_1, P_2 pontok $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ elmozdulás vektor amplitúdóinak $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ irányú vetületeit, továbbá ψ_1 ψ_2 pedig a Q_1, Q_2 pontokhoz tartozó $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$ szögelfordulási amplitúdók $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ irányú vetületeit jelölik.

A (44) és (45) egyenletek kombinálásával nyerjük a (46) egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial F_1} &= u_1 & \frac{\partial K}{\partial F_2} &= u_2 \dots \\ \frac{\partial K}{\partial M_1} &= \psi_1 & \frac{\partial K}{\partial M_2} &= \psi_2 \dots . \end{aligned} \tag{46}$$

5. A dinamikus és statikus hajlékonyság viszonya

Jelölje az 1. ábrán vázolt statikusan terhelt ($\alpha = 0$) rugalmas test alakváltozási energiáját $U = U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, ha a test ∂B_p felületszakaszán $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r})$ sűrűségű felületi, míg a test térfogatán $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r})$ sűrűségű megoszló térfogati terhelés működik. A rugalmas test a ∂B_u felületszakaszon „mereven" megfogott, vagyis a statikus feladathoz tartozó $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ elmozdulás mező a

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in B_u \tag{47}$$

homogén kinematikai peremfeltételt kielégíti.

Tekintsük az előbbiekben szereplő rugalmas test következő előírások által definiált dinamikai peremérték feladatát:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\mathbf{r}) \cos \alpha t \quad \mathbf{r} \in \partial B_p, \tag{48}$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cos \alpha t \quad \mathbf{r} \in B, \tag{49}$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in \partial B_u. \tag{50}$$

Jelölje a fenti előírások által meghatározott dinamikai peremérték-feladathoz tartozó módosított alakváltozási energiát

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha^2).$$

Felvetődik az a kérdés, hogy a statikus terheléshez tartozó $U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, 0)$ alakváltozási energia milyen viszonyban van a dinamikus terheléshez tartozó módosított alakváltozási energiával. A fenti problémával kapcsolatban az alábbi tételt bizonyítjuk.

Tétel. Legyen $\alpha < \Lambda$. Fennáll az

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha^2) \geq A(\mathbf{p}, \mathbf{q}\, 0) = U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \tag{51}$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ a statikai feladat ($\alpha = 0$) megoldást, míg $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ a megfelelő dinamikai feladat megoldását. A (12) egyenlőtlenségi relációban — ez megengedett — legyen $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Rövid számolással azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2} A(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha^2) \leq -\frac{1}{2} U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \frac{1}{2} \alpha^2 \int_B \varrho \mathbf{v}^2 \, dB, \tag{52}$$

hiszen

$$\frac{1}{2} \int_B \operatorname{def} \mathbf{v} : \mathbf{C} : \operatorname{def} \mathbf{v} \, dB - \int_B \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \, dB - \int_{\partial B_p} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\partial B = -\frac{1}{2} U(p, q). \tag{53}$$

Az (52) egyenlőtlenségi relációból már következik a bizonyítandó (51) egyenlőtlenségi reláció, mivel

$$\alpha^2 \int \varrho \mathbf{v}^2 \, dB > 0 \,. \tag{54}$$

Az (51) *egyenlőtlenségi reláció egy következménye*

Tekintsük a 4. ábrán vázolt fix megtámasztású testet. A test terhelése a támasztó erőrendszertől eltekintve a P_1, P_2, ... P_n pontokon támadó $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$ aktív külső erőkből álló erőcsoport.

Az erők támadáspontjainak erőirányú elmozdulásait rendre $v_1, v_2, \ldots v_n$ betűvel jelöljük. Az erők és elmozdulások kapcsolatát a $c_{ij} = c_{ji}$ Maxwell-féle hatásszámok bevezetésével a

