

# HENGERSZIMMETRIKUS ÉS SÍK FELADATOKRÓL

LÁMER GÉZA\*

[Beérkezett: 1980. március 12-én]

A tanulmányban rendszereztek és analizáltak a hengersizmetrikus és sík feladatokat. Szakirodalmi áttekintést adtunk a feladatok meghatározásairól, és rámutattunk azok eltéréseire. Az eltérő meghatározásokat különböző feladatnak tekintve, új típusú állapotokat definiáltunk mind a hengersizmetria fennállásánál, mind a sík feladatoknál. Megadtuk az újonnan bevezetett állapotok egységes definícióit, az állapotokat meghatározó egyenleteket, valamint a megoldások (elmozdulás komponensekre érvényes) függvényosztályait. Megmutattuk, hogy az egységesen definiált állapotok egy-egy feszültség összetevővel különböznek egymástól, és hogy csak ebben a felfogásban lehet a sík feszültség állapotot a rugalmassági modulusok transzformációjával visszavezetni a sík alakváltozási állapotra.

## Jelölések

$i, j, k$	— ortogonális koordináta rendszer egységvektorai
$x_i$	— ortogonális koordináták ( $i = 1, 2, 3$ )
$x, y, z$	— derékszögű koordináták
$r, \varphi, z$	— hengerkoordináták
$u$	— elmozdulásvektor
$u_i$	— elmozduláskomponens
$u, v, w$	— elmozduláskomponensek derékszögű-koordináta rendszerben
$u_r, u_\varphi, u_z$	— elmozduláskomponensek hengerkoordináta rendszerben
$T_\varepsilon$	— deformációtenzor, komponensei $t_{ij}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ (A szövegben az elterjedtebb $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ jelölést használjuk.)
$\varepsilon$	— térfogatváltozás, $\varepsilon = t_{ii}(\varepsilon)$
$T_\sigma$	— feszültségi tenzor, komponensei $t_{ij}(\sigma) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2G t_{ij}(\varepsilon)$ (A szövegben az elterjedtebb $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ jelölést használjuk.)
$\delta_{ij}$	— Kronecker-féle szimbólum
$\lambda, G$	— Lamé-féle rugalmassági együtthatók
$\mu$	— harántkontrakciós tényező, $\mu = \lambda/2(\lambda + G)$
$E(\zeta)$	— A $k$ egységvektor irányába mutató $\zeta$ vektorral történő <i>eltolás</i>
$T(S_k)$	— A $k$ normmálisú $S_k$ síkra történő <i>tükrözés</i>
$u_0, v_0, w_0$	— $z$ -től független elmozdulás komponensek
$u_r^0, u_\varphi^0, u_z^0$	— $\varphi$ -től független elmozdulás komponensek
$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	— kétdimenziós Laplace-operátor

## I. Bevezetés

A szerkezet erőjátékának megállapításakor a geometriai viszonyoktól függően különböző típusú modelleket használunk (rúd, lemez, héj). Bonyolultabb geometriai alakzat esetében a rugalmasságtan alapegyenleteit kell al-

\* Lámer Géza, 1088 Budapest, Vas u. 15/b.

kalmaznunk. Ezek az egyenletek is egyszerűsíthetők, például forgástestek számításakor hengersizmetrikus terhelés esetén, vagy sík feladatok megoldásakor. Így a háromdimenziós feladat kétdimenzióssá egyszerűsödik. (Pontosabban fogalmazva, a mechanikai állapotjellemzők nem három, hanem csak két változó függvényei; a vizsgálandó test mindkét esetben háromdimenziós.) Ez az egyszerűsödés a magyarázata annak, hogy ezek a feladatok részletesen kidolgozott fejezetei a rugalmasságtannak.

1.1 A forgástestek elmélete és számítása sokoldalúan megvilágított, kiváltképp a körszimmetrikus lemezek és héjak elmélete, ahol a két szabad argumentum szétválasztható (lemez), illetve analitikus összefüggés írható föl rájuk (forgáshéj). Ezen esetek tárgyalását a [21] és a [36] monográfiákban találjuk. A háromdimenziós forgástestek (vastagfalú forgáshéjak) elméletéről írt egyik legteljesebb mű [15] a rugalmasságtani feladatokon túl tárgyalja a hőfeszültségeket és a nemrugalmas viselkedést is nem csak hengersizmetrikus, hanem tetszőleges terhelés esetében. A forgástestek elméletének majdnem minden rugalmasságtani elméleti és kézikönyv szentel egy-egy fejezetet [2, 3, 6, 10, 18, 19, 26, 31, 34], és a végeelem módszerben, mint alkalmazott megoldási sémában is, megjelentek a forgástestek számításához szükséges gyűrű alakú elemek [5, 16, 23, 25, 27, 37, 38].

1.2 „*A sík feladat — LURJE szavait idézve — a rugalmasságtan általánosan és legjobban kidolgozott fejezete.*”\*

Ennek magyarázata elsősorban azokban a könnyebbségekben keresendő, amit a kétváltozós parciális differenciálegyenletek megoldása nyújt a háromváltozóssal szemben. A sík feladatoknak, mint a rugalmasságtan egyik fejezetének a fejlődése, a komplex változók bevezetése [14] után következett be [11, 12, 19, 22, 34], habár jelentős a nem komplex függvények alkalmazásával nyert megoldások száma is (hajlításmélet, rugalmas sík, félsík és ék) [7, 8, 10, 11, 17, 19, 24, 32, 33, 34, 35].

## 2. Irodalmi áttekintés

### 2.1 Hengersizmetrikus állapot

A hengersizmetrikus feladatokat a szakirodalom hengersizmetrikus geometriai alakzatokra — forgástestekre értelmezi. [2, 3, 6, 18, 19, 31, 32, 33]. A hengersizmetrikus állapotban hengersizmetrikusnak tekintik az alakváltozás- és feszültségmezőn kívül az elmozdulásmezőt is. Ez esetben mind az egyensúlyi, mind a geometriai egyenletek két csoportra esnek szét (1. Táblázat). A hengersizmetrikus feladat ilyen tagolása megtalálható a szakirodalomban

\* [19], 462. oldal a szerző fordításában.

I. táblázat

	Hengerszimmetrikus állapot	
	Párosan hengerszimmetrikus állapot	Csavarás
Egyensúlyi egyenletek	$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} = 0$ $\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$	$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0$
Geometriai egyenletek	$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ $\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$	$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)$ $\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}$

[6, 19, 26, 33], míg néhány szerző [2, 3, 10, 18, 31, 32] a forgástestek tengelyszimmetrikus terhelése esetében a tengelyszimmetriát az elmozdulás- illetve az alakváltozás- és a feszültségmező vizsgálatakor egyidejűleg henger- és tengelyszimmetriának értelmezve, a  $\varphi$ -től való függetlenséghez hozzáveszi az  $u_\varphi = 0$  és a  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$  feltételeket is. Ez a gyakorlatban nem vezet hibához, hiszen így a tengelyszimmetria megkövetelésével a csavarást leválasztja az általános hengerszimmetrikus állapotról. Viszont a tengelyszimmetria önmagában megenged nem hengerszimmetrikus terhelést is (pl. tiszta hajlítás). Ezért célszerű kiemelni, hogy *egyszerre* kell a henger- és a tengelyszimmetriának fennállnia. A szimmetriák megnevezését és értelmezését figyelembe véve [9, 20], javasolható egy egységes meghatározás, amely segít megnevezésben is elkülöníteni egymástól a csavarást tartalmazó, illetve nem tartalmazó hengerszimmetrikus állapotokat. Ez utóbbira javasolom a *párosan* hengerszimmetrikus elnevezést. Ugyanis ebben az állapotban  $u_\varphi = 0, \varphi_{r\varphi} = \gamma_{\varphi z} = 0, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$ . A többi állapotjellemző a forgástengelyen átfektetett bármely síkban *páros* függvénye a sugárnak. Ezért a függvénytanban használatos páros függvény mintájára javasolható a *párosan hengerszimmetrikus* kifejezés.

### 2.2 Sík feladatok

A sík feladatokat általában sík alakváltozási és feszültségi, valamint általánosított sík feszültségi állapotokra szokás felosztani.

A kitüntetett síkot XOY-nal jelöljük.

