NUMERIKUS MÓDSZER m-EDFOKÚ λ-MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKFELADATÁNAK MEGOLDÁSÁRA

POPPER GYÖRGY*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

GÁSPÁR ZSOLT**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1979. augusztus 7-én]

A cikk egy olyan numerikusan hatékony iterációs módszert ismertet, amely alkalmas m-edfokú n-edrendű λ-mátrix n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékének és az ezekhez tartozó általánosított sajátvektoroknak a meghatározására. A konvergenciatételben megadja a konvergencia feltételeit. A módszer tulajdonképpen a polinomok gyökhelyeinek meghatározására szolgáló Bernoulli módszer egy általánosítása mátrixpolinomokra.

1. Bevezetés

A mechanikai feladatok numerikus megoldása gyakran λ-mátrixok általánosított sajátértékfeladatára vezet. Jól ismertek például azok a lengéstani feladatok, amelyek másodfokú λ-mátrixot eredményeznek (pl. [1]). Vannak stabilitási és lengéstani feladatok, amelyek olyan differenciálegyenletekkel írhatók le, amelyeknél a peremfeltételek a sajátértékek függvényei. Az ilyen feladatok finitizálása a Galerkin módszerrel magasabb fokú λ-mátrixok sajátértékfeladatára vezethet (pl. [2]).

Sok esetben elegendő csak néhány legkisebb (vagy legnagyobb) abszolút értékű általánosított sajátérték és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorok meghatározása.

Az m-edfokú λ-mátrixok általánosított sajátértékfeladata mindig visszavezethető egy mátrix speciális sajátértékfeladatára. Mivel e mátrix rendszáma a λ-mátrix rendszámának m-szerese, az ilyen visszavezetés numerikus okokból kedvezőtlen.

A továbbiakban egy olyan numerikusan hatékony iterációs módszert ismertetünk, amely alkalmas az m-edfokú n-edrendű λ-mátrix n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékének és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorainak meghatározására.

2. A módszer

Tekintsük az

$$(\mathbf{I}\lambda^m + \mathbf{A}_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \mathbf{A}_{m-1} \lambda + \mathbf{A}_m) \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

m-edfokú λ-mátrix általánosított sajátértékfeladatát, ahol $\mathbf{I}, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ n-edrendű valós mátrixok, $\mathbf{I}$ egységmátrix és $\mathbf{A}_m$ nemszinguláris.

* Dr. Popper György, 1016 Budapest, Szirtes u. 28/a.

** Dr. Gáspár Zsolt, 1025 Budapest, Kapy u. 40/b.

Lemma. Ha $\tilde{\mathbf{Y}}$ megoldása az

$$\mathbf{Y}^m + \mathbf{A}_1\mathbf{Y}^{m-1} + \ldots + \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{Y} + \mathbf{A}_m = \mathbf{0} \qquad (2)$$

mátrixegyenletnek, akkor az $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai egyben az (1) alatti általánosított sajátértékfeladat általánosított sajátértékei és általánosított sajátvektorai.

E lemma következménye a [3] 53. oldalán szereplő 3.7(i) tételnek és a 49. oldalán levő korrolláriumnak.

Így tehát, ha ismerjük a (2) egyenlet bármelyik megoldását (például az $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrixot), akkor az n-edrendű $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrix speciális sajátértékfeladatának megoldásával megkapjuk az (1) feladat mn számú általánosított sajátértékei és általánosított sajátvektorai közül n-et. Ezért a továbbiakban a (2) egyenlet megoldásával foglalkozunk. Alkalmazzuk erre az

$$(\ldots((\mathbf{Y}_{k-m+2} + \mathbf{A}_1)\,\mathbf{Y}_{k-m+3} + \mathbf{A}_2)\ldots + \mathbf{A}_{m-1})\,\mathbf{Y}_{k+1} = -\mathbf{A}_m \qquad (3)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

iterációt az $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_{-1}, \ldots, \mathbf{Y}_{2-m}$ kezdeti mátrixokkal. Ez az iteráció

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1} = \mathbf{Z}_k\,, \qquad (4a)$$

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{Z}}_{k+1}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1})^{-1} \qquad (4b)$$

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{S}\mathbf{Z}_{k+1} \qquad (4c)$$

alakban is írható, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & & -\mathbf{A}_{m-1} & -\mathbf{A}_m \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad (5a)$$

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-m+2}\mathbf{Y}_{k-m+3} & \ldots & \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_{k-m+3}\mathbf{Y}_{k-m+4} & \ldots & \mathbf{Y}_k \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \mathbf{Y}_k & \\ & \mathbf{I} & \end{bmatrix}, \qquad (5b)$$

