SZILÁRD SZEMCSE MOZGÁSTÖRVÉNYE CENTRIFUGÁLIS ERŐTÉRBEN A NEWTON-FÉLE KÖZEGELLENÁLLÁS ESETÉBEN

NIKODÉMUSZ ANTAL*
és
PETHŐ SZILVESZTER**
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1980. szeptember 12-én]

A tanulmányban a centrifugális erőtérben a foronómiai függvények zárt formában találhatók meg a Newton-féle közegellenállás érvényessége esetében. A zárt formában levezetett függvények közelítő jellegűek. A függvények alkalmazását számpélda magyarázza.

1. A szilárd szemcse foronómiai függvényei

Mivel a centrifugák igen nagy fordulatszámmal működnek, ezért már a 10—100 μm-es szemek is az ω szögsebesség nagyságától függően nagyon rövid idő alatt elérik azt a sebességet, amelynél már a Newton-féle közegellenállás érvényes. Ebben az esetben az 1. ábra értelmében az x nagyságú, m tömegű, v sebességű és δ sűrűségű szilárd szemcse mozgásának differenciálegyenlete az ω szögsebességű és γ sűrűségű közegben [1]

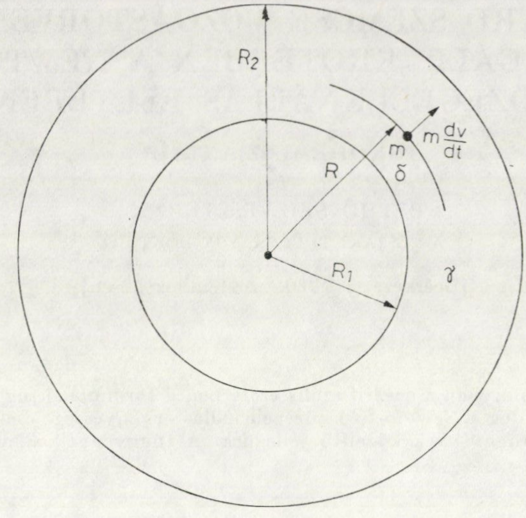
$$m \frac{dv}{dt} = m R\omega^2 \frac{\delta - \gamma}{\delta} - kx^2v^2; \quad R_1 \leq R \leq R_2 . \tag{1}$$

Az egyenletben az R sugár a szilárd szemcse pillanatnyi helyzetét rögzíti, így a centrifugális gyorsulás $R\omega^2$. A centrifúga belső sugara R_1, a külső sugár pedig R_2. k a c közegellenállási tényezővel arányos állandót jelent. Gömbalakú szemcse esetében

$$k = \frac{\pi c \gamma}{8g} . \tag{2}$$

A differenciálegyenlet bal oldalán a gyorsító erő, jobb oldalán a centrifugális és felhajtó erő különbsége, továbbá negatív előjellel a közegellenállás szerepel.

* Dr. Nikodémusz Antal, NME Matematikai Intézet, Miskolc Egyetemváros.
** Dr. Pethő Szilveszter, NME Ásványelőkészítési Tanszék Miskolc, Egyetemváros.



1. ábra

A megoldás érdekében az egyenletet $dR/dt = v$ figyelembevételével célszerű differenciálni, valamint az m-mel (gömb esetén $m = x^3\pi\delta/(6g)$-vel) való osztást elvégezni [1]:

$$v'' = \omega^2 \frac{\delta - \gamma}{\delta} v - 2 \frac{kx^2}{m} v\, v'. \tag{3}$$

Az állandókat összevonva

$$B = \omega^2 \frac{\delta - \gamma}{\delta} \tag{4}$$

és

$$A = 2 \frac{kx^2}{m}, \tag{5}$$

ill. gömbalakú szem esetében

$$A = \frac{3c\gamma}{2x\delta}. \tag{6}$$

Ezek figyelembevételével a differenciálegyenlet

$$v'' + Av\, v' - Bv = 0 \tag{7}$$

alakot ölt fel. Ezt a másodrendű differeneiálegyenletet új változó bevezetésével oldjuk meg.