2.2.1. A sík alakváltozási állapot meghatározása többnyire egységes. A legelterjedtebb megfogalmazás a következő [3, 7, 11, 17, 18, 22, 31]: sík alakváltozás esetében a kitüntetett síkban történő elmozdulás komponensei ( $u, v$ ) a síkot kifeszítő koordinátaegyeneselek irányába eső változók ( $x, y$ ) függ-

vényei; míg a síkra merőleges elmozduláskomponens ( $w$ ) zérussal egyenlő:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Az előbbivel egyenértékű megfogalmazás szerint sík alakváltozás esetében a testben keletkező elmozdulások egy adott síkkal ( $XOY$ ) párhuzamosak [2, 8, 32]. BEZUHOV [2] áttér az alakváltozási és feszültségi tenzor vizsgálatára. FÖPPL A. és FÖPPL L. [8], valamint TIMOSHENKO [32]  $w$ -t nem tekintik azonosan egyenlőnek nullával:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= c_1 z + c_0. \end{aligned} \tag{2}$$

LURJE [19] és NOWACKI [24] a sík alakváltozási állapotot a háromdimenziós feladat kétdimenzióssá való redukálásával vezeti be. Míg LURJE a (2) összefüggéseket használja, addig NOWACKI az:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

kifejezéseket tekinti kiinduló feltételeknek. Integrálásukat nem hajtja végre, hanem (3) következményének a (2) összefüggéseket tekinti  $c_1 = 0$  feltétellel.

Ugyancsak elterjedt megoldás az állapot definiálására egy példa vizsgálata. Ezzel elsősorban a szemléletességre épít, habár bizonyító erejűnek tekinti a példát: Sík alakváltozási állapotban van az a végtelenül hosszú *prizmatikus* rúd (műtárgy), amelyre a irányában változatlan intenzitású terhelés hat [6, 10, 12, 26, 33, 34]. Megemlítjük, hogy [6, 33, 34] az (1) képleteket felhasználva gyakorlati példákat vizsgálnak, [10] a (2), [26] az (1) képleteket, [12] a komplex függvénytant alkalmazva a feladatot elméletileg tárgyalják; a kiinduló problémára csak rámutatnak. LURJE, FÖPPL A. és FÖPPL L. a meghatározás után, mint alkalmazási területet említi a fenti példát.

Gyakorlatilag három meghatározást lehet élesen elkülöníteni. Az első meghatározás az elmozdulásnak azt a tulajdonságát emeli ki, hogy az  $XOY$  síkkal párhuzamos. A második, amelyet csak NOWACKI alkalmaz, a deformációt jellemzi úgy, hogy az az  $XOY$  síkkal párhuzamos. A harmadik definíció típust nem meghatározásnak, hanem következménynek, illetve az elhanyagol-

lások figyelembevételével (de Saint-Venant hatás) alkalmazási körnek kell tekinteni.

2.2.2 A sík feszültségi állapotot néhány szerző nem tárgyalja [6, 7, 12, 32]. Legelterjedtebb az a meghatározás [8, 11, 17, 18, 19, 33, 34], miszerint a testben az  $XOY$  síkkal párhuzamos síkok feszültség mentesek:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 0, \\ \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{zx} &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

A szerzők egy része a szemléletes meghatározást részesíti előnyben. Tekintenek egy vékony tárcsát, amelynek a lapjai feszültségmentesek, továbbá az „éle” (palástja) mentén lapjaival párhuzamos erőrendszerrel terhelt [2, 3, 22, 31]. A vastagság elhanyagolhatóságát kiemelve [2, 3, 10, 22, 31], illetve a terhelést a tárcsa felező síkjára szimmetrikusnak feltételezve [22, 26], integrálást alkalmaznak, (ami MUSZHELISVILI [22] esetében már az általánosított sík feszültség állapot meghatározásával egyenértékű), áttérnek a feszültség középértékekre. Ekkor, ha az alaplapokon a terhelés zérus, az egész tárcsában fennállnak a (4) összefüggések — a feszültség középértékekre. A továbbiakban néhány szerző utal arra, hogy ebben az esetben a feladat már nem kétdimenziós, hiszen az  $u$  és  $v$  elmozduláskomponensek már  $z$  függvényei is; valamint  $w$  az  $x$  és  $y$  függvénye. Így az alakváltozási és feszültségi tenzorok is függvényei  $z$ -nek. A feladat analízisének a [11, 17] művek szerzői ezt a tényt figyelmen kívül hagyják. LOVE [18] az „eltolódásfüggvény”, LURJE a „feszültségfüggvény” alkalmazásával mutatja ki a  $z$  koordináta szerepét. LOVE a feszültség középérték bevezetése után áttér az általánosított sík feszültségi állapot tárgyalására. LURJE integrálással (a terhelést szimmetrikusnak tételezi föl a tárcsa felező síkjára) a sík alakváltozási állapotra vezeti vissza a feladatot, kikapcsolva ezzel a  $z$  koordinátát és a  $w$  elmozduláskomponenst.

NOWACKI meghatározónak a feszültségek  $z$ -től való függetlenségét tekinti, és megmutatja, hogy a sík feszültségi állapot tartalmazza a  $z$  tengely körüli csavarást is.

A meghatározásokban, kivéve NOWACKIÉt, nem találunk éles ellentéteket. Az első meghatározás az  $XOY$  síkok feszültségmentességét mondja ki. A továbbiakban a példa felhozatalával utal arra, hogy a többi feszültségkomponens  $z$ -től független. Ezt egyik szerző sem írja le egyértelműen — kivéve LURJÉt. A második, amelyet csak NOWACKI alkalmaz, a feszültségek  $z$ -től való függetlenségét tekinti alapösszefüggésnek. A harmadik meghatározásban jelentős szerepet kap a vizsgált tárcsa vastagsága, hiszen a másik két dimenzió irányában lényegesen nagyobb kiterjedése van, így a  $k$  normálisú síkok felületén ható feszültségek elhanyagolhatók. Ez már átmenet az általánosított sík feszültségi állapotba.

Megemlítjük, hogy a szerzők többsége a sík feszültségi állapotot a  $\lambda' = 2\lambda G(\lambda + 2G)$ , valamint a  $G' = G$  rugalmassági modulusok bevezetésével visszavezeti a sík alakváltozási állapotra. Ez a megfeleltetés csak a feszültségkomponensekre igaz, az elmozduláskomponensek esetében némi közelítéssel kell élnünk.

2.2.3 Az általánosított sík feszültségi állapotot egyes szerzők a vizsgált tárcsa vastagságának elhanyagolásával [3, 6, 12] definiálják. A [17, 18, 19, 32] művekben integrál segítségével bevezetik a feszültség középértéket. Ezután alkalmazzák a de Saint-Venant-elvet, és rámutatnak arra, hogy a (4) egyenletek érvényben vannak. Természetesen itt is figyelembe lehet venni, hogy a többi feszültségkomponens függ-e  $z$ -től, avagy sem.

Mivel minden konkrét esetben külön el kell dönteni, hogy közelítés nélkül alkalmazhatók-e az egyes sík feladatok típusai, ezért a továbbiakban az *általánosított* sík feladatokkal nem foglalkozunk.

2.2.4 A sík feladatok a főnyúlási és főfeszültségi koordináta rendszerben is definiálhatók [4, 28]. Ennek során kellő körültekintéssel kell az egy pontban definiált állapotot az egész testre általánosítani. Emiatt a gyakorlatban egy, a kitüntetett irányítással koaxális, külső globális koordináta rendszerben definiált meghatározás terjedt el.

### 3. Meghatározások

Jelen dolgozatban feltételezzük, hogy a vizsgált testek homogén, izotrop rugalmas anyagúak. Jellemzésükre egyaránt használjuk a  $\lambda$  és a  $G$  Lamé-féle rugalmassági modulusokat, valamint a  $\mu$  harántkontrakciós tényezőt.

A vizsgálandó állapotokat speciális geometriájú testekre fogjuk értelmezni: Hengerszimmetrikus állapotban forgástestekre, sík állapotban egyenes\* prizmatikus testekre. Ezeknek a geometriai alakzatoknak közös tulajdonságuk, hogy kielégítik az állapotok invariancia tulajdonságait, azaz a forgatási és az eltolási szimmetriát.

