KIEGÉSZÍTÉSEK A TREFFTZ—FICHERA MÓDSZER REZGÉSPROBLÉMÁKRA TÖRTÉNŐ ALKALMAZÁSÁHOZ

TÓTH GYÖRGY*

[Beérkezett: 1980. december 20-án]

Ismeretes, hogy a Trefftz—Fichera módszer hatékony eszköz szigorúan pozitív, lineáris integráloperátorokkal leírható kontinuumrezgési sajátértékfeladat sajátértékeinek javítható becslésére. Legutóbb is bemutatásra került ezen módszer alkalmazása változó keresztmetszetű rúd hajlítórezgési sajátfrekvenciáinak megközelítésére. A műszaki gyakorlat sok esetében nem lehetséges a szigorú pozitivitás betartása. Ez szemléletesen szólva azt jelenti, hogy a kényszer — illetve peremfeltételek ún. merevtest-szerű mozgást is lehetővé tesznek. Ez az eset áll fenn például repülő objektumokkal, vagy bizonyos mechanizmusokkal kapcsolatban. A fent említett módszer megfelelő kiegészítéssel azonban ilyenkor is alkalmazható. A megoldás kulcsát a feladathoz rendelhető ún. általánosított Green-függvény előállítása jelenti. Jelen dolgozat egydimenziós feladat kapcsán mutatja be a megoldás menetét.

Bevezetés

A tanulmánynak az a célja, hogy választ adjon a címben szereplő módszer alkalmazása során felmerülő, a műszaki gyakorlatban eddig alig érintett kérdésekre, és ezzel bővítse a felhasználás területét.

A kontinuumnak modellezett rúd rezgései ismert egyszerűsítő feltételezések mellett (lásd pl. [7]) lineáris differenciáloperátorhoz rendelt peremértékprobléma alakjában fogalmazhatók meg. Sok esetben a feladat olyan, hogy sajátértékei számára a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel felső korlátok számíthatók.

Számos esetben lehetőségünk van a peremértékproblémát a differenciáloperátor inverzének megszerkesztése útján integráloperátorhoz rendelt olyan peremértékproblémára visszavezetni, amelynek megoldásai és sajátértékei a kiindulóéval *közösek.*

Ha az így nyert integráloperátor valós, szimmetrikus magú, pozitív szemidefinit és teljesen folytonos operátor, akkor a sajátértékeihez a Trefftz—Fichera eljárás segítségével — felhasználva az ismert felső korlátokat — alsó korlátokat számíthatunk. A felső korlátokat javítva az így nyert alsó korlátok javulnak.

* Tóth György 1016 Budapest, Gellérthegy u. 20—22.

A Trefftz—Fichera módszer alkalmazásának egyik akadályát az jelenti, hogy a differenciáloperátor inverzét gyakran nem lehet explicit módon előállítani.

A kontinuum rúdrezgésekkel kapcsolatban a [2] tanulmány ismertette speciális szigorúan pozitív operátorok esetében ennek a problémának megoldását. Jelen dolgozat célja, hogy a megoldást pozitív szemidefinit operátorok esetére is bemutassa.

Szemidefinit operátorok Green-függvényei

Tegyük fel, hogy a vizsgált kontinuus rúdmodell rezgéseit a

$$D\, v(x) = \beta(x) \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

alakú differenciál egyenlet írja le a hozzá rendelt peremfeltételi rendszerrel együtt. D legyen lineáris, s az adott peremfeltételek esetén önadjungált differenciáloperátor. Az (1) probléma v megoldásai és β legyenek a valós L^2 térben értelmezve és legyenek elegendően sokszor differenciálhatók.

Tételezzük fel, hogy előállítható D inverze, továbbá, hogy az inverz ismeretében

$$D\, D^{-1}\, v(x) = v(x) = \int_0^1 G(x, t)\, v(t)\, dt$$

alapján (1)-et a

$$\mathcal{K} v = \int_0^1 G(x, t)\, \beta\,(t)\, dt \tag{2}$$

integráloperátorhoz rendelt feladatra vezetjük vissza, mégpedig úgy, hogy a megoldások és a peremfeltételek, valamint az operátor értelmezési tartománya ne változzék.