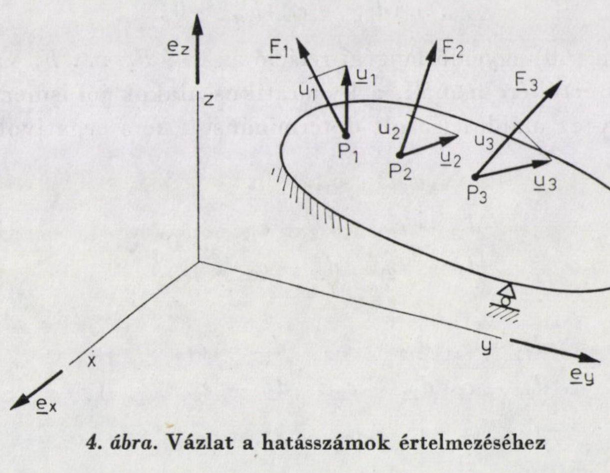
$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}F_1 + c_{12}F_2 + \ldots + c_{1n}F_n \\ v_2 &= c_{21}F_1 + c_{22}F_2 + \ldots + c_{2n}F_n \\ &\vdots \end{aligned} \tag{55}$$

alakban tudjuk megadni. A test alakváltozási energiája az F_1, F_2, ... F_n erők ismeretében a

$$\begin{aligned} 2u = c_{11}F_1^2 + 2c_{12}F_1F_2 + \ldots & \quad +2c_{1n}F_1F_n \\ + c_{22}F_2^2 + \ldots & \quad +2c_{2n}F_2F_n \\ & \quad + c_{nn}F_n^2 \end{aligned} \tag{56}$$

képletből számítható.

Az (1), (2), ... (5) kerületiérték feladat szerkezetéből következik, hogy ha az előbb vázolt test $P_1, P_2, \ldots P_n$ pontjaiban $\overline{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_1 \cos \alpha t$, $\overline{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{F}_2 \cos \alpha t$, ... $\overline{\mathbf{F}}_n = \mathbf{F}_n \cos \alpha t$ körfrekvenciájú harmonikus gerjesztő erőket működ-



4. ábra. Vázlat a hatásszámok értelmezéséhez tetjük a statikus terhelésnek megfelelő amplitúdókkal, akkor a $P_1, P_2, \ldots P_n$ pontok erőirányú elmozdulásai az alábbiak lesznek:

$$\bar{u}_1 = u_1 \cos \alpha t, \quad \bar{u}_2 = u_2 \cos \alpha t, \ldots \quad \bar{u}_n = u_n \cos \alpha t .$$

A linearitás szükségszerű következménye, hogy az erő és elmozdulás amplitúdók kapcsolata is lineáris függvénnyel jellemezhető. (4. ábra):

$$\begin{aligned} u_1 &= d_{11}F_1 + d_{12}F_2 + \ldots \quad + d_{1n}F_n \\ u_2 &= d_{21}F_2 + d_{22}F_2 + \ldots \quad + d_{2n}F_n \\ &\vdots \end{aligned} \tag{57}$$

A (17) felcserélhetőségi reláció következménye, hogy

$$d_{ij} = d_{ji} . \tag{58}$$

Nyilván a d_{ij} együtthatók α^2 függvényei

$$d_{ij} = d_{ij}(\alpha^2) \quad \text{és} \quad d_{ij}(0) = c_{ij} .$$

Könnyen kimutatható, hogy a módosított alakváltozási energia az $F_1, F_1, \ldots F_n$ erő-amplitúdók ismeretében a

$$\begin{aligned} 2A(F_1, F_2, \ldots F) &= d_{11}F_1^2 + 2d_{12}F_1F_2 + \ldots \\ &+ \ldots d_{1n}F_{1n} + d_{22}F_2^2 + 2d_{21}F_1F_2 + \ldots + d_{nn}F_n^2 \end{aligned} \tag{59}$$

képletből számítható.

A bizonyított (51) egyenlőtlenségi reláció alapján írhatjuk, hogy az $\alpha < \Lambda$ esetben

$$\begin{aligned} (d_{11} - c_{11})F_1^2 + 2(d_{12} - c_{12})F_1F_2 + \ldots \quad \ldots + 2(d_{1n} - c_{1n})F_1F_n + \\ + (d_{22} - c_{22})F_2^2 + \ldots \quad \ldots + 2(d_{2n} - c_{2n})F_2F_n + \\ + \ldots (d_{nn} - c_{nn})F_n^2 \geq 0 . \end{aligned} \tag{60}$$

Minthogy a (60) egyenlőtlenségi reláció az $F_1, F_2, \ldots F_n$ változók minden szóbajöhető értékére fennáll, a kvadratikus alakok jól ismert elméletéből következik, hogy az alább felsorolt determinánsok nem negatívok:

$$\begin{aligned} & d_{11} - c_{11} \geq 0 , \\ & \begin{vmatrix} d_{11} - c_{11} & d_{12} - c_{12} \\ d_{21} - c_{21} & d_{22} - c_{22} \end{vmatrix} \geq 0 , \\ & \vdots \\ & \begin{vmatrix} d_{11} - c_{11} & d_{12} - c_{12} & d_{1n} - c_{1n} \\ d_{21} - c_{21} & d_{22} - c_{22} & d_{2n} - c_{2n} \\ d_{n1} - c_{n1} & d_{n2} - c_{2n} & d_{nn} - c_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 . \end{aligned} \tag{61}$$

