LAPLACE TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSA A RUGALMASSÁGTAN DINAMIKAI FELADATAINAK MEGOLDÁSÁRA

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. december 18-án]

E tanulmány *Laplace*-féle integráltranszformáción alapuló módszert ismertet a rugalmasságtan dinamikai feladatainak megoldására. A vizsgált problémákban a térfogati terhelés és a felületi terhelés időtől való függése megegyezik.

1. Bevezetés

Kis alakváltozásokat és elmozdulásokat feltételezve, a homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagú kontinuumok dinamikai problémái a következő egyenletek által kijelölt kerületérték feladattal hozhatók kapcsolatba ([1], [2]):

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \frac{\varrho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{\mathbf{q}}{G} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in V, \quad \infty > t > 0; \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in\partial V_u, \quad \infty > t > 0; \tag{2}$$

$$2G\left[\mathbf{u}(\mathbf{n}\cdot\nabla) + \frac{1}{2}\mathbf{n}x(\nabla x\mathbf{u}) + \frac{\nu\nabla\cdot\mathbf{u}}{1-2\nu}\mathbf{n}\right] = \mathbf{p} \quad \mathbf{r}\in\partial V_p, \quad \infty > t > 0; \tag{3}$$

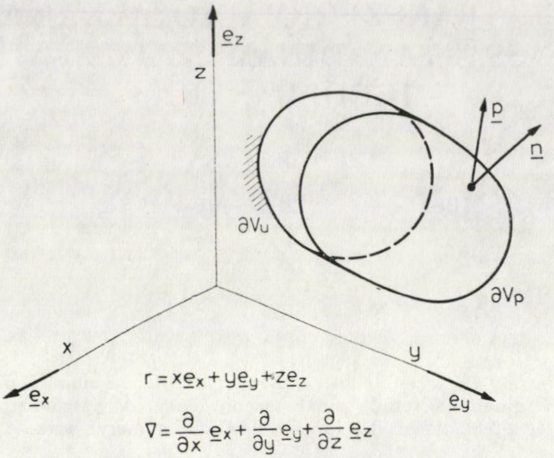
$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}\in V; \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}\in V; \qquad (\partial V = \partial V_n + \partial V_p). \tag{5}$$

A fenti egyenletekben a következő jelöléseket alkalmaztuk (1. ábra):

$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ helyvektor,
x, y, z derékszögű koordináták,
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ egységvektorok,
t idő,
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$ Hamilton-féle differenciáloperátor,

* Dr. Ecsedi István, H-3531 Miskolc, Vászonfehérítő u. 24. IV. 1.



1. ábra. **Lineárisan rugalmas anyagú test**

„ · ”	skaláris szorzás jele,
„x”	vektorális szorzás jele,
$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	Laplace-féle differenciáloperátor,
ν	*Poisson szám,*
G	csúsztató rugalmassági modulus,
$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$	térfogati terhelés,
$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$	felületi terhelés,
$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	elmozdulás vektor,
$\varrho = \varrho(\mathbf{r})$	sűrűség
V	a rugalmas test által meghatározott térbeli tartomány
$\partial V = \partial V_u + \partial V_p$	a V tartomány határoló felülete,
$\mathbf{n}$	a ∂V_p felületszakasz P pontbeli normális egységvektora.

A tanulmány fejtegetései olyan esetre vonatkoznak, amelyben a térfogati és felületi terhelés időtől való függése

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = f(t)\mathbf{q}_0(\mathbf{r}), \tag{6}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = f(t)\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) \tag{7}$$

alakú. A két terhelés idő tényezője megegyezik.

2. Laplace transzformáció alkalmazása

Jelölje a Laplace transzformáció változóját s. Az (1), (2), ... (5) egyenletek Laplace transzformáltját véve az időváltozó szerint az alábbi egyenleteket nyerjük:

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla\nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{\varrho s}{G}\mathbf{a} + \frac{\varrho}{G}\mathbf{b} + \frac{F(s)}{G}\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in V, \tag{8}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, s) = 0 \; \mathbf{r} \in \partial V_u, \tag{9}$$

$$2G\left[\mathbf{U}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}\mathbf{n}x(\nabla x\mathbf{U}) + \frac{\nabla \cdot \mathbf{U}}{1-2\nu}\mathbf{n}\right] = F(s)\mathbf{p}_0 \; \mathbf{r} \in \partial V_p. \tag{10}$$

A felírt egyenletekben

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, s) = \int_0^\infty \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)e^{-st}\,dt, \tag{11}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt. \tag{12}$$

A (4), (5) egyenletek által előírt kezdeti feltételek a Laplace transzformáció végrehajtása után a (8) egyenletbe épültek be.