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-m+3}\mathbf{Y}_{k-m+4} \cdots \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_{k-m+4}\mathbf{Y}_{k-m+5} \cdots \mathbf{Y}_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5c}$$

és

$$\mathbf{R} = [\underset{(1)}{\mathbf{0}}, \underset{(2)}{\mathbf{0}}, \ldots, \underset{(m-2)}{\mathbf{0}}, \underset{(m-1)}{\mathbf{0}}, \underset{(m)}{\mathbf{I}}], \tag{6a}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}]. \tag{6b}$$

A (3) formula és a (4) inverz iteráció ekvivalenciája könnyen belátható a következőképpen. Ha a (3) egyenletet jobbról megszorozzuk az $\mathbf{Y}_{k+1}$ inverzével, akkor a (4a) hiperegyenlet első egyenletét kapjuk; a (4a) többi egyenlete azonosságot fejez ki. Az

$$(\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{Z}}_{k+1})^{-1} = \mathbf{Y}_{k+1},$$

így a normálásnak megfelelő (4b) egyenlet a (4a) egyenletnek az $\mathbf{Y}_{k+1}$ mátrixszal való visszaszorzását jelenti. A (4c) egyenlet az $\mathbf{Y}_{k+1}$ blokk formális kijelölése.

A (3) iterációnak (4) alakra való átírása a következők miatt is célszerű:

a) Az (1) általánosított sajátértékfeladat mindig visszavezethető

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X\Lambda}$$

mn-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix speciális sajátértékfeladatára, ahol $\mathbf{\Lambda}$ az (1) feladat mn általánosított sajátértékéből (λ_i) alkotott diagonálmátrix,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{V\Lambda}^{m-1} \\ \mathbf{V\Lambda}^{m-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{V\Lambda} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

és az $n \times mn$ típusú $\mathbf{V}$ mátrix i-ik oszlopa a λ_i általánosított sajátértékhez tartozó $\mathbf{v}_i$ általánosított sajátvektor.

b) Ha az (1)-ben szereplő λ-mátrix egyszerű (azaz minden r multiplicitású sajátértékhez r lineárisan független sajátvektor tartozik), akkor [3] 4.2 tétele következményeként az $\mathbf{A}$ mátrix egyszerű struktúrájú, így

$$\mathbf{A} = \mathbf{X\Lambda X}^{-1} \tag{8}$$

írható.

Az általánosított sajátértékeket rendezzük sorba úgy, hogy

$$|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \ldots, mn - 1$$

legyen.

Jelölje $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2$ az alábbi diagonálmátrixokat:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle, \quad \mathbf{\Lambda}_2 = \langle \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{mn} \rangle,$$

és ennek megfelelően particionáljuk az általánosított sajátvektorokat tartalmazó

$$\underset{n\times mn}{\mathbf{V}} = [\underset{n\times n}{\mathbf{V}_1}, \quad \underset{n\times(m-1)n}{\mathbf{V}_2}] \tag{9}$$

mátrixot.

A továbbiakban feltesszük, hogy (1) egyszerű λ-mátrix. Ekkor bármely $mn \times n$ típusú $\mathbf{Z}_0$ mátrix egyértelműen felírható

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{X}\mathbf{C} = \mathbf{X}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

alakban, ahol $\mathbf{C}_1$ n-edrendű, $\mathbf{C}_2$ pedig $(m-1)n \times n$ típusú mátrix.

Ha a (4a, b) iterációt a $\mathbf{Z}_0$ mátrixból indítjuk, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}, \\
\mathbf{Z}_2 &= \mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}]^{-1} = \\
&= \mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-2})^{-1}, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\mathbf{Z}_k &= \mathbf{A}^{-k}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-k}\mathbf{Z}_0)^{-1}.
\end{aligned}$$

Felhasználva a (4c), (8) és (10) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{S}\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{-k}\mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{-k}\mathbf{C})^{-1}.$$

Mivel $\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}$ és $\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{V}$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1-k}\mathbf{C}(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-k}\mathbf{C})^{-1}. \tag{11}$$

Felhasználva a (9), (10) jelöléseket

$$\mathbf{Y}_k = (\mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1^{1-k}\mathbf{C}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{\Lambda}_2^{1-k}\mathbf{C}_2)(\mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1^{-k}\mathbf{C}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{\Lambda}_2^{-k}\mathbf{C}_2)^{-1}.$$

$\mathbf{A}_m$ nemszingularitásából $\mathbf{\Lambda}_1$ nemszingularitása következik. Tegyük fel, hogy $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{C}_1$ sem szinguláris. Ekkor

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1^{1-k}\mathbf{C}_1(\mathbf{I} + \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_1^{k-1}\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{V}_2\mathbf{\Lambda}_2^{1-k}\mathbf{C}_2)$$
$$(\mathbf{I} + \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_1^{k}\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{V}_2\mathbf{\Lambda}_2^{-k}\mathbf{C}_2)^{-1}\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_1^{k}\mathbf{V}_1^{-1}$$

alakban is írható.

