FORGÁSPARABOLOIDHÉJ KÉT FÜGGŐLEGES ÉS KÉT VÍZSZINTES SÍKÚ PEREMTARTÓVAL

CSONKA PÁL*

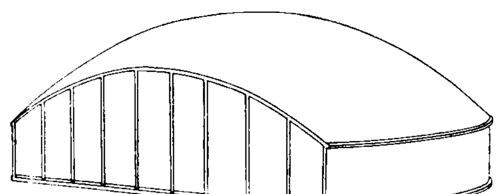
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1979. november 9-én]

A tárgyalt héj függőleges síkú peremtartói oszlopokkal sűrűn alátámasztott, vonórudas vagy vonórúd nélküli ívek, vízszintes síkú peremtartói fallal alátámasztott vonórúd nélküli ívek. A függőleges síkú peremtartók csak saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben ellenállók, a vízszintes síkú peremtartók viszont csak tengelyirányú erőkkel (kötélerőkkel) szemben fejtenek ki ellenállást. A dolgozat a feladatot a membránelmélet keretében tárgyalja. A közölt megoldás a feladat peremfeltételeit a függőleges peremtartók mentén pontosan, a vízszintes peremtartók mentén csak közelítőleg teljesíti.

1. Bevezetés

Az alábbiak függőleges erőkkel terhelt olyan forgásparaboloidhéjak számítását ismertetik, amelyek szélét két vízszintes és két függőleges síkú peremtartó szegélyezi (1. ábra).



1. ábra. Forgásparaboloidhéj két függőleges és két vízszintes síkú peremtartóval

A függőleges síkú peremtartók parabolatengelyű, oszlopokkal sűrűn alátámasztott, vonórudas, vagy vonórúd nélküli ívek. Ezek csak a saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben ellenállók.

A vízszintes síkú peremtartók körív alakúak, teljes hosszukban fallal alátámasztottak. Ezeknek a tartóknak nincs vonórúdjuk, bennük a terhelés hatására csak tengelyirányú erők (kötélerők) keletkeznek.

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. u. 31.

A szóban forgó héjak célszerű alakjuk és tetszetős megjelenésük folytán igen alkalmasak nagyobb fesztávolságú terek, főleg sport- és kiállítási létesítmények lefedésére.

2. Alapösszefüggések

Vizsgálatainkat a héjak membránelméletének szokásos feltevéseire alapozzuk. A héj és a peremtartók csatlakozásánál a membránszerű feszültségi állapotot zavaró hajlító-csavaró hatásokat figyelmen kívül hagyjuk.

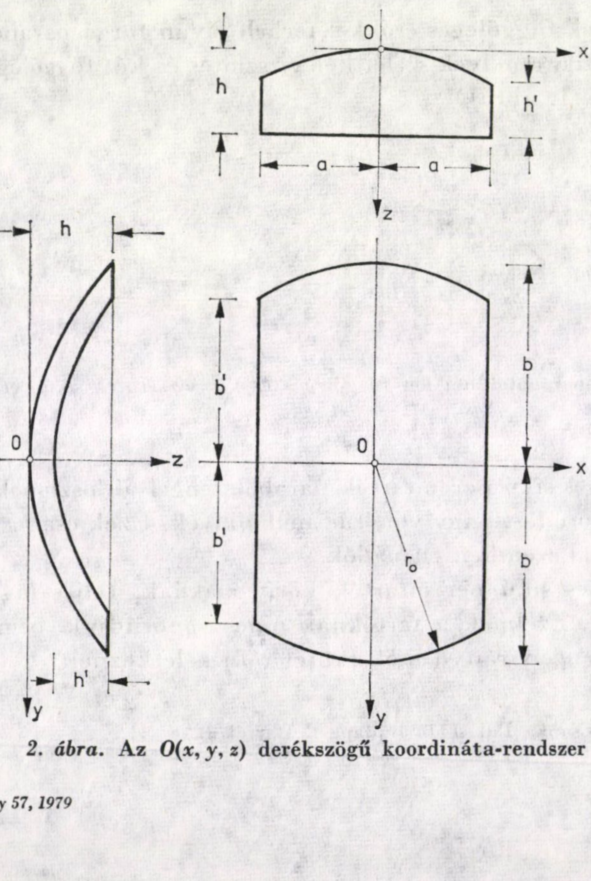
Koordináta-rendszerül a 2. ábrán feltüntetett $0(x, y, z)$ derékszögű rendszert vezetjük be. Ebben a koordinátarendszerben a héj középfelületének egyenlete

