SZÉLERŐKKEL TERHELT FORGÁSHIPERBOLOIDHÉJAK

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

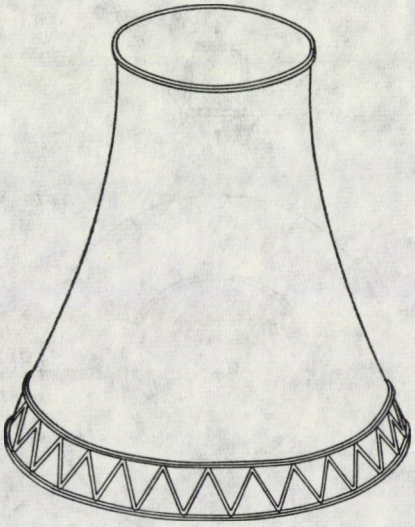
[Beérkezett: 1980 február]

Jelen tanulmány eljárást ismertet szélerőkkel terhelt forgáshiperboloidhéjak membránerőinek számítására. A szóban forgó eljárás az R. RABICH által kidolgozott módszer módosított alakja. Lényege, hogy a számítás során elvégeznő integrálási műveletek integranduszait egyszerű szerkezetű sorokkal helyettesíti. Ezeket a sorokat úgy szerkeszti meg, hogy az egyébként igen bonyolult integrálási műveletek egyszerű képletekkel tagonként legyenek végrehajthatók. Az eljárás már kevés számú tag számításbavétele esetében is kellő pontosságú.

1. Bevezetés

A műszaki gyakorlat szívesen alkalmaz hűtőtornyok céljaira egyköpenyű forgáshiperboloid alakú héjakat (1. ábra). Ezek az építmények általában nagy magassággal készülnek és mint ilyenek, jelentős szélerőknek vannak kitéve. Hatásukra a héjfalban számottevő belsőerők — főként membránerők — ébrednek.

A szélteher okozta membránerők számításával számos szakkönyv és folyóiratcikk foglalkozik [1—8]. Az ezekben közzétett számító eljárások közül a gyakorlat előszeretettel az R. RABICH által kidolgozott módszert [2] hasz-

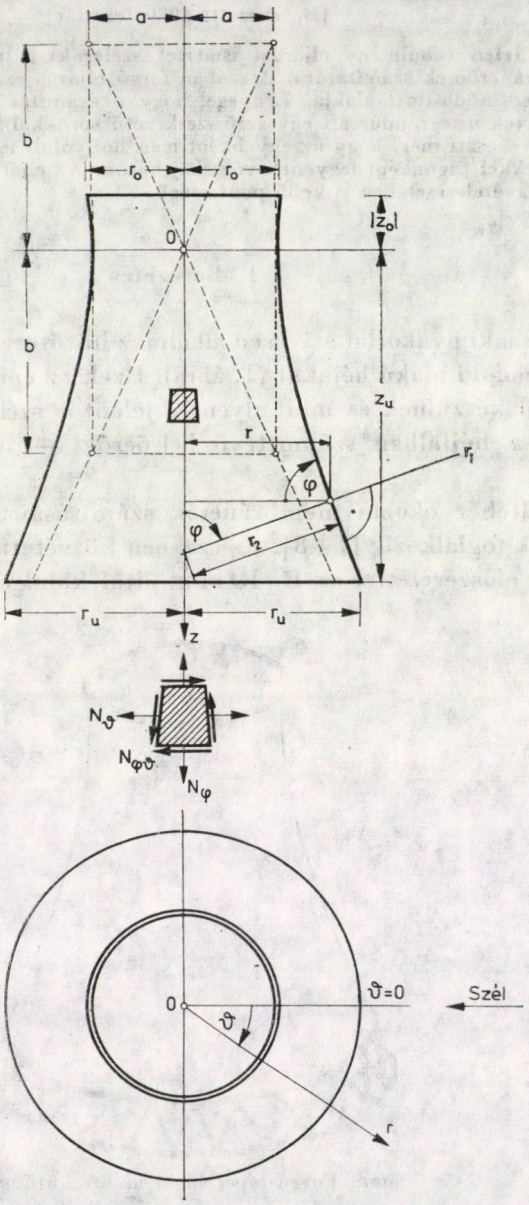


1. ábra. Forgáshiperboloid alakú hűtőtorony

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók Béla út 31.

nálja. Az alábbiakban ennek az eljárásnak módosított változatát mutatjuk be.

Az ismertetendő eljárás annyiban tér el az eredeti eljárástól, hogy a számítás során elvégzendő integrálási műveletek integranduszait egyszerű szerkezetű sorokkal helyettesíti. Ezeket a sorokat akként szerkeszti meg,



2. ábra. Jelölések

hogy az egyébként igen bonyolult integrálások egyszerű képletekkel tagonként legyenek végrehajthatók. Az eljárás már kevésszámú tag számításbavétele esetében is kellőképpen pontos.

A tárgyalások alapját a héjak membránelmélete alkotja. A héjfalban keletkező hajlító-csavaró hatásokat, így a talpgyűrűhöz való csatlakozás mentén keletkező, a membránszerű feszültségi állapotot zavaró hatásokat a tárgyalás során figyelmen kívül hagyjuk.