Az adott állapotokban a peremfeltételeknek — mind az alátámasztásoknak, mind a terheléseknek — ki kell elégíteniük az állapotot meghatározó feltételeket, azaz az invarianciákat. Ez tisztán csak akkor teljesül, ha a vizsgált test maga is kielégíti az invariancia feltételeit. Ennek hiányában csak annyit mondhatunk, hogy a peremfeltételek által létrehozott alakváltozás és/vagy feszültségi állapot kielégíti az állapotot meghatározó egyenleteket.

\* Az alaplapok merőlegesek a prizmatikus test alkotóira. A továbbiakban az egyenes jelzöt elhagyjuk, de a dolgozatban a prizmatikus testet mindig egyenesnek képzeljük.

### 3.1 Szimmetria

3.1.1 A hengersizimmetrikus állapot meghatározásának az állapot  $\varphi$ -szögű forgatással szemben mutatkozó invarianciáját tekintettük. Ezért mind az elmozdulás-, mind az alakváltozás- és a feszültségmező  $\varphi$  szerinti parciális deriváltja zérus.

Hengersizimmetrikus elmozdulásmező fennállásából ( $\partial \mathbf{u} / \partial \varphi = 0$ ) már következik, hogy az alakváltozás- és a feszültségmező is hengersizimmetrikus. Viszont a feladatot mint hengersizimmetrikus alakváltozási és feszültségi állapotot definiáljuk — gyakorlati feladatoknál elsősorban a feszültség érdekli a felhasználót —, ezért bizonyítandó, hogy a  $\partial T_e / \partial \varphi = 0$  és/vagy  $\partial T_\sigma / \partial \varphi = 0$  fennállása — hengersizimmetrikus test esetében — maga után vonja a  $\partial \mathbf{u} / \partial \varphi = 0$  azonosság fennállását is.

*Megjegyzés:* Izotrop rugalmas anyagra a deformációtenzor és a feszültségi tenzor lineáris összefüggéséből következik, hogy a  $\partial T_e / \partial x_3 = 0$  és a  $\partial T_\sigma / \partial x_3 = 0$  egyenletrendszerek ekvivalensek egymással tetszőleges  $x_1, x_2, x_3$  ortogonális koordináta rendszerben.

Az analízisben megmutatjuk, hogy a  $\partial T_e / \partial \varphi = 0$  egyenletből következik, a  $\partial \mathbf{u} / \partial \varphi = 0$  összefüggés. Így elégséges hengersizimmetrikus állapotról beszélni, mivel egy mezőnek a hengersizimetriája maga után vonja a másik kettő hengersizimmetrikus voltát.

3.1.2. Sík feladatoknál, a hengersizimmetrikushoz hasonlóan, az állapotot megpróbáljuk valamely transzformációra nézve invariánsnak tekinteni, Kézenfekvő a  $z$  irányban tetszőleges  $\zeta$  nagyságú eltolással szembeni invarianciát tekinteni elsődleges szimmetriának. Ez a szimmetria megköveteli, hogy az állapotjellemző mezők  $z$  szerinti parciális deriváltja nulla legyen:

$$\partial T_e / \partial z = 0, \quad \partial T_\sigma / \partial z = 0. \quad (5, 6)$$

Az eltolással szemben mutatott invariancián kívül vizsgálhatjuk a  $\mathbf{k}$  normálisú síkra való  $T(S_{\mathbf{k}})$  tükrözéssel szembeni invarianciát. Ez a feltétel előírja, hogy az  $XOY$  síkra „jellemző” fajlagos szögtorzulások és nyírófeszültségek nullák legyenek:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (7, 8)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (9, 10)$$

Ezenkívül két  $z$  irányú nullfeltétel szükséges a feladatok megfogalmazásához.

A sík alakváltozási, illetve feszültségi állapot esetében a test  $z$  irányban nem szenved alakváltozást:

$$\varepsilon_z = 0, \quad (3a)$$

illetve  $z$  irányba nem ébred benne normálfeszültség:

$$\sigma_z = 0. \quad (4a)$$

3.1.3 Általánosítás. A sík alakváltozási, illetve feszültségi állapotokat általánosíthatjuk oly módon, hogy eltekintünk az invarianciáktól, de megtartjuk az állapotra jellemző „sík” tulajdonságot, azaz hogy a  $\mathbf{k}$  normálisú síkok nem deplanálódnak, illetve feszültségmentesek maradnak.

### 3.2 Definíciók

A továbbiakban a fenti szimmetria meghatározásokat figyelembe véve megadjuk az egyes állapotok definícióját.

#### 3.2.1 *A hengersizimmetrikus állapotok definíciói*

a) *Hengersizimmetrikus állapotnak* nevezzük a forgástestnek azt az állapotát, amikor a test állapotjellemzői  $\varphi$  szögű forgatással szemben invariánsak:

$$\frac{\partial T_t}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T_\sigma}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (11, 12, 13)$$

b) *Párosan hengersizimmetrikus állapotnak* nevezzük a forgástestnek azt az állapotát, amikor a test állapotjellemzői  $\varphi$  szögű forgatással szemben és a forgástengelyen átfektetett bármely síkra vett tükrözéssel szemben invariánsak: A (11, 12, 13) összefüggések, valamint a

$$\gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi z} = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0, \quad u_\varphi = 0 \quad (14, 15, 16, 17, 18)$$

összefüggések.

#### 3.2.2 *A sík állapotok definíciói*

Sík feladatról akkor beszélünk, ha a test az alább definiált sík állapotok egyikében van.

a) *Síkbeli feladatnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben mind az alakváltozás-, mind a feszültségmező invariáns az  $E(\zeta)$  eltolással szemben: az (5) és (6) összefüggések állnak fenn.

b) *Szimmetrikus síkbeli feladatnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben mind az alakváltozás-, mind a feszültségmező invariáns az  $E(\zeta)$  eltolással és a  $T(S_k)$  tükrözéssel szemben: az (5)–(10) összefüggések teljesülését kívánjuk meg.

c) *Sík alakváltozási állapotnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben az alakváltozási tenzor invariáns az  $E(\zeta)$  eltolással és a



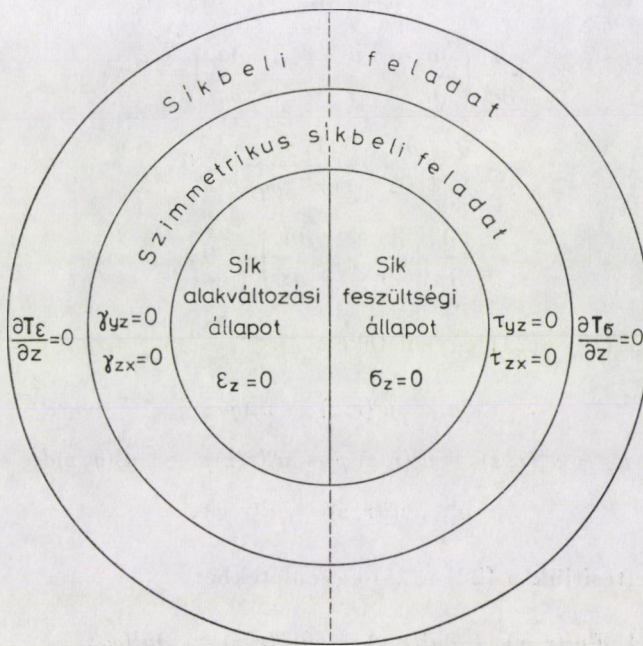
$T(S_k)$  tükrözéssel szemben, valamint  $z$  irányban a test nem deformálódik: az (5), (7), (8), (3a) összefüggések állnak fenn.

d) *Sík feszültségi állapotnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben a feszültségi tenzor invariáns az  $E(\zeta)$  eltolással és a  $T(S_k)$  tükrözéssel szemben, valamint a testben  $z$  irányban nem ébred normálfeszültség: a (6), (9), (10), (4a) összefüggések állnak fenn.

e) *Általános sík alakváltozási állapotnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben csak az  $S_k$  síkokban jön létre alakváltozás, azaz az  $S_k$  síkok nem deplanálódnak és egymáshoz képest nem mozdulnak el. Így csak a (7), (8), (3a) összefüggések teljesülését kívánjuk meg.

f) *Általános sík feszültségi állapotnak* nevezzük a prizmatikus testnek azt az állapotát, amelyben az  $S_k$  síkok felülete feszültségmentes. Így csak a (9), (10), (4a) összefüggések teljesülését kívánjuk meg.

