

EGY TÉTEL AZ ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIÁVAL KAPCSOLATBAN

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. május 31]

A tanulmány tárgya egy egyenlőtlenségi reláció bizonyítása a lineárisan rugalmas anyagú test alakváltozási energiájával kapcsolatban.

A lineárisan rugalmas anyagú test véges merev testszerű elmozdulását súrlódás nélküli kényszerek (befalazás, csukló, görgős alátámasztás stb) teszik lehetetlenné. A test $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n$ pontjain támadó $F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n$ erők hatásvonalai rendre az $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ egyenesek (1. ábra).

A $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n$ pontok elmozdulásainak $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ irányú vetületei $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$. A test $F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n$ erőcsoporthoz tartozó alakváltozási energiáját jelölje $U(F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n)$.

Változtatlan megtámasztási feltételeket véve, jelölje a fentiekben szereplő test alakváltozási energiáját $U(F'_1, F'_2, \dots, F'_k)$, ha a P_1, P_2, \dots, P_k pontokon e_1, e_2, \dots, e_k hatásvonalú F'_1, F'_2, \dots, F'_k aktív erők működnek. A P_1, P_2, \dots, P_k pontok elmozdulásainak e_1, e_2, \dots, e_k irányú vetületeit ez esetben u'_1, u'_2, \dots, u'_k jelöli (2. ábra).

A tanulmány a következő tételt igazolja az alakváltozási energiával kapcsolatban.

Tétel

Ha a P_1, P_2, \dots, P_k pontok és a rajtuk átmenő e_1, e_2, \dots, e_k egyenesek adottak, és

$$u_1 = u'_1, u_2 = u'_2, \dots, u_k = u'_k, \quad (1)$$

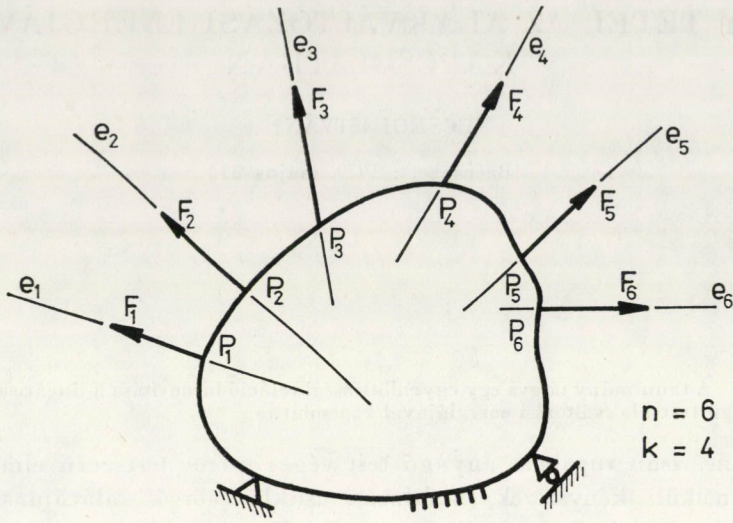
akkor

$$U(F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n) \geq U(F'_1, F'_2, \dots, F'_k). \quad (2)$$

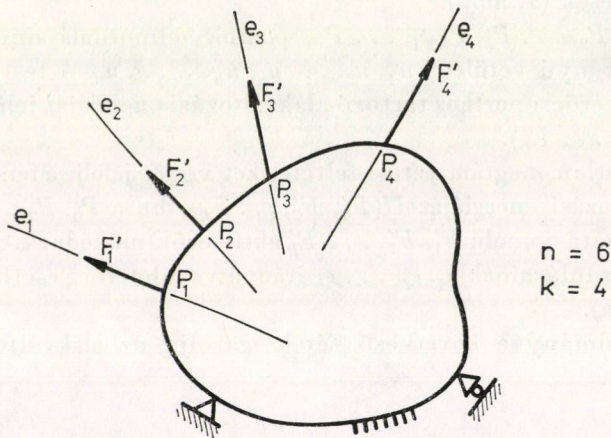
Más szóval, ha a két erőrendszer azonos nagyságú erőirányú elmozdulásokat okoz a P_1, P_2, \dots, P_k pontokban, akkor lesz a test alakváltozási energiája a kisebb, ha az aktív erők csak a P_1, P_2, \dots, P_k pontokban működnek.

A tétel alkalmazását tartó szerkezetre a 3. ábra szemlélteti.