Mivel v'' a $v' = a$ gyorsulás differenciálhányadosa, ezért

$$v'' = \frac{da}{dt} = \frac{da}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{da}{dv}a\,. \tag{8}$$

Ennek behelyettesítésével az előbbi, a (7) differenciálegyenlet elsőrendűvé alakítható és a változók is szétválaszthatók:

$$\int \frac{a\,da}{B - Aa} = \int v\,dv\,. \tag{9}$$

A megoldás

$$v^2 = K - 2\frac{a}{A} - \frac{2B}{A^2}\ln|B - Aa|\,. \tag{10}$$

$t = 0$ esetében a v sebesség 0 és az a kezdőgyorsulás R_1B, ezért a K integrálási állandó

$$K = 2\frac{B}{A}\left[R_1 + \frac{1}{A}\ln|B/((AR_1) - 1)|\right] \tag{11}$$

és

$$v^2 = \frac{2}{A}\left[(R_1B - a) + \frac{B}{A}\ln\left|\frac{B(AR_1 - 1)}{Aa - B}\right|\right]. \tag{12}$$

Ez az egyenlet a pillanatnyi sebesség és gyorsulás közötti kapcsolatot adja meg. A megtett út és a gyorsulás közötti összefüggés megkeresése érdekében az (1) differenciálegyenletet az állandók figyelembevételével

$$v' = a = BR - \frac{A}{2}v^2 \tag{13}$$

szerint célszerű átalakítani és azt (12)-be helyettesíteni.

A helyettesítés a következő alakban történik:

$$v^2 = \frac{2}{A}\left(BR_1 - BR + \frac{A}{2}v^2 + \frac{B}{A}\ln\left|\frac{AR_1 - 1}{\frac{A}{B}a - 1}\right|\right) \tag{14}$$

Ezután az egyenlet jobb oldalán a 2/A-vel való szorzást elvégezve, v^2-tel egyszerűsíteni lehet. Végül a gyorsulás függvényében az $R - R_1 = s$ út nagysága a következő lesz:

$$R - R_1 = s = \frac{1}{A}\ln\frac{B(AR_1 - 1)}{Aa - B}. \tag{15}$$

A gyorsulás és az idő közötti kapcsolat megkeresése a (10) egyenlet differenciálásával történik:

$$v\,dv = \left[-\frac{1}{A} + \frac{B}{A(B-Aa)}\right] da\,, \tag{16}$$

és

$$va\,dt = \frac{a}{B-Aa}\,da\,. \tag{17}$$

Majd a változók szétválasztásával

$$dt = \frac{da}{v\,(B-Aa)}\,. \tag{18}$$

Ide a (12) alatti v sebességet behelyettesítve

$$dt = \frac{da}{(B-Aa)\left[\frac{2}{A}(R_1B-a) - \frac{2B}{A^2}\ln\left|\frac{Aa-B}{B(AR_1-1)}\right|\right]^{1/2}} \tag{19}$$

E differenciálegyenlet megoldása érdekében a pillanatnyi gyorsulást célszerű az R_1B kezdőgyorsulás segítségével a következőképpen megadni:

$$a = R_1B + h\,. \tag{20}$$

(Az egyenletben h negatív számot jelent.) A behelyettesítést csak az ln-es tagban célszerű elvégezni:

$$\ln\left|\frac{Aa-B}{B(AR_1-1)}\right| = \ln\left|1+\frac{Ah}{B(AR_1-1)}\right|. \tag{21}$$

Az utóbbi függvényt sorbafejtve

$$\ln\left|1+\frac{Ah}{B(AR_1-1)}\right| = \frac{Ah}{B(AR_1-1)} - \frac{1}{2}\left[\frac{Ah}{B(AR_1-1)}\right]^2 + \ldots \tag{22}$$

Csak az első tagot véve figyelembe a (18) differenciálegyenletet alakja

$$\int_0^t dt \approx \int_{R_1B}^{a} \frac{da}{(B-Aa)\left[\frac{2R_1(R_1B-a)}{AR_1-1}\right]^{1/2}}\,. \tag{23}$$

A megoldás érdekében vezessük be az u változót a következőképpen:

$$u^2 = \frac{2R_1}{AR_1 - 1}(R_1B - a). \tag{24}$$

Az új változó bevezetésével a differenciálegyenlet

$$t = \frac{1}{R_1}\int \frac{du}{B - \frac{A}{2R_1}u^2} \tag{25}$$

szerint alakítható át. A differenciálegyenlet az

$$\int \frac{du}{C - Du^2} = \frac{1}{2\sqrt{CD}} \ln\left|\frac{\sqrt{CD} + Du}{\sqrt{CD} - Du}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{CD}} \operatorname{Ar\,tanh}\sqrt{\frac{D}{C}}\,u, \text{ ha } CD > 0$$

integrálási képlet segítségével oldható meg. C és D állandókat jelentenek és a képlet alkalmazásának feltétele $CD = AB/(2R_1) > 0$, teljesül. A megoldás

$$t = \sqrt{\frac{2}{ABR_1}}\left[\operatorname{Ar\,tanh}\sqrt{\frac{A(R_1B - a)}{B(AR_1 - 1)}}\right]_{R_1B}^{a} = \sqrt{\frac{2}{ABR_1}} \operatorname{Ar\,tanh}\sqrt{\frac{A(R_1B - a)}{B(AR_1 - 1)}} \tag{26}$$