Ha a D operátor önadjungált, akkor magfüggvénye szimmetrikus [3], vagy transzformáció útján azzá tehető [2]. Így, ha $\mathcal{K}$ valós, szimmetrikus és teljesen folytonos, akkor a hozzá rendelt (2) probléma sajátértékeinek alulról történő közelítésére használhatjuk a Trefftz—Fichera eljárást.

A vizsgálandó rúdrezgések esetében

$$\beta(x) = \alpha^2 q(x)\, v(x) + g(x)$$

alakú, ahol α a rezgés körfrekvenciáit, $v(x)$ az amplitudó eloszlás függvényét, $q(x) > 0$ a sűrűség eloszlás függvényét, $g(x)$ pedig az α körfrekvenciájú színuszos gerjesztés amplitudó eloszlás függvényét jelöli. A gerjesztetlen ($g(x) = 0$) esetben $\lambda = \alpha^2$ az (1), illetve (2) probléma sajátértéke.

A (2) integráloperátor magfüggvénye ekkor a

$$\mathcal{K}v = \int_0^1 K(x, t)\, v(t)\, dt$$

alapján

$$K(x, t) = q(t)\, G(x, t)\,,$$

ahol $G(x, t)$ a permfeltételekkel együtt értelmezett D operátor inverzének a magfüggvénye, szokásosabb elnevezés szerint a D-hez rendelt Green függvény. A most tárgyalandó szemidefinit esetet az jellemzi, hogy a $\lambda = 0$ is sajátértéke az (1) problémának, vagyis a $D\, v(x) \equiv 0$ *homogén egyenletnek* van nem azonosan zérus $v^i(x)$ megoldása (fizikailag lehetséges a merevtestszerű mozgás). Ekkor (1)-nek általában nincs megoldása, és sem a szokásos értelemben vett Green-függvény, sem az inverz operátor nem létezik. Lehetőség van azonban az ún. általánosított Green-függvény meghatározására és alkalmazására az alábbiak szerint. Az (1) feladat megoldásainak teljes ortonormált függvény rendszere által adott teret a homogén egyenlet megoldásaira ortogonális altérre szűkítve (ezt a továbbiakban sajáttérnek nevezzük) lehetséges az új értelmezési tartományon működő D operátor inverzének megszerkesztése. E szemidefinit esetben az ún. Fredholm-féle alternatíva tétel [1] alapján (1) megoldásának egzisztenciáját az

$$\int_0^1 \beta(x)\, v^i(x)\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3}$$

kompatibilitási egyenlettel megkötött β esetére biztosíthatjuk. A megoldás unicitását a

$$\int_0^1 v(x)\, v^i(x)\, dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{4}$$

egyenletekkel biztosítjuk. r a $\lambda = 0$ sajátérték multiplicitása.

A (3), (4) megkötések betartása esetén az általánosított Green-függvényt [1] alapján a

$$D\, G(x, t) = \delta(x - t) - \sum_{i=1}^{r} \varrho_i v^i(x) \tag{5}$$

egyenlet definiálja. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a $v_i(x)$-ek ortonormáltak, azaz:

$$\int_0^1 v^i(x)\, v^k(x)\, dx = \delta_{ik}\,,$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-delta; az (5)-ben szereplő $\delta(x\text{-}t)$ a Dirac-féle disztribució. A ϱ_i-ket meghatározhatjuk, ha (5)-öt a $D\, G(x, t) = \tilde{\beta}(x, t)$ alakba írjuk és [3] alapján előírjuk a $G(x, t)$-re nézve az (1)-hez tartozó változatlan peremfeltételeket. Ekkor a (4) kompatibilitási feltételek szerint

$$\int_0^1 \beta(x, t)\, v^k(x)\, dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

azaz

$$\int_0^1 \left[\delta(x - t)\, v^k(x) - \sum_{i=1}^{r} \varrho_i v^i(x)\, v^k(x)\right] dx = 0\,.$$