A (8), (9), (10) egyenletek által kijelölt kerületiérték feladat megoldásához néhány jól ismert alapvető összefüggést alkalmazzunk.

Tekintsük a

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_i + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{\alpha_i^2}{G}\varrho\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0} \; \mathbf{r} \in V, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in \partial V_u, \tag{14}$$

$$2G\left[\boldsymbol{\varphi}_i(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}\mathbf{n}x(\nabla x\boldsymbol{\varphi}_i) + \frac{\nu\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_i}{1-2\nu}\mathbf{n}\right] = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in \partial V_p \tag{15}$$

egyenletek által kijelölt sajátérték feladatot [4].

Bizonyított, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó saját függvények a $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ súlyfüggvény szerint ortogonálisak. Jelen tanulmányban feltesszük, hogy normáltak is a saját függvények, így fennáll a

$$\int_V \varrho\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j\,dV = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{16}$$

egyenlet.

Bármely a V tartomány felett értelmezett differenciálható $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{r})$ függvény a $\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{r})$ sajátfüggvények segítségével

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{r}) \tag{17}$$

alakban is megadható, ahol

$$h_i = \int_V \varrho\boldsymbol{\varphi}_i(r) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r})dV. \tag{18}$$

Az α_i^2 sajátértékekkel kapcsolatban megjegyzendő, hogy ezek valamenynyien pozitívok, és a végesben nem torlódó sorozatot alkotnak [4].

Legyen $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ a következő statikai probléma megoldása:

$$\Delta\mathbf{u}_0 + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{q}_0}{G} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in V, \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in\partial V_u, \tag{20}$$

$$2G\left[\mathbf{u}_0(\nabla\cdot\mathbf{n}) + \frac{1}{2}\mathbf{n}x(\nabla x\mathbf{u}_0) + \frac{\nu\nabla\cdot\mathbf{u}_0}{1-2\nu}\mathbf{n}\right] = \mathbf{p}_0 \quad \mathbf{r}\in\partial V_p. \tag{21}$$

A fenti eredményeket szem előtt tartva, a (8), (9), (10) egyenletek által kijelölt kerületiérték feladat megoldását

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, s) = F(s)\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{W}(\mathbf{r}, s) \tag{22}$$

alakban keressük.

A (22) alakú megoldás és a (8), (9), (10) egyenletek kombinálásával nyerjük az alábbi egyenleteket:

$$\Delta\mathbf{W} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{W} - \frac{\varrho s^2}{G}\mathbf{W} - \frac{\varrho s^2}{G}F(s)\mathbf{u}_0 + \frac{\varrho s}{G}\mathbf{a} + \frac{\varrho}{G}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in V, \tag{23}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, s) = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in\partial V_u, \tag{24}$$

$$2G\left[\mathbf{W}(\nabla\cdot\mathbf{n}) + \frac{1}{2}\mathbf{n}x(\nabla x\mathbf{W}) + \frac{\nabla\cdot\mathbf{W}}{1-2\nu}\mathbf{n}\right] = \mathbf{0} \quad \mathbf{r}\in\partial V_p. \tag{25}$$

A felírt kerületiérték feladat megoldását sajátfüggvények szerinti sorfejtés módszerével oldjuk meg, vagyis feltesszük, hogy

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, s) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i(s)}{\alpha_i^2 + s^2}\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{r}). \tag{26}$$

A (26) formulával előállított $\mathbf{W}(\mathbf{r}, s)$ kétváltozós függvény bármilyen $c_i = c_i(s)$ együttható rendszer esetében kielégíti a (24), (25) peremfeltételeket. A (23) differenciálegyenletbe helyettesítve, kapjuk a