Ebből az egyenletből az a gyorsulás a t idő függvényében:

$$a = BR_1 - \frac{B}{A}(AR_1 - 1)\tanh^2\sqrt{\frac{1}{2}ABR_1}t. \tag{27}$$

Ennek felhasználásával (12) és (15) figyelembevételével a v sebesség és az s út idő függvényében szintén kifejezhető:

$$v^2 = \frac{2B}{A^2}\left[(AR_1 - 1)\tanh^2\sqrt{\frac{1}{2}ABR_1}t + \ln\cosh^2\sqrt{\frac{1}{2}ABR_1}\,t\right], \tag{28}$$

és

$$s = R - R_1 = \frac{1}{A}\ln\cosh^2\sqrt{\frac{1}{2}ABR_1}t. \tag{29}$$

2. A foronómiai függvények elemzése

A (12) egyenlet a következőképpen alakítható át: ([1]):

$$a = \frac{B}{A}\{1 + (AR_1 - 1)\exp[-A(R - R_1)]\}. \tag{30}$$

Ebből az egyenletből következik, hogy néhány cm megtétele után a szemcse gyakorlatilag állandó gyorsulású lesz, mivel $A > 1$. Ez az állandó gyorsulás [1]

$$a = \frac{B}{A}. \tag{31}$$

Ugyanez gömbalakú szemcse esetében (4) és (6) felhasználásával úgy alakul:

$$a = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 v_0^2}{g}. \tag{32}$$

Itt v_0 süllyedési végsebességet jelent;

$$v_0 = \sqrt{\frac{4g}{3c}}\sqrt{\frac{x(\delta - \gamma)}{\gamma}}. \tag{33}$$

Ez a állandó gyorsulás a közelítő jellegű (27) függvény segítségével is bizonyítható. Ugyanis $\tanh^2/(0{,}5\, ABR_1)^{1/2}\, t$ értéke ezred, esetleg század másodperc elteltével gyakorlatilag 1. Ugyanez a függvény $t = 0$-nál a BR_1 kezdőgyorsulást adja.

A (22) sorbafejtéssel, illetve a (23) egyenlettel megadott közelítés $/H/$ hibája

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{A(R_1 B - a)}{B(AR_1 - 1)}\right]^2, \tag{34}$$

mivel csak a sorbafejtés első tagját vettük figyelembe.

3. Gyakorlati alkalmazás

A foronómiai függvényekkel való számolást $x = 0{,}02$ cm, $\delta = 7{,}5$ g/cm^3 sűrűségű szemcsével végeztük el. A centrifúga belső sugara $R_1 = 50$ cm, ω szögsebessége $100/s$, a közeg víz, tehát $\gamma = $ g/cm^3. Az A és B állandók értékei 4,5 és 2666,$\dot{6}$, a kezdőgyorsulás nagysága $R_1 B = 4{,}3 \cdot 10^5$ cm/s^2, a B/A állandó gyorsulásé 1925,925 cm/s^2.

Ezekkel az adatokkal a (22) sorbafejtés, ill. a (23) közelítés jóságát számszerűleg is ellenőriztük. Az 1. táblázatban a pontos értéket adó (19) sorszámú

$$(B - Aa)^{-1}\left[\frac{2}{A}(R_1 B - a) - \frac{2B}{A^2}\ln\left|\frac{Aa - B}{B(AR_1 - 1)}\right|\right]^{-1/2}, \tag{35}$$

1. táblázat

(19) sorszámú függvénynek és közelítő függvényeinek néhány számszerű értéke különböző gyorsulások esetében

a	$(B-Aa)^{-1}\left[\frac{A}{2}(R_1B-a)-\frac{2B}{A^2}\ln\left\|\frac{Aa-B}{B(AR_1-1)}\right\|\right]^{-\frac{1}{2}}$	$(B-Aa)^{-1}\left[\frac{2R_1}{AR_1-1}(R_1B-a)\right]^{-\frac{1}{2}}$	$(B-Aa)^{-1}\left[\frac{2R_1}{AR_1-1}(R_1B-a)+\frac{1}{B}\left(\frac{R_1B-a}{AR_1-1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$
R_1B	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\frac{3}{4}R_1B$	$-0{,}31267\cdot10^{-8}$	$-0{,}31277\cdot10^{-8}$	$-0{,}31269\cdot10^{-8}$
$\frac{1}{4}R_1B$	$-0{,}54723\cdot10^{-8}$	$-0{,}54827\cdot10^{-8}$	$-0{,}54722\cdot10^{-8}$
$\frac{1}{16}R_1B$	$-2{,}06511\cdot10^{-8}$	$-2{,}07419\cdot10^{-8}$	$-2{,}07202\cdot10^{-8}$
$8\,B/A$	$-3{,}79447\cdot10^{-8}$	$-3{,}81614\cdot10^{-8}$	$-3{,}81204\cdot10^{-8}$
$2\,B/A$	$-26{,}09518\cdot10^{-8}$	$-26{,}35116\cdot10^{-8}$	$-26{,}32206\cdot10^{-8}$
$3\,B/(2A)$	$-52{,}05457\cdot10^{-8}$	$-52{,}64333\cdot10^{-8}$	$-52{,}58507\cdot10^{-8}$
B/A	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