$$z = h\frac{x^2 + y^2}{r_0^2} . \tag{1}$$

A héjra ható teherként csak függőleges megoszló erőket veszünk számításba. Ezeknek az erőknek az alaprajz területére vonatkoztatott fajlagos értékét a

$$\bar{p} = \bar{p}(x, y) \tag{2}$$

teherpolinommal fejezzük ki.



2. ábra. Az $O(x, y, z)$ derékszögű koordináta-rendszer

A szóban forgó feladat megoldásához, a héj feszültségi állapotának vizsgálatakor olyan

$$F = F(x, y) \tag{3}$$

függvényt — feszültségfüggvényt — kell keresnünk, amely egyrészt megfelel a membránhéjak differenciálegyenletének, másrészt a feladat különleges peremfeltételeinek.

Az adott esetben a feladat differenciálegyenlete [6]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{r_0^2}{2h}\overline{p} = 0 \tag{4}$$

alakú, az F függvény által teljesítendő peremfeltétel pedig a héj valamennyi peremszakaszán [5, 7]

$$F = 0. \tag{5}$$

3. A feladat megoldása

Tárgyalásaink során megelégszünk a feladat közelítő megoldásával, nevezetesen az F feszültségfüggvény közelítő meghatározásával. Ezt a függvényt két részből tesszük össze:

$$F = F_i + F_h\,. \tag{6}$$

Az F_i és F_h függvényeket az alábbiak szerint szerkesztjük meg.

3.1. *Az F_i függvény*

Erre a célra a (4) jelű inhomogén differenciálegyenlet egy olyan partikuláris megoldását választjuk, amely az $x = \pm a$ héjperemek mentén eleve megfelel az (5) peremfeltételnek. Polinom alakú $\overline{p}$ teherfüggvény esetében az ilyen partikuláris megoldásokat

$$F_i = (a^2 - x^2) f(x, y) \tag{7}$$

alakban állíthatjuk elő, ahol $f(x, y)$ a teherpolinom fokszámával megegyező fokszámú polinom. Utóbbinak együtthatóit a határozatlan együtthatók módszerével állapíthatjuk meg. Ezt a számítást a gyakorlat szempontjából szóbajövő egyszerű terhelési esetekre elvégeztük és a számítás eredményét az 1. táblázatba foglaltuk.

3.2. *Az F_h függvény*

Ezt a függvényt a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \tag{8}$$

homogén differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldásaiból szerkesztjük meg, amelyek mindegyike eleve megfelel az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) feltételnek. Egyes ilyen megoldásokat az alábbiakban ismertetünk.