*Megjegyzés:* Abban az esetben, amikor előre tudjuk, hogy a sík állapotra jellemző feltételek nem minden síkban, illetve nem az egész síkban állnak fenn,



Általános sík alakváltozási állapot

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Általános sík feszültségi állapot

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0, \\ \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

1. ábra. Az egyes sík feladatok kapcsolata egymással

de a fellépő pontatlanságok hatása elhanyagolható, úgy *általánosított* sík feladatokról beszélünk.

Az egyes állapotok kapcsolatát az 1. ábrán tüntettük fel.

#### 4. A hengerszimmetrikus állapotok analízise

A (11) és a (12) egyenletek ekvivalenciája értelmében elégséges a következő egyenletrendszert vizsgálni:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = 0. \quad (24)$$

Integráljuk az (19)–(21) egyenleteket:

$$u_r = u_r^0(r, z) + u_r^1(\varphi, z), \quad (25)$$

$$u_\varphi = u_\varphi^0(r, z) + u_\varphi^1(r, z) \varphi - u_r^0(r, z) \varphi - \int u_r^1(\varphi, z) d\varphi, \quad (26)$$

$$u_z = u_z^0(r, z) + u_z^1(r, \varphi), \quad (27)$$

majd behelyettesítjük a (22)–(24) egyenletekbe:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z^1(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_\varphi^1(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial u_r^0(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial u_r^1(\varphi, z)}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\varphi^0(r, z)}{r} - r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_r^0(r, z)}{r} + \frac{u_r^1(\varphi, z)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r^1(\varphi, z)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 u_z^1(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_r^1(\varphi, z)}{\partial \varphi \partial z} = 0. \quad (30)$$

A (30) legáltalánosabb integrálja

$$u_z^1(r, \varphi) = r f_{rz}(\varphi) + f_z(\varphi) + f_z(r), \quad (30a)$$

$$u_r^1(\varphi, z) = -r f_{rz}(\varphi) + f_r(\varphi) + f_r(z), \quad (30b)$$

ezt behelyettesítve (28)-ba, a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 f_{rz}(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_z(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_\varphi^1(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial u_r^0(r, z)}{\partial z} + f_{rz}(\varphi) - \frac{\partial f_r(z)}{\partial z} = 0. \quad (28')$$

Ebben az egyenletben  $\partial^2 f_{rz}(\varphi)/\partial \varphi^2 + f_{rz}(\varphi)$  kifejezés csak  $\varphi$ -től függ, ezért

$$f_{rz}(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi, \quad (28a)$$

az  $\partial^2 f_z(\varphi)/r \partial \varphi^2 = 0$  kifejezés csak  $\varphi$ -től és  $r$ -től függ, ezért

$$f_z(\varphi) = a\varphi + b \quad (28b)$$

és a  $\partial u_\varphi^1(r, z)/\partial z + \partial u_r^0(r, z)/\partial z$  kifejezés csak  $r$  és  $z$  függvénye, ezért

$$u_\varphi^1(r, z) = u_r^0(r, z) + f_\varphi^1(r). \quad (28c)$$

Az (28a, b) kifejezéseket behelyettesítjük a (29) egyenletbe:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{f_\varphi^1(r)}{r} + \frac{f_r(\varphi)}{r} + \frac{f(z)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f_r(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (29')$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$f_r(z) = 0, \quad (29a)$$

$$f_r(\varphi) = C \sin \varphi + D \cos \varphi, \quad (29b)$$

$$f_\varphi^1(r) = cr. \quad (29c)$$

Az elmozduláskomponensek a következő alakúak:

$$u_r = u_r^0(r, z) - z(A \sin \varphi + B \cos \varphi) + (C \sin \varphi + D \cos \varphi), \quad (31)$$

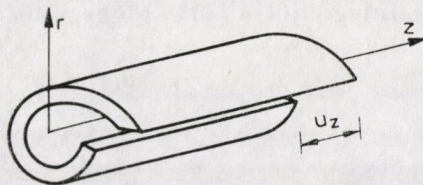
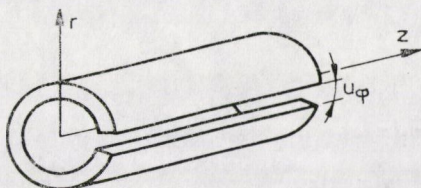
$$u_\varphi = u_\varphi^0(r, z) + z(-A \cos \varphi + B \sin \varphi) - (-C \cos \varphi + D \sin \varphi) + cr\varphi, \quad (32)$$

$$u_z = u_z^0(r, z) + r(A \sin \varphi + B \cos \varphi) + a\varphi + b. \quad (33)$$

Az elmozdulásvektor, valamint az alakváltozási, az elfordulási és a feszültségi tenzorok komponenseit és az állapot redukált Lamé-féle egyenleteit

2. táblázat

	Hengerszimmetrikus állapot	
	Párosan hengerszimmetrikus állapot	Hengerszimmetrikus csavarás
Elmozdulás komponensek	$u = u_r^0 - z (A \sin \varphi + B \cos \varphi) + (C \sin \varphi + D \cos \varphi)$ $u_z = u_z^0 + r (A \sin \varphi + B \cos \varphi)$	$u_\varphi = u_\varphi^0 - z (A \cos \varphi - B \sin \varphi) + (C \cos \varphi - D \sin \varphi)$
Redukált Lamé-féle egyenletek	$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \frac{u_r^0}{r} + \frac{\partial u_z^0}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_r^0}{r} + \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} \right) = 0$ $(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \frac{u_r^0}{r} + \frac{\partial u_z^0}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial z^2} \right) = 0$	$\frac{\partial^2 u_\varphi^0}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\varphi^0}{r} + \frac{\partial^2 u_\varphi^0}{\partial z^2} = 0$
Alakváltozási tenzor komponensei	$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^0, \quad \gamma_{rz} = \gamma_{rz}^0$	$\gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\varphi}^0, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z}^0$
Elfordulási tenzor komponensei	$\omega_{r\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{z}{r} (A \cos \varphi - B \sin \varphi) + \frac{1}{2} \frac{1}{r} (C \cos \varphi - D \sin \varphi)$ $\omega_{\varphi z} = -\frac{1}{2} (A \cos \varphi - B \sin \varphi)$ $\omega_{zr} = \omega_{rz}^0 + (A \sin \varphi + B \cos \varphi)$	$\omega_{r\varphi} = \omega_{r\varphi}^0 + \frac{1}{2} \frac{z}{r} (A \cos \varphi - B \sin \varphi) - \frac{1}{2} \frac{1}{r} (C \cos \varphi - D \sin \varphi)$ $\omega_{\varphi z} = \omega_{\varphi z}^0 - \frac{1}{2} (A \cos \varphi - B \sin \varphi)$ $\omega_{zr} = 0$
Feszültségi tenzor komponensei	$\sigma_r = \sigma_r^0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0, \quad \sigma_z = \sigma_z^0, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^0$	$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^0, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{\varphi z}^0$



$$u_\varphi = cr\varphi,$$

$$\epsilon_\varphi = cr,$$

$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2G)cr,$$

$$(\sigma_r = \sigma_z = \lambda cr),$$

$$\omega_{r\varphi} = -c\varphi.$$

a)

$$u_z = a\varphi,$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{a}{2r},$$

$$\tau_{\varphi z} = G\frac{a}{r},$$

$$\omega_{\varphi z} = -\frac{a}{2r}.$$

b)

2. ábra.  $\varphi$ -től függő hengersizmetrikus alakváltozási állapotok  
 a. Határdiszlokáció (I. variáns) b. Csavardiszlokáció (Szinguláris megoldás,  $r \neq 0$ )

a 2. táblázatban foglaltuk össze. (Az  $u_\varphi = cr\varphi$  és az  $u_z = a\varphi + B$  tagoktól eltekintettünk.)