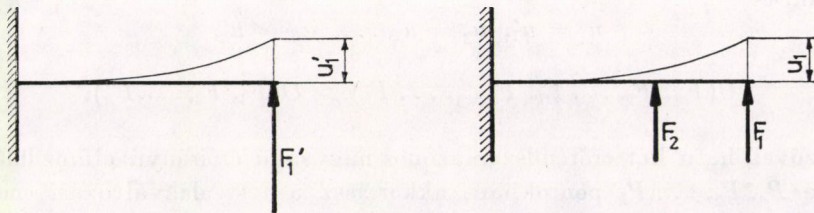
* Dr. Ecsedi István, H-3531 Miskolc, Vászonfehéritő u. 24. IV/1.



1. ábra. $F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots, F_n$ aktív külső erőkkel terhelt rugalmas test



2. ábra. F'_1, F'_2, \dots, F'_k aktív külső erőkkel terhelt rugalmas test



$$u'_1 = u_1$$

$$U(F'_1) \leq U(F_1, F_2)$$

3. ábra. Tartó szerkezet

Bizonyítás

A bizonyítást $n = 3, k = 2$ esetre végezzük. E korlátozás nyilván nem érinti a bizonyítás teljességét.

A c_{ij} Maxwell-féle hatásszámok bevezetésével az

$$u_1 = u'_1, u_2 = u'_2 \tag{3}-(4)$$

egyenletek a következőképpen írhatók fel:

$$c_{11}(F_1 - F'_1) + c_{12}(F_2 - F'_2) + c_{13}F_3 = 0, \tag{5}$$

$$c_{21}(F_1 - F'_1) + c_{22}(F_2 - F'_2) + c_{23}F_3 = 0. \tag{6}$$

Az (5), (6) képletek értelmezhetők úgy is, hogy a

$$f_1 = F_1 - F'_1, f_2 = F_2 - F'_2 \tag{7), (8)}$$

és F_3 aktív erőket működtetve, a P_1, P_2, P_3 pontokban a P_1 és P_2 pontok elmozdulásainak e_1 és e_2 irányú w_1 és w_2 vetületei zérusok, azaz $w_1 = w_2 = 0$.

Az F_1, F_2, F_3 aktív erőkből álló erőcsoportot két lépcsőben visszük fel. Első lépcsőben az F'_1, F'_2 erőket, a második lépcsőben pedig az f_1, f_2, F_3 aktív külső erőket működtetjük a testre.

Az $F_1 = F'_1 + f_1, F_2 = F'_2 + f_2, F_3$ erőcsoport esetében a test alakváltozási energiája $U(F_1, F_2, F_3)$. Az elasztosztatika jól ismert tétele alapján [1]

$$U(F_1, F_2, F_3) = U(F'_1, F'_2) + U_{12} + U(f_1, f_2, F_3). \tag{9}$$

A (9) képletben szereplő $U_{12} = W_{12}$ idegen alakváltozási energia zérus, hiszen

$$W_{12} = F'_1 w_1 + F'_2 w_2 = 0. \tag{10}$$

A (9) és (10) egyenletek kombinálásával az

$$U(F_1, F_2, F_3) = U(F'_1, F'_2) + U(f_1, f_2, F_3) \tag{11}$$

eredményt nyerjük. A (11) képletből a bizonyítandó

$$U(F_1, F_2, F_3) \geq U(F'_1, F'_2), \tag{12}$$

$$(u_1 = u'_1, u_2 = u'_2)$$

egyenlőtlenségi relációt kapjuk, ha tekintettel vagyunk az $U(f_1, f_2, F_3)$ alakváltozási energia nem negatív voltára [1]:

$$U(f_1, f_2, F_3) \geq 0. \tag{13}$$

IRODALOM

1. SOKOLNIKOFF, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. Sec. Ed. McGraw-Hill, 1956. p. 85, p. 390—393

A Theorem Relating to the Strain Energy. — The subject of the paper is the verification of an inequality relation in connection with the strain energy of a body of linearly elastic material.

Ein Lehrsatz in Zusammenhang mit der Verformungsenergie. — In der Abhandlung wird eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie eines Körpers aus linearelastischem Material bewiesen.

Helyreigazítás

CSONKA PÁL: „Lapos héjak nyúlásmentes alakváltozásának néhány különleges esete” című tanulmányában (*Műszaki Tudomány*, 57. kötet)

a 418. oldalon a (8) képlet első sorában

$$K\Delta\Delta F \text{ helyett } K\Delta\Delta w,$$

a 418. oldalon a (9) képlet jobb oldalán

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ helyett } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

írandó.