1. táblázat

Az F_i függvény

$\bar{p}$	F_i
$\bar{p}_{00}$	$\bar{p}_{00}\,\frac{r_0^2}{4h}(a^2 - x^2)$
$\bar{p}_{10}\,\frac{x}{a}$	$\bar{p}_{10}\,\frac{r_0^2}{12h}(a^2 - x^2)\frac{x}{a}$
$\bar{p}_{01}\,\frac{y}{a}$	$\bar{p}_{01}\,\frac{r_0^2}{4h}(a^2 - x^2)\frac{y}{a}$
$\bar{p}_{20}\,\frac{x^2}{a^2}$	$\bar{p}_{20}\,\frac{r_0^2}{24h}(a^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$
$\bar{p}_{11}\,\frac{xy}{a^2}$	$\bar{p}_{11}\,\frac{r_0^2}{12h}(a^2 - x^2)\frac{xy}{a^2}$
$\bar{p}_{02}\,\frac{y^2}{a^2}$	$\bar{p}_{02}\,\frac{r_0^2}{24h}(a^2 - x^2)\left(5 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{6y^2}{a^2}\right)$
$\bar{p}_{30}\,\frac{x^3}{a^3}$	$\bar{p}_{30}\,\frac{r_0^2}{40h}(a^2 - x^2)\left(\frac{6x}{a} + \frac{x^3}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{21}\,\frac{x^2y}{a^3}$	$\bar{p}_{21}\,\frac{r_0^2}{24h}(a^2 - x^2)\left(\frac{y}{a} + \frac{x^2y}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{12}\,\frac{xy^2}{a^3}$	$\bar{p}_{12}\,\frac{r_0^2}{360h}(a^2 - x^2)\left(\frac{7x}{a} - \frac{3x^3}{a^3} + \frac{30xy^2}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{03}\,\frac{y^3}{a^3}$	$\bar{p}_{03}\,\frac{r_0^2}{8h}(a^2 - x^2)\left(\frac{5y}{a} - \frac{x^2y}{a^2} + \frac{2y^3}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{40}\,\frac{x^4}{a^4}$	$\bar{p}_{40}\,\frac{r_0^2}{60h}(a^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{31}\,\frac{x^3y}{a^4}$	$\bar{p}_{31}\,\frac{r_0^2}{40h}(a^2 - x^2)\left(\frac{xy}{a^2} + \frac{x^3y}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{22}\,\frac{x^2y^2}{a^4}$	$\bar{p}_{22}\,\frac{r_0^2}{360h}(a^2 - x^2)\left(14 - \frac{x^2}{a^2} + 15\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} + \frac{15x^2y^2}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{13}\,\frac{xy^3}{a^4}$	$\bar{p}_{13}\,\frac{r_0^2}{120h}(a^2 - x^2)\left(\frac{7xy}{a^2} - \frac{3x^3y}{a^4} + \frac{10xy^3}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{04}\,\frac{y^4}{a^4}$	$\bar{p}_{04}\,\frac{r_0^2}{60h}(a^2 - x^2)\left(61 - \frac{14x^2}{a^2} + \frac{75y^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{15x^2y^2}{a^4} + \frac{15y^4}{a^4}\right)$

a) Ha *a terhek az yz koordinátasíkra nézve szimmetrikus elrendezésűek*, akkor az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) peremfeltételnek megfelelő homogén megoldások [4]:

$$G = \cos nx \begin{matrix} \cosh \\ \sinh \end{matrix} ny\,; \tag{9}$$

$$G = \arctan \frac{\cos nx}{\sinh n(k-y)} \pm \pm \arctan \frac{\cos nx}{\sinh n(k+y)}\,; \quad (k \geq r_0) \tag{10}$$

$$G = \mathrm{Artanh} \frac{\cos nx}{\cosh n(k-y)} \pm \pm \mathrm{Artanh} \frac{\cos nx}{\cosh n(k+y)}\,; \quad (k > r_0) \tag{11}$$

A fenti képletekben a kettős függvényjelek és kettős előjelek közül a felsők az xz síkra nézve szimmetrikus terhelési esetekben, az alsók viszont az xz síkra antimetrikus terhelési esetekben alkalmazhatók, n értéke pedig

$$n = \frac{\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}, \frac{5\pi}{2a}, \ldots$$

b) Ha *a terhek az yz koordinátasíkra nézve antimetrikus elrendezésűek*, akkor az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) peremfeltételt kielégítő homogén megoldások [4]:

$$G = \sin nx \begin{matrix} \cosh \\ \sinh \end{matrix} ny\,; \tag{12}$$

$$G = \arctan \frac{\sin nx}{\cosh n(k-y)} \pm \pm \arctan \frac{\sin nx}{\cosh n(k+y)}\,; \quad (k \geq r_0) \tag{13}$$

$$G = \mathrm{Artanh} \frac{\sin nx}{\cosh n(k-y)} \pm \pm \mathrm{Artanh} \frac{\sin nx}{\cosh n(k+y)}\,; \quad (k > r_0) \tag{14}$$