A $\mathbf{\Lambda}_1^k\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{V}_2\mathbf{\Lambda}_2^{-k}$ mátrix i, j indexű eleme tényezőként tartalmazza a $(\lambda_i/\lambda_{n+j})^k$ hatványt. Ezért a

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \tag{12}$$

feltétel teljesülése esetében, ha $k \to \infty$

$$\mathbf{Y}_k \to \mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1^{1-k}\mathbf{C}_1(\mathbf{I} + \mathbf{0})(\mathbf{I} + \mathbf{0})^{-1}\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{\Lambda}_1^{k}\mathbf{V}_1^{-1} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{V}_1^{-1}.$$

Tehát, ha a (2) mátrixegyenlet megoldására a (3) iterációt alkalmazzuk, akkor a (2) egyenletnek azt a megoldását kapjuk, amelynek sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek az (1) legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékeivel és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorokkal.

Ezzel bebizonyítottuk a következő konvergenciatételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy

1. az

$$\mathbf{I}\lambda^m + \mathbf{A}_1\lambda^{m-1} + \ldots + \mathbf{A}_m$$

egyszerű λ-mátrix,

2. általánosított sajátértékeire

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \leq \ldots \leq |\lambda_{mn}|$$

érvényes,

3. a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ általánosított sajátértékekhez tartozó általánosított sajátvektorokból alkotott

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

mátrix nemszinguláris.

Ha a (3) iterációt olyan $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_{-1}, \ldots \mathbf{Y}_{2-m}$ mátrixokkal indítjuk, hogy az (5b) és (10) összefüggésekkel definiált $\mathbf{C}_1$ nemszinguláris mátrix, akkor az iteráció az

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{V}_1\langle\lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle\mathbf{V}_1^{-1}$$

mátrixhoz konvergál.

3. Megjegyzések

1. A $|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$ feltételből következik, hogy ha $\mathbf{V}_1$ nemszinguláris mátrix, akkor a $\mathbf{V}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{V}_1^{-1}$ mátrix valós.

2. A (3) iterációs eljárás az $n = 1$ speciális esetben megegyezik a polinomok legkisebb abszolút értékű gyökének meghatározására vonatkozó Bernoulli módszer azon változatával, amely a sorozat túl- vagy alulcsordulását kivédi (lásd pl.: [4] 8.10—52). LANGASTER a Bernoulli módszernek egy másik változatát terjesztette ki, mely alkalmas a (2) domináns megoldásának számítására [5].

3. Hasonlóan a Bernoulli módszerhez és a Mises eljáráshoz a (3) iteráció konvergenciája annál gyorsabb, minél kisebb a $|\lambda_n|/|\lambda_{n+1}|$ hányados.

4. Ha az (1) egyenletet balról megszorozzuk az $\mathbf{A}_m$ mátrix inverzével, és bevezetjük a $\lambda = 1/\lambda$ jelölést, akkor az (1)-gyel megegyező alakú λ-mátrixot kapunk. Ha a λ-mátrix szimmetrikus és $\mathbf{A}_m$ pozitív definit, akkor a szimmetria megőrizhető (lásd pl.: [1]). Az új λ-mátrixra alkalmazva a (3) iterációt meghatározhatók az eredeti feladat legnagyobb abszolút értékű általánosított sajátértékei és sajátvektorai.

5. Ha a (3) iterációval meghatároztuk a (2) egyenlet egyik megoldását, az $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrixot, akkor a

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{i-1}\tilde{\mathbf{Y}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

azaz a (2) polinomra alkalmazott Ruffini—Horner-féle rekurzióval meghatározhatók egy $m - 1$-edfokú λ-mátrix $\mathbf{B}_i$ együtthatói. Ennek általánosított sajátértékei az (1) feladat $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{mn}$ általánosított sajátértékei, és a λ_i-hez tartozó általánosított sajátvektora $(\tilde{\mathbf{v}}_i)$ a

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{I}\lambda_i - \tilde{\mathbf{Y}})^{-1}\tilde{\mathbf{v}}_i$$

transzformációval adja az (1) feladat általánosított sajátvektorát. Ha az $m - 1$-edfokú λ-mátrixra teljesülnek a tételben szereplő feltételek, akkor egy újabb iterációval megkapható a a következő n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátérték és a hozzájuk tartozó sajátvektor. Az eljárás értelemszerűen tovább folytatható.