Innen a

$$\varrho_k = \int_0^1 \delta(x - t)\, v^k(x)\, dx = v^k(t)$$

egyenletet nyerjük. Ezek után az (5) egyenlet végleges alakja a

$$D\, G(x, t) = \delta(x - t) - \sum_{i=1}^{r} v^i(x)\, v^i(t) \tag{6}$$

differenciál egyenlet. Ha D önadjungált, akkor Green-függvénye szimmetrikus, azaz $G(x, t) = G(t, x)$. A $\mathcal{K}$ operátor említett tulajdonságai miatt a Hilbert—Schmidt-féle sorfejtés értelmében a

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} v_i(x)\, v_i(t) \tag{7}$$

végtelen sor, (tekintve, hogy a sajáttérre korlátozott D operátor és a hozzárendelt $\mathcal{K}$ operátor pozitív definit, így érvényes Mercer tétele [8]) egyenletesen konvergens.

Feltételezve, hogy a v_i-k ortonormáltak, a [2] szerinti

$$\mathfrak{I}_1(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \int_0^1 K(x, x)\, dx$$

kifejezés ([5] alapján a $\mathcal{K}$ operátor ortogonális invariánsa) felhasználásával juthatunk a Trefftz—Fichera-féle formulához [2], amely a λ sajátértékek közvetlen becslését teszi lehetővé. [1] alapján lehetőségünk van arra is, hogy nem β-t kötjük meg a feladat megoldhatósága érdekében, hanem D-t változtatjuk meg D^*-á az alábbiak szerint:

$$D^*\, v(x) = D\, v(x) + \varepsilon\, v(x) = \beta(x)\,. \tag{8}$$

Itt ε tetszőlegesen kicsiny valós szám. Ez a D^* már a teljes L^2 téren értelmezhető, és ennek megszerkeszthető a közönséges értelemben vett Green-függvénye. Az új sajátérték probléma, gerjesztetlen rezgéseket vizsgálva:

$$D\, v(x) + \varepsilon\, v(x) = \lambda' q(x)\, v(x)\,.$$

Sajátfüggvényei (1)-ével azonosak, csupán a sajátértékei változnak: $\lambda_i' = \lambda_i + \varepsilon$. Mint látjuk, a $\lambda = 0$ sajátérték helyébe $\lambda = \varepsilon$ lép. (8)-hoz megszerkesztve a (2)-nek megfelelő integrál operátort, (7) új alakja

$$K^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x)\, v_i(t)}{\lambda_i + \varepsilon} + \sum_{j=1}^{r} \frac{v^j(x)\, v^j(t)}{\varepsilon} \tag{9}$$

lesz. A D^* operátor Green-függvényét definiáló egyenlet

$$D\, G^*(x, t) + \varepsilon\, G^*(x, t) = \delta(x - t)\,. \tag{10}$$

Igen érdekes, hogy (10) megoldása útján formálisan megkaphatjuk a D-hez tartozó általánosított Green-függvényt az alábbiak szerint. Ha (10)-et sikerül megoldani (ami változó együtthatós D-t feltételezve nehézségekbe ütközhet) és a kapott megoldásnak képezzük az v szerinti McLaurin-sorát, az minden esetben a következő alakú lesz:

$$G^*(x, t) = g_{-1}(x, t)\, \varepsilon^{-1} + g_0(x, t) + g_1(x, t)\, \varepsilon + \ldots\,.$$

A $g_0(x, t)$ függvény ekkor minden esetben (Lásd [1]) éppen az általánosított Green-függvény.