A  $cr\varphi$  és  $a\varphi$  elmozdulások a 2. ábrán bemutatott deformációt eredményezik, így ezektől a forgástestek vizsgálatakor eltekinthetünk. Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha valamely forgástest henger- illetve párosan hengersizmetrikus alakváltozási és feszültségi állapotban van, akkor az elmozdulásmező is ugyanilyen tulajdonsággal bír.

A 2. ábrán bemutatott elmozdulásmezők a diszlokációk elméletében játszanak fontos szerepet.

Az elmozduláskomponensekben az  $A$  és a  $B$  konstansokkal jellemzett tagok a merevtestszerű elfordulást jellemzik, míg a  $C$  és a  $D$  együtthatójú tagok a merevtestszerű eltolódást írják le.

### 5. A sík feladatok analízise

5.1 *Síkbeli feladat.* Az (5) és a (6) egyenletek egyenértékűsége miatt elégséges a következő egyenletrendszer vizsgálatát:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (34, 35, 36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (37, 38, 39)$$

Integráljuk a (34)–(36) egyenleteket:

$$u = u_0(x, y) + u_1(y, z), \quad (40)$$

$$v = v_0(x, y) + v_1(x, z), \quad (41)$$

$$w = w_0(x, y) + w_1(x, y)z. \quad (42)$$

A kapott eredményt behelyettesítve a (37)–(39) egyenletekbe, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{\partial^2 u_1(y, z)}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_1(x, z)}{\partial x \partial z} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial x} = 0. \quad (45)$$

A (43) kifejezésből  $u_1$ -re és  $v_1$ -re a következő integrált kapjuk:

$$u_1(y, z) = y \cdot u(z) + f_u(y) + f_u(z),$$

$$v_1(x, z) = x \cdot v(z) + f_v(x) + f_v(z),$$

ahol  $f_u(y)$  és a  $f_v(x)$  az általánosság megsértése nélkül beolvasztható az  $u_0$  és a  $v_0$  tagokba.

A (44), (45) kifejezésekből következik, hogy az  $u(z)$  és  $v(z)$  függvények  $z$ -nek legfeljebb másodfokú polinomjai, valamint  $w_1(x, y)$  lineárisan függ az argumentumaitól, továbbá  $f_u(z)$  és  $f_v(z)$  legfeljebb másodfokú függvényei  $z$ -nek.

Leválasztva az  $u_0$  és a  $v_0$  megoldásokból teljes másodfokú polinomot, a következő elmozduláskomponenseket kapjuk:

$$u = u_0(x, y) + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}y^2 + 0.5 C_3z^2 + C_6yz + C_1z + C_u, \quad (46)$$

$$v = v_0(x, y) + a_{21}x^2 + a_{22}xy + a_{23}y^2 + 0.5 C_4z^2 - C_6xz + C_2z + C_v, \quad (47)$$

$$w = w_0(x, y) - (C_3x + C_4y + C_5)z - (C_1x + C_2y + C_w). \quad (48)$$

A másodfokú tagok együtthatóira a következő azonosság áll fenn (Lamé-féle egyenletek):

$$(\lambda + G)(2a_{11} + a_{22}) + 2G(a_{11} + a_{13}) + \lambda C_3 = 0, \quad (49)$$

$$(\lambda + G)(a_{12} + 2a_{23}) + 2G(a_{21} + a_{23}) + \lambda C_4 = 0. \quad (50)$$

4. táblázat

	Síkbeli feladat	Szimmetrikus síkbeli feladat
$\varepsilon_x$	$\varepsilon_x^0 + 2a_{11}x + a_{12}y$	$\varepsilon_x^0 + 2a_{11}x + a_{12}y$
$\varepsilon_y$	$\varepsilon_y^0 + a_{22}x + 2a_{23}y$	$\varepsilon_y^0 + a_{22}x + 2a_{23}y$
$\varepsilon_z$	$-(C_3x + C_4y + C_5)$	$-(C_3x + C_4y + C_5)$
$\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy}^0 + \frac{1}{2}(a_{12} + 2a_{21})x + \frac{1}{2}(2a_{13} + a_{22})y$	$\gamma_{xy}^0 + \frac{1}{2}(a_{12} + 2a_{21})x + \frac{1}{2}(2a_{13} + a_{22})y$
$\gamma_{yz}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - C_6x\right)$	0
$\gamma_{zx}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + C_6y\right)$	0
$\omega_{xy}$	$\omega_{xy}^0 + \frac{1}{2}(a_{12} - 2a_{21})x + \frac{1}{2}(2a_{13} - a_{22})y + C_6z$	$\omega_{xy}^0 + \frac{1}{2}(a_{12} - 2a_{21})x + \frac{1}{2}(2a_{13} - a_{22})y$
$\omega_{yz}$	$-\frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{1}{2}C_6x + \frac{1}{2}C_4z - \frac{1}{2}C_2$	$\frac{1}{2}C_4z + \frac{1}{2}C_2$
$\omega_{zx}$	$\frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{1}{2}C_6y - \frac{1}{2}C_3z - \frac{1}{2}C_1$	$-\frac{1}{2}C_3z - \frac{1}{2}C_1$
$\sigma_x$	$\sigma_x^0 - G(2a_{13} + a_{22})x - G(-a_{12} + 2a_{21} + 4a_{23})y - \lambda C_5$	$\sigma_x^0 - G(2a_{13} + a_{22})x - G(-a_{12} + 2a_{21} + 4a_{23})y - \lambda C_5$
$\sigma_y$	$\sigma_y^0 - G(4a_{11} + 2a_{13} - a_{22})x - G(a_{12} + 2a_{21})y - \lambda C_5$	$\sigma_y^0 - G(4a_{11} + 2a_{13} - a_{22})x - G(a_{12} + 2a_{21})y - \lambda C_5$
$\sigma_z$	$\sigma_z^0 - G\left(4\frac{\lambda + G}{\lambda}2a_{11} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda}2a_{13} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda}a_{22}\right)x -$ $-G\left(\frac{3\lambda + 2G}{\lambda}a_{12} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda}2a_{21} + 4\frac{\lambda + G}{\lambda}2a_{23}\right)y - (\lambda + 2G)C_5$	$\sigma_z^0 - G\left(4\frac{\lambda + G}{\lambda}2a_{11} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda}2a_{13} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda}a_{22}\right)x -$ $-G\left(\frac{3\lambda + 2G}{\lambda}a_{12} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda}2a_{21} + 4\frac{\lambda + G}{\lambda}2a_{23}\right)y - (\lambda + 2G)C_5$
$\tau_{xy}$	$\tau_{xy}^0 + G(a_{12} + 2a_{21})x + G(2a_{13} + a_{22})y$	$\tau_{xy}^0 + G(a_{12} + 2a_{21})x + G(2a_{13} + a_{22})y$
$\tau_{yz}$	$G\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - C_6x\right)$	0
$\tau_{zx}$	$G\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + C_6y\right)$	0

Az elmozduláskomponenseket és a redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, a deformációs, elfordulási és feszültségi tenzor komponenseit a 4. táblázatban adtuk meg.

5.2 *Szimmetrikus síkbeli feladat.* Az 5.1 pontban vizsgált (34)–(39) összefüggésekhez a

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (51, 52)$$

kifejezéseket kell csatolni. Mivel ezek az előző kifejezéseket érvényben hagyják, ezért elég megvizsgálni, milyen kiegészítő feltételeket írnak elő az (51), (52) kifejezések.

Behelyettesítve a (46), (47) elmozduláskomponenseket az (51), (52) egyenletekbe, a következő differenciálegyenletet kapjuk  $w_0$ -ra:

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} - C_6 x = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + C_6 y = 0. \quad (54)$$

Integrálva (53), (54)-et, azt találjuk, hogy  $C_6 = 0$  és  $w_0$  elsőfokú polinomja argumentumainak. Így az elmozduláskomponensek:

$$u = u_0(x, y) + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}y^2 + 0.5 C_3 z^2 + C_1 z + C_u, \quad (55)$$

$$v = v_0(x, y) + a_{21}x^2 + a_{22}xy + a_{23}y^2 + 0.5 C_4 z^2 + C_2 z + C_v, \quad (56)$$

$$w = -(C_3 x + C_4 y + C_5)z - (C_1 x + C_2 y + C_w). \quad (57)$$

Az elmozdulás komponenseket és a redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, az állapotot jellemző mezők komponenseit a 4. táblázatban foglaltuk össze.