6. Egy mn-edrendű nem széteső Hessenberg mátrix hasonlósági transzformációkkal mindig hozható (5a) alakra ([6]). Ezért a (3) iteráció egy mn-ed rendű mátrix n legkisebb abszolút értékű sajátértékének és a megfelelő sajátvektorainak a meghatározására is alkalmazható.

4. Példa

Tekintsük az

$$\left(\mathbf{I}\lambda^3+\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -6 & -16\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}7 & -8\\ 39 & 70\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}-24 & -24\\ -54 & -84\end{bmatrix}\right)\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

harmadfokú λ-mátrix általánosított sajátértékfeladatát.

Ennek általánosított sajátértékei $\lambda_i = i$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$), általánosított sajátvektorai:

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-29\\ 21\end{bmatrix};\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-14\\ 11\end{bmatrix};\quad \mathbf{v}_3=\mathbf{v}_5=\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix};\ \mathbf{v}_4=\mathbf{v}_6=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Végezzük a (3) iterációs eljárást $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ kezdeti mátrixszal. ($\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{Y}_{-1}$ tetszőleges lehet.)

Az iteráció jellemzésére meghatároztuk az $\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}$ mátrix euklideszi normáját, valamint az $\mathbf{Y}_k$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Az utóbbiakat úgy normáltuk, hogy az első elemük megegyezzék a (13) alatti vektor első elemével. Az iteráció jól követhető a következő táblázat alapján:

k	$\lVert \mathbf{Y}_k-\mathbf{Y}_{k-1} \rVert$	λ_1	λ_2	$v_{1,2}$	$v_{2,2}$
10	$8 \cdot 10^{-1}$	1,00013876	1,88800685	21,0001572	10,8572656
15	$1 \cdot 10^{-1}$	1,00000051	1,98550840	21,0000006	10,9807062
20	$1 \cdot 10^{-2}$	1,00000000	1,99808200	21,0000000	10,9974324
25	$2 \cdot 10^{-3}$	1	1,99974681	21	10,9996609
30	$2 \cdot 10^{-4}$	1	1,99996663	21	10,9999553
35	$3 \cdot 10^{-5}$	1	1,99999561	21	10,9999941
40	$4 \cdot 10^{-6}$	1	1,99999942	21	10,9999992
45	$5 \cdot 10^{-7}$	1	1,99999992	21	10,9999999
50	$8 \cdot 10^{-8}$	1	1,99999999	21	11,0000000

IRODALOM

1. Popper, Gy.—Ferenczi, M.: Numerical Method for Solving Eigenvalue Problems of Linear Vibration Systems of Finite Degrees of Freedom. *Acta Techn. Hung.* **84** (1977) 85—96
2. Tarnai, T.—Popper, Gy.: Analysis of Flexural-Torsional Problem of Beams with Help of Series Expansion by Eigenfunctions of Quadratic Operator Pencils. *Acta Techn. Hung.* **89** (1979), 237—254
3. Lancaster, P.: Lambda-matrices and Vibrating Systems. Pergamon Press, Oxford 1966
4. Ralston, A.: A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill, 1965
5. Lancaster, P.: A Fundamental Theorem on Lambda-matrices with Applications. II. Difference Equations with Constant Coefficients. *Linear Algebra and Its Applications* **18** (1977) 213—222
6. Popper, Gy. — Gáspár, Zs.: The Solution of the Algebraic Eigenvalue Problem by Partitioning in Proceedings of the Euromech Colloquium No 112 (Editor A. Bosznay), Akadémiai Kiadó, (1980) 399-413

Numerical Method for Solution of the Eigenvalue Problem of a λ-Matrix of Degree m. — The paper discusses a numerically efficient iteration method suitable for determining the generalized eigenvalues and corresponding generalized eigenvectors of a λ-matrix of degree m and order n. In the convergence theorem the conditions for convergence are given. The method is a generalization of the Bernoulli's method for roots of polynomials to matrix polynomials.

Eine numerische Methode für die Lösung der Eigenwertaufgabe einer λ-Matrix vom Grade m. — Die Arbeit bespricht ein solches numerisch wirksames Iterationsverfahren welches geeignet ist zur Bestimmung der n verallgemeinerten Eigenwerte mit kleinstem Absolutwert einer λ-Matrix vom m-ten Grade und von n-ter Ordnung, sowie zur Bestimmung der zugehörigen verallgemeinerten Eigenvektoren. Im Konvergenzsatz werden die Konvergenzbedingungen angegeben. Das Verfahren ist eigentlich eine Verallgemeinerung des zur Bestimmung der Wurzeln von Polynomen dienenden Bernoullischen Verfahrens auf Matrixpolynome.