Ezekben a képletekben a kettős függvényjelek és kettős előjelek közül a felsők itt is az xz síkra szimmetrikus terhelési esetekben, az alsók viszont az xz síkra nézve antimetrikus terhelési esetekben kerülhetnek alkalmazásra, n értéke pedig

$$n = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \ldots$$

Az $x = \pm a$ peremvonalak mentén az (5) peremfeltételnek megfelelő homogén megoldások, továbbá

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{\sin nx}{\cos nx + \cosh ny} = \frac{\sin nx}{2\left(\cos^2 \frac{nx}{2} + \sinh^2 \frac{ny}{2}\right)}, \\
G &= \frac{\sin nx}{\cos nx - \cosh ny} = \frac{\sin nx}{2\left(\cos^2 \frac{nx}{2} - \cosh^2 \frac{ny}{2}\right)},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

ahol

$$n = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a} \dots .$$

A (15) alatti megoldások az yz síkra nézve antimetrikus, de az xz koordinátasíkra nézve szimmetrikus terhelési esetekben használhatók.

3.3. *A feladat feszültségfüggvénye*

Ezt a függvényt a 3.1. alatti F_i függvény és a 3.2. alatti G függvények lineáris kombinációjaként úgy kell megszerkeszteni, hogy az

$$F = F_i + F_h$$

függvényegyüttes a vízszintes síkú héjperemeken is feleljen meg az (5) peremfeltételnek. Az utóbbi követelményt — sajnos — általában csak közelítőleg tudjuk teljesíteni.

4. Számpélda

Alkalmazzuk a fentiekben vázolt számító eljárást a 3. ábrán feltüntetett héjra, amely alakra nézve igen hasonló a Krstić, M. által tervezett belgrádi sportcsarnok héjszerkezetéhez [1, 2].

Példánk esetében

$$
\begin{aligned}
a &= 20{,}0\ [\mathrm{m}],\ b = \sqrt{825} \cong 28{,}72\ [\mathrm{m}], \\
r_0 &= 35{,}0\ [\mathrm{m}], h = 14{,}7\ [\mathrm{m}],\ h' = 9{,}9\ [\mathrm{m}],
\end{aligned}
$$

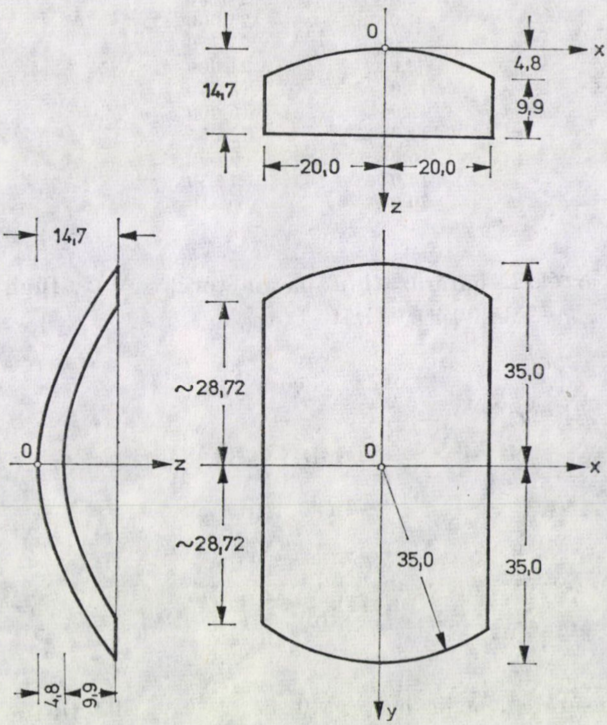
tehát a héj középfelületének egyenlete

$$z = 14{,}7 \frac{x^2 + y^2}{35{,}0^2} = 0{,}012\,(x^2 + y^2)\ [\mathrm{m}]. \tag{16}$$

A héjra ható terhelésként az alaprajz területén egyenletesen megoszló

$$\bar{p}_{00} = 3{,}0\ [\mathrm{kN/m^2}] \tag{17}$$

intenzitású függőleges erőrendszert veszünk számításba.