Alkalmazások

1. A [2]-ben részletesen tárgyalt változó keresztmetszetű rúd szabad hajlító rezgéseit a

$$D\, v(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left[p(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right] = \lambda\, q(x)\, v(x) \tag{11}$$

operátor egyenlet írja le. A $p(x)$ és $q(x)$ pozitív függvények a [0,1] intervallumon. Teljesen hasonlóan írhatók le például a rúddal modellezett vitorlázó repülőgép szárnyainak hajlító rezgései [4]; ekkor $p(x) = h^4(x)$ és $q(x) = h^2(x)$.

A $h(x)$ függvény a repülőgépszárny alakját megadó húrhossz függvény. Repülőgépszárny esetében a peremfeltételi rendszer:

$$v''(0) = v''(1) = v'''(0) = v'''(1) = 0\,,$$

ahol a vessző x szerinti deriválást jelent. Az így definiált szabad rúd végezhet merev test szerű mozgást is, hiszen nem szerepelnek geometriai megkötések a peremfeltételek között. Ez azt is jelenti, hogy a (11) egyenletnek a $\lambda = 0$ is sajátértéke. A $D\, v(x) = 0$ homogén egyenletnek megoldásai a

$$v^1(x) = 1 \text{ és a } v^2(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$$

ortonormált függvények. A (11) alatti D operátorhoz rendelt általánosított Green-függvényt jelen esetben célszerű (6) alapján meghatározni. A definiáló egyenlet tehát:

$$\big(p(x)\,G''(x,t)\big)'' = \delta(x-t) - 1 - 3\,(2x-1)(2t-1)\,.$$

Elegendően sokszor integrálva x szerint, az integrálást disztribúció értelemben általánosítva, tehát figyelembe véve a pl. [2]-ben összefoglalt disztribúció elméleti alapfogalmakat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x,t) &= H(x-t)\int_t^x\int_t^v \frac{(s-t)\,dsdv}{p(s)} + (1-2t)\int_0^x\int_0^v \frac{s^3dsdv}{p(s)} + \\ &\quad + (3t-2)\int_0^x\int_0^v \frac{s^2dsdv}{p(s)} + \alpha_1(t)\int_0^x\int_0^v \frac{sdsdv}{p(s)} + \\ &\quad + \alpha_2(t)\int_0^x\int_0^v \frac{dsdv}{p(s)} + \alpha_3(t)x + \alpha_4(t)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

A $H(x\text{-}t)$ itt a Heaviside-féle disztribúció, $\alpha_i(t)$-k pedig ismeretlen függvényei t-nek. A peremfeltételi rendszerből valamint [2]-ből következik, hogy

$$G''(0,t) = G''(1,t) = G'''(0,t) = G'''(1,t) = 0\,.$$

Közvetlenül adódik ezek után, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. A kompatibilitási feltételek (3), valamint (4) alapján:

$$\int_0^1 G(x,t)\,dx = 0\,, \tag{13}$$

$$\int_0^1 G(x,t)\,(2x-1)\,dx = 0\,. \tag{14}$$

Elvégezve az integrálást, az

$$A(t) + B(t) + C(t) + \frac{\alpha_3(t)}{2} + \alpha_4(t) = 0\,, \tag{15a}$$

$$D(t) + E(t) + F(t) + \frac{\alpha_3(t)}{6} = 0 \tag{15b}$$

egyenleteket nyerjük, ahol

$$A(t) = H(1-t)\int_t^1\int_t^z\int_t^v \frac{(s-t)\,ds\,dv\,dz}{p(s)}\,,$$

$$B(t) = (1 - 2t) \int_0^1 \int_0^z \int_0^v \frac{s^3\, ds\, dv\, dz}{p(s)},$$

$$C(t) = (3t - 2) \int_0^1 \int_0^z \int_0^v \frac{s^2\, ds\, dv\, dz}{p\,(s)},$$

$$D(t) = H(1 - t) \int_t^1 (2z - 1) \int_t^z \int_t^v \frac{(s - t)\, ds\, dv\, dz}{p\,(s)}, \tag{15c}$$

$$E(t) = (1 - 2t) \int_0^1 (2z - 1) \int_0^z \int_0^v \frac{s^3\, ds\, dv\, dz}{p(s)},$$

$$F(t) = (3t - 2) \int_0^1 (2z - 1) \int_0^z \int_0^v \frac{s^2\, ds\, dv\, dz}{p(s)}.$$