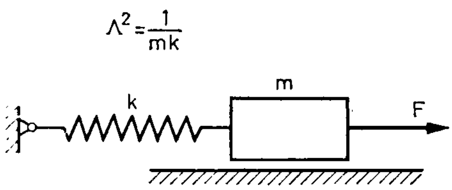
A (61) egyenlőtlenségi relációból következő

$$d_{ii}(\alpha^2) \geq d_{ii}(0) = c_{ii}\,, \quad (i = 1, 2, \dots n) \tag{62}$$

egyenlőtlenségi reláció fizikai tartalma igen lényeges.

A dinamikus terheléshez tartozó hajlékonyság, ha $\alpha < \Lambda$, biztosan nem kisebb a statikus terheléshez tartozó hajlékonyságnál.

A (62) egyenlőtlenségi relációt valamely egyszabadságfokú mechanikai rendszerrel kapcsolatban a következő módon szemléltethetjük.



5. ábra. Egy szabadságfokú modell

Jelölje k az 5. ábrán vázolt súlytalan rugó hajlékonyságát. Nyilván

$$c = k\,, \tag{63}$$

további elemi számolással kimutatható, hogy a jelen példában

$$d(\alpha^2) = \frac{k}{1 - \left(\frac{\alpha}{\Lambda}\right)^2}\,, \tag{64}$$

ahol

$$\Lambda^2 = \frac{1}{mk}\,. \tag{65}$$

A (63), (64) egyenletek összevetésével összhangban a tétel állításával írhatjuk, hogy

$$d(\alpha^2) > d(0) = c\,. \tag{66}$$

6. Új eredmények

A tanulmány új eredményei a (21), (22) egyenlőtlenségi relációk, a (30) egyenlőtlenségi reláció, a statikailag egyenértékű felületi terhelésekkel kapcsolatban a (21) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával bizonyított minimum tétel, a (46) képlet, valamint az (51) és (62) egyenlőtlenségi relációk.

IRODALOM

1. MRÓZ, Z.: Optimal Design of Elastic Stuctures Subjected to Dynamic Harmonically Varying Loads *ZAMM* 50 (1970), 303–309
2. WASHIZU, K.: Note on the Principle of Stacionary Complementary Energy Applied to Free Vibrations of on Elastic Body Int. *Journ. Solid. and Sruct.* (1966), 27–37
3. REISSNER, E.: Note on the Method of Complementary Energy *J. Math. Phys.* (1948), 159–160
4. ICERMAN, L. I.: Optimal Structural Design for Given Dinamic Deflection. *Intern. Journ. Solids. and Sruct.* 5 (1969), 473–490
5. GRAFFI, D.: Sui Teoremi di Reciprocitá nei Fenomeni Dipendenti dal Tempo. *Annali di Mathematica* Series 4. vol 18 (1939) 173–200
6. WASHIZU, K.: Variatinal Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press First Ed. (1963), pp. 27—48

Some Energy Theorems in the Dynamics of Elastic Solids. — Some new theorems are presented in connection with the boundary value problem relating to the harmonic excitation of the oscillation of continua of linearly elastic material. The verification of the inequality relation concerning the dynamic and static flexibility takes place by the application of the minimum theorem established by Z. MRÓZ. Also a new concept is defined which, in case of relation concerning the dynamic and static flexibility takes place by the application of the harmonic excitation, has properties similar to the deformation energy caused by static loading.

Einige Energiesätze in der Dynamik der elastischen Körper. — Einige neue Sätze werden behandelt, die mit der Randwertaufgabe der harmonischen Schwingungserregung von Kontinua linearelastishen Materials zusammenhängen. Die auf die dynamische und statische Flexibilität bezügliche Ungleichheitsrelation wird mit dem von Z. MRÓZ aufgestellten Minimumsatz bewiesen. Ein neuer Begriff wird auch definiert, der für die harmonische Schwingung derartige Eigenschaften aufweist, die der Verformungsenergie bei der statischen Belastung vergleichbar sind.