5.3 *Sík alakváltozási állapot.* Az eddig vizsgált (34)–(39) és (51), (52) összefüggéseken kívül a

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (58)$$

egyenletet is figyelembe kell venni. Ez a  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 0$  és a  $C_5 =$  feltételt vonja maga után. Ezért az  $a_{ij}$ -együtthatójú teljes másodfokú polinom kiírásától eltekintünk. Így az elmozdulás komponensek:

$$u = u_0(x, y) + C_1 z + C_u, \quad (59)$$

$$v = v_0(x, y) + C_2 z + C_v, \quad (60)$$

$$w = -(C_1 x + C_2 y + C_w). \quad (61)$$



Az elmozduláskomponenseket és a redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, az állapotot jellemző mezők komponenseit az 5. táblázatban adtuk meg.

5.4 *Sík feszültségi állapot.* Az állapot jellemzéséhez a (34)–(39) és a (51), (52) egyenleteken kívül a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{62}$$

5. táblázat

	Sík alakváltozási állapot	Sík feszültségi állapot
$\varepsilon_x$	$\varepsilon_x^0$	$\varepsilon_x^0 + 2a_{11}x + \left(\frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_4 - 2a_{23}\right)y + a_1$
$\varepsilon_y$	$\varepsilon_y^0$	$\varepsilon_y^0 + \left(\frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_3 - 2a_{11}\right)x + 2a_{23}y + \left(\frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_5 - a_1\right)$
$\varepsilon_z$	0	$-(C_3x + C_4y + C_5)$
$\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy}^0$	$\gamma_{xy}^0 - \frac{1}{2}(2C_4 + 4a_{23})x - \frac{1}{2}(2C_3 + 4a_{11})y$
$\gamma_{yz}$	0	0
$\gamma_{zx}$	0	0
$\omega_{xy}$	$\omega_{xy}^0$	$\omega_{xy}^0 + \frac{1}{2} 4 \frac{\lambda + G}{\lambda} C_4 x - \frac{1}{2} 4 \frac{\lambda + G}{\lambda} C_2 y$
$\omega_{yz}$	$\frac{1}{2} C_2$	$\frac{1}{2} C_4 x + \frac{1}{2} C_2$
$\omega_{zx}$	$-\frac{1}{2} C_1$	$-\frac{1}{2} C_3 x - \frac{1}{2} C_1$
$\sigma_x$	$\sigma_x^0$	$2G\varepsilon_x^0 + 2G(2a_{11} + C_3)x + 2G\left(2\frac{\lambda + G}{\lambda} C_4 - 2a_{23}\right)y + 2G(C_5 - a_1)$
$\sigma_y$	$\sigma_y^0$	$2G\varepsilon_y^0 + 2G\left(2\frac{\lambda + G}{\lambda} C_3 - 2a_{11}\right)x + 2G(2a_{23} + C_4)y + 2G\left(2\frac{\lambda + G}{\lambda} C_5 - a_1\right)$
$\sigma_z$	$\sigma_z^0$	0
$\tau_{xy}$	$\tau_{xy}^0$	$\tau_{xy}^0 - G(2C_4 + 4a_{23})x - G(2C_3 + 4a_{11})y$
$\tau_{yz}$	0	0
$\tau_{zx}$	0	0

összefüggést is figyelembe kell venni. Behelyettesítve (62)-be az (55)–(57) kifejezéseket, a következő differenciális összefüggést kapjuk  $u_0$ -ra és  $v_0$ -ra:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\lambda + 2G}{\lambda} (C_3x + C_4y + C_5) = 0. \quad (63)$$

Ennek az egyenletnek a nemhomogén megoldásait külön feltüntetve, a következő elmozdulás komponenseket kapjuk:

$$u = u_0(x, y) + a_{11}x^2 + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_4 - 2a_{23} \right) xy - \left( \frac{3\lambda + 2G}{2\lambda} C_3 + a_{11} \right) y^2 + \\ + 0.5 C_3z^2 + a_1x + C_1z + C_u, \quad (64)$$

$$v = v_0(x, y) - \left( \frac{3\lambda + 2G}{2\lambda} C_4 + a_{23} \right) x^2 + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_3 - 2a_{11} \right) xy + a_{23}y^2 + \\ + 0.5 C_4z^2 + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_5 - a_1 \right) y + C_2z + C_v, \quad (65)$$

$$w = - (C_3x + C_4y + C_5)z - (C_1x + C_2y + C_w). \quad (66)$$

Ekkor viszont (63) a  $\partial u_0/\partial x + \partial v_0/\partial y = 0$  egyenletre redukálódik, így a Lamé-féle egyenletek  $u_0$ -ra és  $v_0$ -ra nézve szeparálódnak.

Az elmozdulás komponenseket és redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, az állapotot jellemző mezők komponenseit az 5. táblázatban foglaltuk össze.

5.5 *Általános sík alakváltozási állapot.* Az állapotegyenletek a következők:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (67)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (69)$$

Először integráljuk a (67) egyenletet  $w_0 = w_0(x, y)$ , majd a kapott eredményt felhasználva (68), (69)-et. Így az elmozdulás komponensek:

$$u = u_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial x} z, \quad (70)$$

$$v = v_0(x, y) - \frac{\partial w_0}{\partial y} z, \tag{71}$$

$$w = w_0(x, y). \tag{72}$$

Az elmozdulás komponenseket és a redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, az állapotot jellemző mezők komponenseit a 6. táblázatban közöljük.

6. táblázat

	Általános sík alakváltozási állapot	Általános sík feszültségi állapot
$\varepsilon_x$	$\varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z$	$\varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \varepsilon_x^0 \frac{z^2}{2}$
$\varepsilon_y$	$\varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z$	$\varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \varepsilon_y^0 \frac{z^2}{2}$
$\varepsilon_z$	0	$-\frac{\lambda}{\lambda + 2G} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0)$
$\gamma_{xy}$	$\gamma_{xy}^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z$	$\gamma_{xy}^0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \gamma_{xy}^0 \frac{z^2}{2}$
$\gamma_{yz}$	0	0
$\gamma_{zx}$	0	0
$\omega_{xy}$	$\omega_{xy}^0$	$\omega_{xy}^0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \omega_{xy}^0 \frac{z^2}{2}$
$\omega_{yz}$	$-\frac{\partial w_0}{\partial y}$	$-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) z$
$\omega_{zx}$	$\frac{\partial w_0}{\partial x}$	$\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) z$
$\sigma_x$	$\sigma_x^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z$	$\sigma_x^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z - \frac{2\lambda G}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \varepsilon_x^0 \frac{z^2}{2} - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0)$
$\sigma_y$	$\sigma_y^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z$	$\sigma_y^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z - \frac{2\lambda G}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \varepsilon_y^0 \frac{z^2}{2} - \frac{\lambda^2}{\lambda + 2G} (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0)$
$\sigma_z$	$\sigma_z^0$	0
$\tau_{xy}$	$\tau_{xy}^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z$	$\tau_{xy}^0 - 2G \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla_0^2 \tau_{xy}^0 \frac{z^2}{2}$
$\tau_{yz}$	0	0
$\tau_{zx}$	0	0

5.6 Általános sík feszültségi állapot. Az állapotegyenletek a következők:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (73)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (69)$$

A (73) egyenletet (68), (69) segítségével az elmozdulás komponensekre megoldjuk:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (76)$$

valamint integráljuk a (73)-at  $w$ -re

$$w = w_0(x, y) - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \quad (77)$$

A Lamé-féle egyenleteket (68), (69), (73) segítségével megoldjuk  $u$ -ra és  $v$ -re:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{3\lambda + 2G}{\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \quad (79)$$

A (74), (78) és a (75), (79) integrálásával határozzuk meg  $u$ -t és  $v$ -t

$$u = Cu_2(x, y) \frac{z^2}{2} + u_1(x, y)z + u_0(x, y), \quad (80)$$

$$v = Cv_2(x, y) \frac{z^2}{2} + v_1(x, y)z + v_0(x, y). \quad (81)$$

Ennek az általános integrálnak ki kell elégítenie a (74)–(79) differenciálegyenlet rendszert. Megoldása:

$$u = u_0(x, y) - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla u_0(x, y) \frac{z^2}{2}, \quad (82)$$

$$v = v_0(x, y) - \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \nabla v_0(x, y) \frac{z^2}{2}, \quad (83)$$

$$w = w_0(x, y) - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) z. \quad (84)$$

Az elmozdulás komponenseket és redukált Lamé-féle egyenleteket a 3. táblázatban, az állapotot jellemző mezők komponenseit a 6. táblázatban foglaltuk össze.