A (15a) és (15b) egyenletekből α_3 és α_4 meghatározható:

$$\alpha_3(t) = -6\big(D(t) + E(t) + F(t)\big),$$

$$\alpha_4(t) = 3\big(D(t) + E(t) + F(t)\big) - \big(A(t) + B(t) + C(t)\big).$$

A Trefftz—Fichera módszerben felhasználásra kerülő ortogonális invariáns:

$$\mathfrak{I}_1^1(\mathcal{K}) = \int_0^1 q(x)\, G(x, x)\, dx.$$

(12) alapján a $G(x, x)$ függvény explicit előállítása lehetséges az α_3 és α_4 ismeretében:

$$G(x, x) = (1 - 2x) \int_0^x \int_0^v \frac{s^3 ds\, dv}{p(s)} + (3x - 2) \int_0^x \int_0^v \frac{s^2 ds\, dv}{p(s)} +$$
$$+ \alpha_3(x)\, x + \alpha_4(x).$$

Megjegyezzük, hogy [1], illetve [3] alapján az általánosított Green-függvény szimmetrikus, azaz $G(x, t) = G(t, x)$.

2. Az általánosított Green-függvény megszerkesztése igen szemléletes a $p \equiv 1$ esetben, azaz állandó együtthatós differenciáloperátor esetén. A következőkben ezt az esetet vizsgáljuk részletesebben. A kiinduló egyenlet legyen:

$$v^{\mathrm{IV}}(x) = \beta(x).$$

A homogén egyenlet ortonormált megoldásai:

$$v^1(x) = 1, \quad v^2(x) = \sqrt{3}\,(2x - 1).$$

A Green-függvény megszerkesztéséhez szükséges kiinduló egyenlet

$$G^{IV}(x, t) = \delta(x - t) - 1 - 3\,(2x - 1)\,(2t - 1)\,,$$

ahonnan elegendően sokszor integrálva azt kapjuk, hogy

$$G(x, t) = H(x, t)\,\frac{(x - t)^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5 t}{10} + \frac{x^4 t}{4} + \frac{x^5}{20} +$$

$$+ \alpha_1 \frac{x^3}{6} + \alpha_2 \frac{x^2}{2} + \alpha_3 x + \alpha_4\,.$$

Ha a peremfeltételek

$$v''\,(0) = v''\,(1) = v'''\,(0) = v'''\,(1) = 0\,,$$

akkor a

$$G''\,(0, t) = 0 \quad \text{és} \quad G'''\,(0, t) = 0$$

egyenletekből $\alpha_1 = 0$ és $\alpha_2 = 0$ következik.

A kompatibilitási feltételek:

$$-\frac{(1 - t)^4}{24} - \frac{1}{40} + \frac{t}{30} + \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_4 = 0 \tag{16}$$

és a

$$-\frac{(1 - t)^5}{60} + \frac{(1 - t)^4}{24} - \frac{41}{2520} + \frac{9t}{420} + \frac{\alpha_3}{6} = 0\,. \tag{17}$$

(16) és (17) megoldásai pedig az

$$\alpha_3(t) = \frac{(1 - t)^5}{10} - \frac{(1 - t)^4}{4} - \frac{9t}{70} + \frac{41}{420}\,,$$

$$\alpha_4(t) = -\frac{(1 - t)^5}{20} + \frac{(1 - t)^4}{12} + \frac{13t}{420} - \frac{1}{42}$$

függvények. A szimmetria tulajdonság viszonylag könnyen eldönthető. Evégett hasonlítsuk össze a

$$\underset{x<t}{G}\,(x, t) = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^5 t}{10} + \frac{x^4 t}{4} + \frac{x^5}{20} + \frac{(1 - t)^5}{10}\,x -$$