valamint az ennek közelítésére alkalmazott

$$(B-Aa)^{-1}\left[\frac{2R_1}{AR_1-1}(R_1B-a)\right]^{-1/2} \tag{36}$$

(23) sorszámú függvény, továbbá a

$$(B-Aa)^{-1}\left[\frac{2R_1}{AR_1-1}(R_1B-a)+\frac{1}{B}\left(\frac{R_1B-a}{AR_1-1}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{37}$$

egyenlet számszerű értékei találhatók meg $a=R_1B$ és ennek tört részei továbbá $a=B/A$ és ennél nagyobb gyorsulások esetében. Az utóbbi (37) egyenlet akkor érvényes, ha a (22) sorbafejtés első két tagját hagyjuk meg.

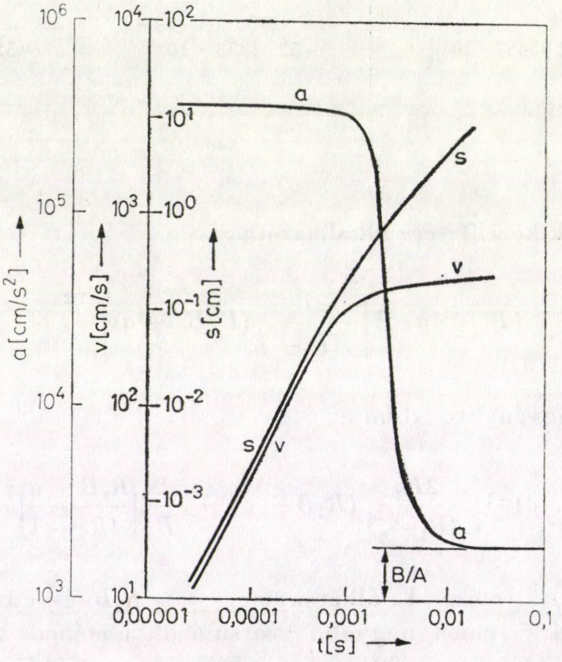
$a=R_1B$ és $a=B/A$ esetében mindhárom függvény számszerű értéke $-\infty$. R_1B törtrészeivel való számolás esetében a (35) és (36) között a különbség igen kicsiny. A két függvény számszerű értékében a legnagyobb különbség a $=3B/2A$-nál mutatkozik és ekkor a (37) függvény sem ad lényegesen jobb közelítést.

2. táblázat

Foronómiai függvények számszerű értékei

Idő t, sec	Gyorsulás a, cm/sec^2	Sebesség v, cm/sec	Út s, cm
0,00003	432954,99	12,9962	0,0001950
0,0001	429154,30	43,1935	0,002163
0,0003	397586,61	126,3387	0,01922
0,001	186598,56	332,2441	0,1885
0,003	6514,1037	439,9848	1,0097
0,01	1925,9305	455,4712	4,0805
0,03	1925,9259	491,1843	12,858

A 2. táblázatban az első oszlopban megadott időknél a gyorsulás, a sebesség és a megtett út számszerű értékeit lehet megtalálni. Kb. $t = 0{,}01$ s idő elteltével a gyorsulás $a = B/A$-val állandó. A 2. ábrán a táblázat értékeivel megrajzolt foronómiai függvények találhatók meg.



2. ábra

IRODALOM

[1] PETHŐ Sz.: Szilárd szemcsék mozgástörvényei centrifugális erőtérben. Megjelenés alatt az *Acta Technicá*-ban.

Law of Motion of Particles in a Centrifugal Field in Case of Newtonian Medium-resistance. — In the paper the phoronomic functions of the centrifugal field of closed form are treated in case of the Newtonian medium-resistance. The functions deduced in closed form are of approximate character. The application in practice of the functions is demonstrated by a numerical example.

Bewegungsgesetz der festen Partikeln im zentrifugalen Kraftfeld im Fall der Newtonschen Strömungswiderstand. — In der Abhandlung sind die phoronomischen Funktionen des zentrifugalen Kraftfelds für den Fall der Gültigkeit des Strömungswiderstands in einer geschlossenen Form angegeben. Die in geschlossener Form abgeleiteten Funktionen sind nur Näherungslösungen. Die Anwendung dieser Funktionen ist durch ein numerisches Beispiel demonstriert.