## 6. A sík feladatok eredményeinek analízise

6.1 A 3. táblázatban közölt eredmények az első pillantásra igazolják a különböző állapotoknak az 1. ábrán bemutatott kapcsolatát.

A megoldásban feltüntetett egyes tagok jelentése:

- $u_0$ ,  $v_0$  és  $w_0$  –  $z$ -től független elmozdulás komponensek
- $C_u$ ,  $C_v$  és  $C_w$  – merevtestszerű eltolódás
- $C_1z$ ,  $C_2z$  és a  $-(C_1x + C_2y)$  – merevtest szerűelfordulás az  $X(C_2)$  és az  $Y(C_1)$  tengely körül.

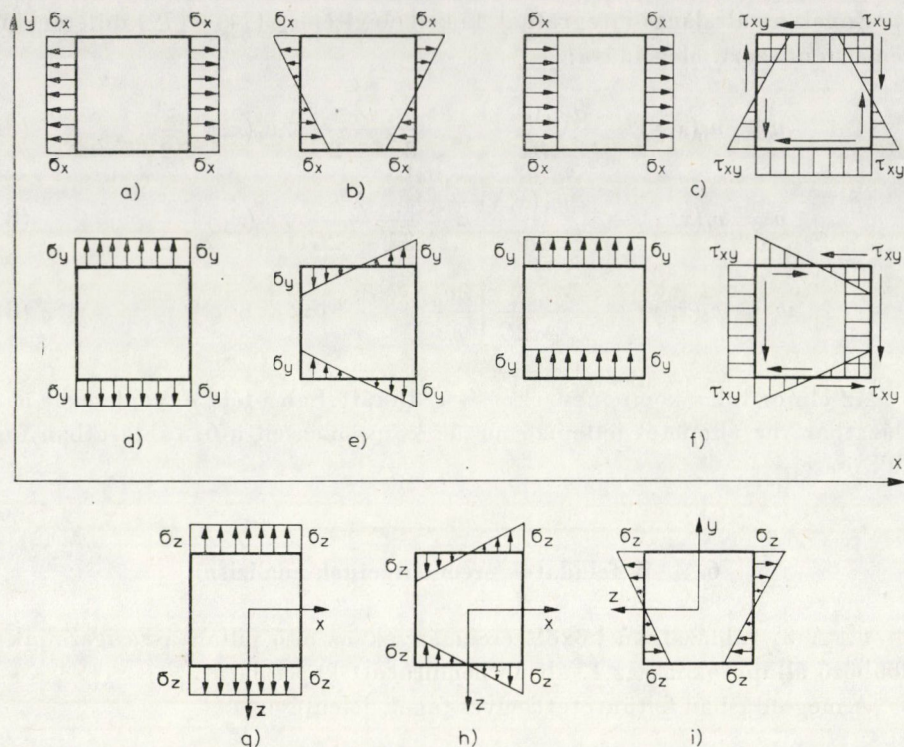
Ezek és csak ezek a tagok jelennek meg a sík alakváltozási állapot megoldásában. Ezért ezt az állapotot az első csoport reprezentánsának fogjuk nevezni. Ebben az állapotban az állapot jellemzők mind „0”-indexűek, az  $X$  és az  $Y$  tengely körüli merevtestszerű elfordulás kivételével,  $z$ -től függetlenek.

A szimmetrikus síkbeli feladat mindössze a  $\mathbf{k}$  normálisú alaplapon ható  $N_z$  normálerő,  $M_x$  és  $M_y$  hajlítónyomaték és az egész test teljes felületén ható  $Q$  nyíróerő figyelembevételével hővebb állapot. Ezek az erőhatások  $z$ -től függetlenek, és az elemi kocka felületén három normál feszültségként és egy nyírófeszültségként ábrázolhatók (3. ábra).

A síkbeli feladat a reprezentánstól az előbb említett erőhatáson kívül a  $Z$  tengely körüli csavarással hővebb állapot.

A dolgozatban a sík feszültségi állapota speciális elmozdulásmezőt nyerünk:  $u_0$  és  $v_0$  kapcsolt harmonikus függvények. Ezen kívül az

$$u = a_{11}x^2 + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_4 - a_{23} \right) xy - \left( \frac{3\lambda + 2G}{2\lambda} C_3 + a_{11} \right) y^2 + 0.5C_3z^2 + a_1x,$$



3. ábra. Az  $u = \frac{C_3}{2} z^2$  és  $v = \frac{C_4}{2} z^2$  elmozdulással kompatibilis feszültségi állapotok felbontása  $x$  és  $y$  szerint

a)  $N_x$  normálérő; b)  $M_{xz}$  hajlítónyomaték; c)  $x$  irányú  $\sigma - \tau$  egyensúlyi állapot; d)  $N_y$  normálérő; e)  $M_{yz}$  hajlítónyomaték; f)  $y$  irányú  $\sigma - \tau$  egyensúlyi állapot; g)  $N_z$  normálérő; h)  $M_{zy}$  hajlítónyomaték; i)  $M_{zx}$  hajlítónyomaték

$$v = - \left( \frac{3\lambda + 2G}{2\lambda} C_4 + a_{23} \right) x^2 + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_3 - a_{11} \right) xy + a_{23} y^2 + 0.5 C_4 z^2 + \\ + \left( \frac{\lambda + 2G}{\lambda} C_5 - a_1 \right) y,$$

$$w = - (C_3 x + C_4 y + C_5) z$$

eltolódással jellemzett állapot is sík feszültségi állapotot eredményez. Mivel ez az állapot mindössze 5 paraméteres, ezért nem lehet jellemzője a sík feszültségi állapotoknak. Így a  $\sigma_z = 0$  összefüggésből kiindulva

$$\varepsilon_z^0 = - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0,$$

azaz a sík feszültségi állapot speciális esete a sík alakváltozási állapotnak ( $\sigma_z = 0$ ). Ekkor a  $\lambda' = 2\lambda G/(\lambda + 2G)$  és a  $G' = G$  új rugalmassági modulusok bevezetésével a sík feszültségi állapot fenntartás nélkül áttranszformálható a sík alakváltozási állapotba.

A második csoportba tartozó általánosított sík feladatok a reprezentánstól a  $w_0$  tag jelenlétében különböznek, valamint abban, hogy ezek a megoldások nem függetlenek  $z$ -től. A  $w_0$  és a  $\nabla_0^2 u_0$ , illetve a  $\nabla_0^2 v_0$  tagok harmonikusak, így csak alakváltozással járó megoldást szolgáltatnak. Figyelembe véve, hogy az  $\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0$  kifejezés harmonikus, az  $\int_{-z_0}^{+z_0} dz$  formai integrálással a  $\nabla_0^2$  operátoros tagokat a „beolvaszthatjuk” a  $z$ -től független „o” indexű tagokba, így az általános sík feszültségi állapotot — eltekintve az  $\varepsilon_z$  és a  $\sigma_z$  viszonyától — visszavezethetjük az általános sík alakváltozási állapotra.

6.2 A kapott eredmények összehasonlítása a szakirodalomban található eredményekkel. A szakirodalomban a fenti hat típusú feladatra való felosztás és megnevezésben való elkülönítése nem található meg. KALISZKY [13] alkalmaz felosztást; az (5)–(10) egyenletek teljesülése esetében sík feladatról beszél, a (3a) és a (4a) nullfeltételek fennállásával értelmezi a sík alakváltozási és feszültségi állapotokat.

NOWACKI sík feszültségi állapotként a sík feladatot definiálja; ezzel összhangban levő eredményre jutottunk. LURJE és LOVE sík feszültségi állapotként az általános sík feszültségi állapotot definiálja; ezzel megegyező eredményre jutottunk — figyelembe véve, hogy  $\lambda/(3\lambda + 2G) = 1/4(1 - \mu)$ .