3. ábra. Számpélda

F_i *függvényként* az 1. táblázat első sorában szereplő függvényt választjuk:

$$F_i = \bar{p}_{00}\frac{r_0^2}{4h}(a^2 - x^2) = 62{,}5(400 - x^2)\ [\mathrm{kNm}]\,. \tag{18}$$

Ez a függvény x különböző értékei esetében — így a vízszintes héjperemeken is — a 2. táblázatban foglalt értékeket veszi fel.

F_h *függvényként* a (10) alatti kifejezés két változatának — a G_1 és G_2 függvényeknek — lineáris kombinációját vezetjük be, a bennük szereplő k mennyiség célszerű értékét próbák alapján véve fel:

$$F_h = c_1 G_1 + c_2 G_2\,. \tag{19}$$

2. táblázat

Az F_i függvény értékei a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	F_i [kNm]
0,0	25 000
2,0	24 750
4,0	24 000
6,0	22 750
8,0	21 000
10,0	18 750
12,0	16 000
14,0	12 750
16,0	9 000
18,0	4 750
20 0	0

Itt a c_1 és c_2 értékek határozatlan paraméterek. A G_1 függvény esetében $n = \pi/40$ [m^{-1}], $k = 35{,}0$ [m], tehát

$$G_1 = \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (35 - y)} + \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (35 + y)}, \tag{20}$$

a G_2 függvény esetében pedig $n = \pi/40$ [m^{-1}], $k = 50{,}0$ [m], vagyis

$$G_2 = \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (50 - y)} + \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (50 + y)}. \tag{21}$$

A G_1 és G_2 függvények értékét a vízszintes héjperem egyes pontjaiban a 3. táblázat tünteti fel.

A feladat közelítő feszültségfüggvénye a (18) és (19) alatti függvények összege:

$$F = F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2. \tag{22}$$

3. táblázat

A G_1 és G_2 függvények értéke a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	G_1	G_2
0	1,578 988	0,599 833
2,0	1,574 376	0,591 556
4,0	1,559 792	0,566 784
6,0	1,532 746	0,525 803
8,0	1,488 136	0,469 446
10,0	1,416 291	0,399 538
12,0	1,299 049	0,319 321
14,0	1,103 902	0,233 550
16,0	0,789 257	0,148 013
18,0	0,373 460	0,068 553
20,0	0,000 000	0,000 000

Az utóbbi képletben szereplő c_1 és c_2 határozatlan állandók célszerű értéke a Ritz—Galerkin-féle következő képletek segítségével állapítható meg:

$$\int (F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2)\, G_1 \cdot dx = 0\,,$$

$$\int (F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2)\, G_2 \cdot dx = 0\,.$$

Az integrálásokat az $x = 0$ [m]-től az $x = a = 20{,}0$ [m]-ig terjedő szakaszra kell kiterjeszteni. Ezt a műveletet az integrálási szakasznak tíz egyenlő részre való osztásával numerikusan — a Simpson-szabály alkalmazásával — végrehajtottuk és az így nyert két lineáris egyenletből a c_1 és c_2 paraméterekre az alábbi számértékeket kaptuk:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\ 6\,488\ [\mathrm{kNm}], \\ c_2 &= -24\,386\ [\mathrm{kNm}]. \end{aligned} \tag{23}$$

A fenti c_1 és c_2 értékekkel dolgozva, a vízszintes héjperem egyes pontjaiban az F feszültségfüggvényre a 4. táblázatba foglalt, az előírt $F = 0$ értéktől eléggé eltérő F értékekhez jutottunk. A számítás finomításával, nevezetesen további G függvényeknek a számításba való bevonásával, az F függvény peremértékeinek a zérustól való eltérése még csökkenthető.