$$-\frac{(1 - t)^4}{4}\,x - \frac{9tx}{70} + \frac{41}{420}\,x - \frac{(1 - t)^5}{20} + \frac{(1 - t)^4}{12} - \frac{1}{42} + \frac{13t}{420}\,,$$

valamint a

$$\underset{t>x}{G}(t, x) = \frac{(t-x)^3}{6} - \frac{t^4}{6} + \frac{t^5 x}{10} + \frac{t^4 x}{4} + \frac{t^5}{20} + \frac{(1-t)^5 t}{10} -$$

$$- \frac{(1-t)^4 t}{4} + \frac{41t}{420} - \frac{9xt}{70} - \frac{(1-x)^5}{20} + \frac{(1-x)^4}{12} - \frac{1}{42} + \frac{13x}{420}$$

függvényeket. Felbontva a zárójeles kifejezéseket, és az azonos tagokat összevonva, $G(x, t) = G(t, x)$ adódik. Az ortogonális invariánsra viszont az

$$\mathfrak{J}_1^1(D^{-1}) = \int_0^1 G(x, x)\, dx = \frac{1}{420}$$

értéket kapjuk. Tudjuk, hogy a

$$v^{\mathrm{IV}}(x) = \beta(x) = \lambda\, v(x)$$

egyenletnek a

$$v''(0) = v''(1) = v'''(0) = v'''(1) = 0 \tag{18}$$

és a

$$v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0 \tag{19}$$

peremfeltételeknek megfelelő megoldásai megegyeznek, és mindkét esetben azonosak a sajátértékek is, amennyiben a (18) esetben eltekintünk a kétszeres multiplicitású $\lambda = 0$ zérus sajátértéktől. Így kell, hogy a két feladat ortogonális invariánsa azonos legyen. A (19) feltételeknek eleget tevő Green-függvény [6] alapján:

$$G(x, t) = \frac{(x-t)^3}{6} H(x-t) + \frac{x^3}{6}\left(2(1-t)^3 - 3(1-t)^2\right) +$$

$$+ \frac{x^2}{2}\left((1-t)^2 - (1-t)^3\right).$$

Az ortogonális invariáns (19) esetben valóban megegyezik a (18) esetben az általánosított Green-függvény segítségével számolttal.

3. Kontinuus rudak torziós és longitudinális rezgéseit bizonyos egyszerűsítő feltételezésekkel a

$$-\left(p(x)\, v'(x)\right)' = \beta(x) \tag{20}$$

differenciálegyenlet írja le. Gőzturbina — generátor tengelyek torziós szabad lengéseihez hasonló egyenlet rendelhető, ilyenkor $p(x)$ a csavaró merevség pozitív függvénye, valamint a $\beta(x) = \lambda q(x)\, v(x)$-ben szereplő $q(x)$ a rúdkeresztmetszetnek a csavarás tengelyére vonatkozó másodrendű tehetetlenségi nyomaték eloszlás-függvénye. A peremfeltételek:

$$v'(0) = v'(1) = 0 \,.$$

A $-(pv')' = 0$ homogén egyenlet nem triviális megoldása $v = 1$. Segítségével a (6)-nak megfelelő egyenlet

$$-\big(p(x)G'(x, t)\big)' = \delta\,(x - t) - 1 \,.$$

Innen

$$G(x, t) = -\,H(x - t)\int_t^x \frac{ds}{p(s)} + \int_0^x \frac{s\,ds}{p(s)} + \alpha_1(t)\int_0^x \frac{ds}{p(s)} + \alpha_2(t)$$

adódik. A peremfeltételekből következő $G'(0,t) = G'(1,t) = 0$ egyenletek alapján $\alpha_1 = 0$. Az

$$\int_0^1 G(x, t)\,dx = 0$$

kompatibilitási egyenlet értelmében:

$$\alpha_2(t) = \int_t^1\int_t^y \frac{ds\,dy}{p(s)} - \int_0^1\int_0^y \frac{s\,ds\,dy}{p(s)} \,.$$