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(s)\varrho\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{r}) = -\varrho s^2F(s)\,\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \varrho s\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \varrho\mathbf{b}(\mathbf{r}) \tag{27}$$

egyenletet. A (27) egyenletből a $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_j(\mathbf{r})$ sajátfüggvénnyel való átszorzás és integrálás után a $c_i(s)$ együtthatóra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$c_i(s) = a_i s + b_i - d_i s^2F(s), \tag{28}$$

ahol

$$a_i = \int_V \varrho \mathbf{a} \cdot \varphi_i dV, \tag{29}$$

$$b_i = \int_V \varrho \mathbf{b} \cdot \varphi_i dV, \tag{30}$$

$$d_i = \int_V \varrho \mathbf{u}_0 \cdot \varphi_i dV. \tag{31}$$

A (22), (26), (28) egyenletek kombinálásával a következő eredményre jutunk:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{a_i s}{\alpha_i^2 + s^2} + \frac{b_i}{\alpha_i^2 + s^2} + d_i \frac{\alpha_i^2 F(s)}{\alpha_i^2 + s^2} \right] \varphi_i(\mathbf{r}) . \tag{32}$$

A Laplace-féle integrál transzformáció jól ismert összefüggéseit alkalmazva az (1), (2), ... (5) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldását

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos \alpha_i t + \frac{b_i}{\alpha_i} \sin \alpha_i t \right) \varphi_i(\mathbf{r}) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i \left(\int_0^t f(\tau) \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau \right) (\varphi_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{33}$$

alakban tudjuk megadni.

3. Egy alkalmazás

Következőkben hirtelen terhelés hatását vizsgáljuk. Legyen ennek megfelelően

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \qquad t < 0 , \\ f(t) &= 1 \qquad t \geq 0 . \end{aligned} \tag{34}$$

Legyen továbbá a $t = 0$ időpillanatban a vizsgált rugalmas test nyugalomban, vagyis legyen

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} , \qquad \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} . \tag{35}$$

A (33) formula alkalmazásával a

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cos \alpha_i t \varphi_i(\mathbf{r}) . \tag{36}$$

képletet írhatjuk.

A (36) egyenletből következik, hogy

$$| \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) | \leq | \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) | + \sum_{i=1}^{\infty} | d_i \varphi_i(\mathbf{r}) | = 2 | \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) | . \tag{37}$$

A (37) egyenlőtlenségi relációból igen fontos eredmény olvasható ki: a hirtelen terhelés hatására kialakult elmozdulás vektor nagysága a rugalmas test egyetlen pontjában sem haladhatja meg az ugyanazon terhelés statikus felvitele által okozott elmozdulás vektor abszolút értékének kétszeresét.

Megjegyzendő, hogy egyszabadságfokú mechanikai rendszernél a kitérés bizonyos időpillanatokban el is éri a statikus terheléshez tartozó kitérés kétszeresét [3].

IRODALOM

1. Купразде В. Г.: Трехмерые задачи математической теории упвугосим и термоупруггости. *Изд. Наука.* Москра, 1976. стр 313–345.
2. NOWACKI, W.: Теория упругости- *Изд.* Москва, Мир. 1975. стр 549—554.
3. PONOMARJOV, Sz. D.: Szilárdsági számítások a Gépészetben. 6. kötet. Rezgések. Ütések Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, 20—21. old.
4. GURTIN, M. E.: The Linear Theory of Elasticity. In: Handbuch der Physik. Vol. IVa/2. Springer, Berlin—Heidelberg—New York. 1972, p. 261—273.

Applying the Laplace Transformation to the Solution of the Dynamic Problems of the Theory of Elasticity. — A method based on the Laplace integral transformation is presented for the solution of the dynamic problems of the theory of elasticity. In the case of the example considered the time dependence of the volumic load and the surface load is of the same pattern.

Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung der dynamischen Aufgaben der Elastizitätslehre. — Eine auf der Laplaceschen Integraltransformation basierende Methode wird zur Lösung der dynamischen Probleme der Elastizitätslehre vorgeführt. Beim betrachteten Beispiel stimmen die Zeitabhängigkeit der Raumbelastung und der Flächenbelastung miteinander überein.