A sík feszültség állapot esetében, az itt közölt definíciót alapul véve, eltérő eredményt kaptunk. A tanulmányban analizált sík feszültségi állapot a sík alakváltozási állapot speciális esete —  $\sigma_z = 0$ . Ekkor a rugalmassági modulusok transzformációjával maga a sík feszültségi állapot is áttranszformálható sík alakváltozási állapotba.

## 7. Összefoglalás

A tanulmányban rendszereztük és analizáltuk a hengersizmetrikus és sík feladatokat. Szakirodalmi áttekintést adtunk a feladatok meghatározásairól, és rámutattunk azok eltéréseire. Az eltérő meghatározásokat különböző feladatoknak tekintve, új típusú állapotokat definiáltunk mind a hengersizmetria fennállásánál, mind a sík feladatoknál.

Megadtuk az újonnan bevezetett állapotok egységes definícióit, az állapotokat meghatározó egyenleteket, valamint a megoldások (elmozdulás komponensekre érvényes) függvényosztályait.

Az analízis során megmutattuk, hogy az egységesen definiált állapotok egy-egy feszültségi összetevővel különböznek egymástól, és hogy csak ebben a felfogásban lehet a sík feszültségi állapotot a rugalmassági modulusok transzformációjával visszavezetni a sík alakváltozási állapotra.

A síkbeli feladat, a sík alakváltozási és az általános sík feszültségi állapot esetében a szakirodalommal egyező eredményre jutottunk.

Az egyes feladatokat általánosságban oldottuk meg, de olyan részletességgel, hogy konkrét feladat megoldása során bármely numerikus megoldási séma alkalmazható.

#### IRODALOM

1. Арутюнян, Н. Х.—Абрамян, Б. Л.: Кручение упругих тел, Физматгиз, Москва 1963 г.
2. Безухов, Н. И.: Основы теории упругости, пластичности и ползучести, Высшая школа, Москва 1968 г.
3. Безухов, Н. И.—Лужин, О. В.: Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач, Высшая школа, Москва 1974 г.
4. SCHOENOKY Tibor: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1971
5. SLOUGH, R. W., RASHID, Y. R.: Finite Element Analysis of Axi-Symmetric Solids, *Proc. ASCE*, 91 EM 1, (1965)
6. Филлин, А. П.: Прикладная механика твердого деформируемого тела, Том 1. Наука Москва 1975 г.
7. Филоненко-Бородич М. М.: Теория упругости, *ГОСТЕХИЗДАТ*, Москва 1974 г.
8. FÖRPL, A.—FÖRPL, L.: Drang und Zwang, Band I. München 1924
9. HAJÓS György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1966
10. Handbuch der Physik, Redigiert von GRAMMEL, R. Band VI. Mechanik der elastischen Körper, GESKELEK, J. W.: Statik der elastischen Körper, Springer, Berlin 1928
11. Handbuch der Physik, Herausgegeben von FLÜGGE, S. Band VI. Elastizität und Plastizität, SNEDDON, J. N.—BERRY, D. S.: The Classical Theory of Elasticity. Springer-Verlag, Berlin 1958
12. Қаландия А. И.: Математические методы двумерной упругости, Наука, Москва 1973 г.
13. Kaliszky Sándor: Képlékenységtan, Akadémiai könyvkiadó, Budapest, 1975
14. Колосов Г. В.: Применение комплексного переменного к теории упругости, *ГОСТЕХИЗДАТ*, Москва 1935 г.
15. Колтунов М. А.—Васильев Ю. Н.—Черных В. А.: Упругость и прочность цилиндрических тел, Высшая школа, Москва 1975 г.
16. Ламер Г.: К расчету толстой цилиндрической оболочки при действии осесимметрической нагрузки, *Acta Tech. Hung.*, 87/3—4, Budapest 1978
17. Лейбензон Л. С.: Курс теории упругости, *ГОСТЕХИЗДАТ*, Москва 1947 г.
18. LOVE, A. E.: A Treatise on the Metemetical Theory of Elasticity, Cambridge 1927
19. Лурье А. И.: Теория упругости Наука, Москва 1970 г.
20. Matematikai kislexikon. Szerk. FARKAS Miklós. Műszaki könyvkiadó, Budapest 1972
21. MÁRKUS Gyula: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
22. Мухелишвили Н. И.: Некоторые основные задачи математической теории упругости *Наука* Москва 1966 г.
23. NAGY Tamás—SZILÁGYI György: Általános, többrétegű rendszer terhelés alatti viselkedésének vizsgálata a véges elemek módszerével, Kutatási jelentés, I rész, Budapest 1975
24. Новацкий В.: Теория упругости МИР, Москва 1975 г.
25. ODEN, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua McGraw-Hill, New York 1972
26. Прочность устойчивость колебания Справочник в трех томах, Под общей редакцией: Бургера И. А. и Пановко Я. Г.: Машиностроение, Москва 1968 г.
27. RASHID, Y. R.: Analysis of Axisymmetric Composite Structures by the Finite Element Method, *Nucl. Eng. Desing.* 3. (1966)
28. Szily Kálmán: Szilárdságtan. Technika, Budapest 1921
29. Скрин Э.—Рой Дж. Р.: Автоматическая система для кинематического анализа ASKA, В сборнике: Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ (пер. с англ.), *СУДОСТРОЕНИЕ*. Ленинград 1974 г.
30. Соляник-Красса, К. В.: Кручение валов переменного сечения, *ГОСТЕХИЗДАТ*, Москва 1949 г.
31. Справочник по теории упругости, Под ред. Варвака, П. М. и Рябова, А. Ф. *Будівельник*, Киев 1971 г.



32. Тимошенко, С. П.: Курс теории упругости, (Az 1914—16-ban megjelent kétkötetes mű új kiadása.) Наукова думка, Киев 1972 г.
33. TIMOSHENKO, S. P.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York 1934
34. TIMOSHENKO, S. P.—GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York 1970
35. Уфлянд, Я. С.: Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Ленинград 1968 г.
36. Власов, В. З.: Общая теория оболочек, ГОСТЕХИЗДАТ, Ленинград 1949 г.
37. WILSON, E. L.: Structural Analysis of Axi-Symmetric Solids, *J. AIAA* 3 (1965)
38. ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science McGraw-Hill, London 1971

**Cylinder-symmetrical and Plane Problems.** — Cylinder-symmetrical and plane problems are analysed and systematized. A review has been given on the pertinent professional literature in connection with the definitions of the problems to be solved and the divergencies in them have been pointed out. By regarding the diverging definitions to be different problems, new types of state have been defined both in connection with the existence of cylindrical symmetry and with the inplane problems. A uniform system of definitions of the newly introduced problems, the equations which determine each state as well as the function classes of the solutions (which are valid in connection with the displacement components) have been established. It has been proved that the uniformly defined states differed merely by one single stress component in each of the cases from each other, and only in that conception can the plane stress pattern be traced back to the plane deformation state by the transformation of the moduli of elasticity.

**Über die zylindersymmetrischen und ebenen Aufgaben.** — In der Abhandlung sind die zylindersymmetrischen und ebenen Aufgaben analysiert und systematisiert. Eine Übersicht über die Fachliteratur im Zusammenhang mit den Definitionen der Aufgaben wurde vorgeführt, und auf die Abweichungen derselben hingewiesen. Zustände von neueren Typen wurden definiert, indem die abweichenden Definitionen als unterschiedliche Aufgaben betrachtet wurden, sowohl im Fall der Existenz der Zylindersymmetrie als auch im Zusammenhang mit den ebenen Aufgaben. Die einheitlichen Definitionen der neulich eingeführten Zustände, die diese letzere definierenden Gleichungen und die (für die Verschiebungskomponenten gültigen) Funktionklassen der Lösungen wurden gegeben. Es wurde nachgewiesen, daß die einheitlich definierten Zustände sich voneinander nur in gewissen Spannungskomponenten unterscheiden, und der ebene Spannungszustand nur in dieser Konzeption durch die Transformation des Elastizitätsmoduls auf den ebenen Verformungszustand zurückgeführt werden kann.