Ismervén a feladat feszültségfüggvényét, a héj x, y irányú $\overline{N}_x$, $\overline{N}_{xy}$, $\overline{N}_y$ vetületi feszítő erőit az alábbi ismert képletekkel számíthatjuk [6]:

$$\overline{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \quad \overline{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}\,, \quad \overline{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,. \tag{24}$$

4. táblázat

Az F függvény értéke a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	F [kNm]
0.0	+128,00
2,0	+109,77
4,0	+ 58,48
6,0	16,69
8,0	−102,94
10,0	−182,03
12,0	−215,19
14,0	−107,47
16,0	+269,85
18,0	+655,26
20,0	0,00

A vízszintes peremtartókban keletkező kötélerő x, illetve y irányú alkotója az

$$X = \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ illetve } Y = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{25}$$

képlettel határozható meg.

Az a körülmény, hogy a közölt számító eljárást alkalmazva, a héj sarokpontjaiban a $\partial F//x$ deriváltra zérustól eltérő értéket kapunk, a vízszintes peremtartókban pedig az F értékekkel azonos nagyságú, tehát zérustól eltérő értékű M hajlítónyomatékok adódnak [5, 7], az alkalmazott számító eljárás közelítő voltának a következménye. Ugyanennek tudható be az is, hogy a héj sarokpontjaiban a számításszerű $\bar{N}_{xy}$ erő az egyszerű egyensúlyi megfontolással meghatározható tényleges $\bar{N}_{xy}$ erőtől lényegesen eltér. Az adott támasztási körülmények közt — a közelítő számítás eredményétől függetlenül — a héj sarokpontjaiban az $F = 0$ feltétel, valamint a vízszintes síkú peremtartókban az $M = 0$ feltétel mindenkor teljesítve van.

IRODALOM

1. Krstić, M.: A Doubly Curved Shell Roof of Belgrade. *Concrete and Constructional Engineering* 54 (1959), 73—80
2. Hajnal-Kónyi, K.: Recent Developments in Shell Concrete Construction. *Architects Yearbook* 9 (1960), 194—230
3. Menyhárd, I.—Szmodits, K.: Der Membranzustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 16 (1962), 29—34
3. Menyhárd, I.—Szmodits, K.: Der Membranzustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 16 (1962), 29—34
4. Menyhárd, I.—Szmodits, K.: Héjszerkezetek számítása és szerkesztése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
5. Csonka, P.: Membrane Shells with Vertically Supported Edge Beam. *Simplified Calculation Methods of Shell Structures.* North-Holland Publishing Company—Amsterdam 1962, pp. 219—234

6. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur-Praxis*, Heft 16. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966
7. CSONKA, P.: Membránhéjak fallal alátámasztott peremtartóval. *Műszaki Tudomány* 44 (1971), 317—326

Paraboloid Shell of Revolution with Two Edge Arches in Vertical and Two Edge Arches in Horizontal Planes. — The vertical edge arches of the shell are supported by vertical columns set close to each other having or not having tie-rods. The horizontal edge arches are buttressed along their whole lengths by a wall and have not tie-rods. The vertical edge arches only withstand forces lying in their own planes, the horizontal ones only resist tangential forces (string forces). The paper determines the stresses in the shell using the assumptions of the so-called membrane theory. The solution arrived at precisely meets the edge conditions along the vertical arches, however, only approximately along the horizontal ones.

Rotationsparaboloidschale mit zwei vertikalen und zwei horizontalen Randbögen. — Die in vertikaler Ebene liegenden Randbögen der behandelten Schale sind durch eng stehende Säulen unterstützte Bögen mit oder ohne Zugband. Die in horizontaler Ebene liegenden Randträger sind durch Mauerwerk unterstützte Bögen ohne Zugband. Die vertikalen Randbögen leisten nur gegen in ihren Ebenen wirkende Kräfte Widerstand, während die horizontalen Bögen nur gegen in tangentialer Richtung wirkende Kräfte widerstandsfähig sind. Der Aufsatz behandelt des Kräftespiel der Schale im Rahmen der Membrantheorie. Die mitgeteilte Lösung befriedigt die Randbedingungen längs der vertikalen Bögen genau, entlang der horizontalen Bögen nur annähernd.