Bevezetve az

$$u(x) = \int_0^x \frac{ds}{p(s)}\,, \qquad v(x) = \int_0^x u(s)\,ds\,,$$

$$w(x) = \int_0^x \frac{s\,ds}{p(s)}\,, \qquad z(x) = \int_0^x w(s)\,ds$$

jelöléseket,

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t), & \text{ha} \quad x < t \\ G_2(x, t), & \text{ha} \quad x > t \end{cases} \tag{21}$$

alapján a

$$G_1(x, t) = w(x) + v(1) - v(t) - u(t)\,(1 - t) - z(1)\,,$$

$$G_2(x, t) = -u(x) + u(t) + w(x) + v(1) - v(t) - u(t)\,(1 - t) - z(1)$$

függvényeket nyerjük. Ha figyelembe vesszük a

$$w(x) = x\,u(x) - v(x)$$

egyenlőséget, (21) szimmetriája könnyen igazolható. A $G(x, t) = G(t, x)$ szimmetria igazolásához elegendő a

$$G_1(x, t) = w(x) + v(1) - v(t) - u(t)(1 - t) - z(1),$$

valamint a

$$G_2(t, x) = -u(t) + u(x) + w(t) + v(1) - v(x) - u(t)(1 - x) - z(1)$$

függvények összehasonlítása.

4. Tekintsük a (12) feladatot a $p = 1$ esetben. Ekkor az általánosított Green-függvény:

$$G(x, t) = (t - x) H(x - t) + \frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{3}. \tag{22}$$

Szerkesszük meg a teljes L^2 térre vonatkozó Green-függvényt a (12) operátor kis változtatásával. Az új operátor

$$D^* v(x) = D\, v(x) + \varepsilon\, v(x)$$

lesz. Fizikai értelmezés szerint ε hozzáadása a rezgő rúdhoz kapcsolódó igen lágy megoszló rugórendszerrel azonos. Green-függvényét a

$$-G^{*\prime\prime}(x, t) + \varepsilon\, G^*(x, t) = \delta(x - t)$$

egyenlet megoldásával nyerhetjük. Ismételt integrálásokkal nem lehetséges ez esetben a $G(x, t)$ explicit meghatározása. A Dirac-féle disztribúció tulajdonságait ismerve azonban a keresett megoldás a

$$G^*(x, t) = \begin{cases} G_1^*(x, t), & \text{ha} \quad x < t \\ G_2^*(x, t), & \text{ha} \quad x > t, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_1^*(x, t) &= A_1(t) \sinh \mu x + A_2 \cosh \mu x, \\ G_2^*(x, t) &= B_1(t) \sinh \mu x + B_2 \cosh \mu x \end{aligned} \qquad \mu = \sqrt{\varepsilon},$$

függvények alakjában kereshető, melyek kielégítik a

$$[G_2^*(x, t) - G_1^*(x, t)]_{x=t} = 0,$$

$$[G_2^{*\prime}(x, t) - G_1^{*\prime}(x, t)]_{x=t} = 1,$$

$$G_1^{*\prime}(0, t) = G_2^{*\prime}(1, t) = 0$$

feltételeket. A keresett A_1, A_2, B_1, B_2 függvényekre az

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = \frac{\cosh \mu t \cosh \mu}{\mu \sinh \mu} - \frac{\sinh \mu t}{\mu \sinh \mu},$$

$$B_1 = -\frac{\cosh \mu t}{\mu}, \quad B_2 = \frac{\cosh \mu t \cosh \mu}{\mu \sinh \mu}$$

adódik. Segítségükkel a

$$G_1^*(x, t) = \frac{\cosh \mu x \cosh \mu(t-1)}{\mu \sinh \mu}$$

$$G_2^*(x, t) = \frac{\cosh \mu t \cosh \mu(x-1)}{\mu \sinh \mu}$$

Green-függvényt kapjuk. μ szerint sorba fejtve például $G_1(x, t)$-t, a sorfejtésnél μ kicsiny voltából kiindulva a μ-ben magasabb rendű tagokat elhanyagolva, a

$$G_1(x, t) \approx \frac{\left(1 + \frac{\mu^2 x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\mu^2 (t-1)^2}{2}\right)}{\mu\left(\mu + \frac{\mu^3}{6}\right)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\mu^2 x^2}{2} + \frac{\mu^2 (t-1)^2}{2} + \frac{\mu^4 x^2 (t-1)^2}{4}}{\mu^2} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\varepsilon} + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(t-1)^2}{2}\right) + \varepsilon \frac{x^2 (t-1)^2}{4}$$

függvényre jutunk. A középső tag az általánosított Green-függvény, amely (22)-vel azonos eredményt ad $x < t$ esetében, ha biztosítjuk a kompatibilitási feltétel teljesülését egy additív konstans hozzáadásával.

IRODALOM

1. LÁNCZOS, C.: Linear Differential Operators, D. Van Nostrand Company Ltd., London 1961
2. RICHLIK Gy.—TÓTH Gy.: A Trefftz-Fichera módszer alkalmazása hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható behatárolására. *Műszaki Tudomány* **56** (1978), 131—142
3. ROACH, G. F.: Green Functions: Introductory Theory with Applications, Van Nostrand Reinhold Company, London 1970, 142—164
4. RUDNAI G.: Könnyűszerkezetek a jármű- és gépiparban. Tankönyvkiadó, Budapest 1976, 346—359

5. FICHERA, G.: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Math. 8. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1965
6. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlaggesellschaft Geest und Portig K.—G., Leipzig 1963, 452—453
7. BOSZNAY Á.: Változó keresztmetszetű, egyenes rudakból álló térbeli rúdszerkezet rezgési sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása. III. rész. *Műszaki Tudomány* 52 (1976), 207—213
8. RIESZ, F.—SZŐKEFALVI, N. B.: Lecons d'analyse fonctionelle, Akadémiai Kiadó, Budapest 1953, 242—244

Contribution to the Application of the Trefftz—Fichera-method to Vibration Problems. — It is familiar that the Trefftz—Fichera-method is an effective means to the improvable estimation of the strictly positive eigenvalues or eigenvalue problems of continuum vibration to be described with linear integral operations. Recently, [2] has shown the application of the method for approaching the eigenfrequencies of the flexural vibration of a bar of variable cross section. In the engineering practice the observance cf the strict positivity is in many cases not possible. This means, figuratively spoken, that the constraining, i. e., boundary conditions also permit a rigid-bodylike motion. This is the case, for example, in connection with flying objects or with certain mechanisms. The method mentioned can also in such cases be applied with suitable completions; the solution lies in producing Green's generalized function to be coordinated to the problem.

Ergänzungen zur Anwendung für Schwingungsprobleme der Methode Trefftz—Fichera. — Es ist bekannt, daß die Methode Trefftz— Fichera ein wirkungsvoller Mittel zur verbesserlichen Schätzung der streng positiven Eigenwerte der mit Linearoperatoren beschreiblichen Eigenwertprobleme des Kontinuumschwingungs ist. Neulich wurde die Anwendung der Methode durch eine Studie der einschlägigen Literatur zur Näherung der Eigenfrequenzen der Biegungsschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt demonstriert. In der Ingenieurpraxis ist die Einhaltung der strengen Positivität nicht möglich. Dies bedeutet, daß — bildhaft gesagt — die Zwangs-, bzw. Randbedingungen auch eine Starrkörperbewegung ermöglichen. Dies ist der Fall z. B. in Zusammenhang mit fliegenden Objekten, oder mit gewissen Mechanismen. Die erwähnte Methode kann auch in diesen Fällen angewandt werden; die Lösung liegt in der Herstellung der zur Aufgabe koordinierbaren sog. verallgemeinerten Greenschen Funktion.