Feltesszük, hogy a héj felső pereme teljesen szabad, és ennek megfelelően megköveteljük, hogy a héj felső pereme mentén a meridiánerő, valamint a csúsztató erő zérus értékű legyen.

2. A héj jellemző méretadatai

Vizsgálataink a 2. ábrán feltüntetett forgáshiperboloidhéjra vonatkoznak. E héj meridiángörbéjének egyenlete

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{r^2 - a^2}, \tag{1a}$$

illetve

$$r = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}. \tag{1b}$$

A meridiánvonal görbületi sugara

$$r_1 = -\frac{\sqrt{[(a^2 + b^2)\, z^2 + b^4]^3}}{ab^4} = -\frac{b^2 r^3}{a^4 \sin^3 \varphi}, \tag{2}$$

a meridiánvonal normálisának a héj középfelületétől a héj forgástengelyéig terjedő hossza pedig

$$r_2 = \frac{a}{b^2}\sqrt{(a^2 + b^2)\, z^2 + b^4} = \frac{r}{\sin \varphi}. \tag{3}$$

A meridiánvonal φ lejtésszögének adatai:

$$\sin \varphi = \frac{b\sqrt{b^2 + z^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)\, z^2 + b^4}} = \frac{r}{r_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{az}{\sqrt{(a^2 + b^2)\, z^2 + b^4}} = \frac{a^2 z}{b^2 r_2} = \frac{a^2 z \sin \varphi}{b^2 r}, \tag{4a, b, c}$$

$$\tan \varphi = \frac{b\sqrt{b^2 + z^2}}{az} = \frac{b^2 r}{a^2 z}.$$

Egyes, a későbbiekben felhasználásra kerülő deriváltak:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{az}{b\sqrt{b^2 + z^2}} = \frac{a^2 z}{b^2 r},$$

$$\frac{d \sin\varphi}{dz} = -\frac{a^6 z \sin^3\varphi}{b^4 r^4}, \tag{5a, b, c}$$

$$\frac{d \cos\varphi}{dz} = \frac{ab^4}{\sqrt{[(a^2 + b^2) z^2 + b^4]^3}} = -\frac{1}{r_1} = \frac{a^4 \sin^3\varphi}{b^2 r^3}.$$

3. A héjra ható szélteher

Feltesszük, hogy a szél a héj palástfelületére csak merőleges erőket gyakorol. Ezeknek az erőknek a középfelület felszínegységére vonatkoztatott fajlagos értékét általában csak valamely

$$p = p(\varphi, \vartheta)$$

alakú, bonyolult szerkezetű függvénnyel lehet jellemezni. A gyakorlati esetekben egyszerűsítésként feltételezhető azonban, hogy a szóban forgó függvény egy $m = 0$, egy $m = 1$ és egy $m = 2$ periódusú tehertag összegeként

$$p = \sin\varphi \sum_0^2 p_m \cos m\vartheta, \quad (p_m = \text{konst}) \tag{6}$$

alakban kellő pontossággal kifejezhető. A $\vartheta = 0$ meridián vonal mentén

$$p = \sin\varphi \sum_0^2 p_m, \tag{6a}$$

amit nyomás esetében tekintünk pozitívnak.

4. A héjfalban keletkező feszítőerők

Periodikus szerkezetű tehertagok hatására a héjfalban periodikusan változó feszítőerők jönnek létre. Ezek periódusszáma a tehertagok periódusszámával egyezik. Ha a héjfalban keletkező feszítőerők φ, ϑ irányú alkotóit

$$N_\varphi, N_{\varphi\vartheta}, N_\vartheta$$

betűvel jelöljük (2. ábra), a héj φ, ϑ pontjában a feszítőerők értékét a következő képletekkel fejezhetjük ki:

$$N_\varphi = \sum_0^2 N^*_{\varphi m} \cos m\vartheta,$$

$$N_{\varphi\vartheta} = \sum_0^2 N^*_{\varphi\vartheta m} \sin m\vartheta\,, \tag{7}$$

$$N_\vartheta = \sum_0^2 N^*_{\vartheta m} \cos m\vartheta\,.$$

Az $N^*_{\varphi m}$, $N^*_{\varphi\vartheta m}$, $N^*_{\vartheta m}$ mennyiségek csupán a φ változó függvényei.

5. A Rabich-féle differenciálegyenletek

Tárgyalásaink alapját a periodikus megoszlású szélerőkkel terhelt forgásparaboloidhéjaknak R. Rabich által [2] felállított differenciálegyenletei alkotják. Ezek az egyensúlyi egyenletek m-periódusú tehertag esetében a jelen tanulmány jelöléseivel a következőképpen fejezhetők ki:

$$-\frac{d}{dz}(N^*_{\varphi m}\, r \sin\varphi) - \frac{m}{r^2}(N^*_{\varphi\vartheta m}\, r^2) = p_m\, r \cos\varphi\,,$$

$$-\frac{d}{dz}(N^*_{\varphi\vartheta m}\, r^2) + \frac{ma^4}{b^2 r^2}(N^*_{\varphi m}\, r \sin\varphi) = p_m \frac{mr^2}{\sin\varphi}\,, \tag{8a, b, c}$$

$$\frac{N^*_{\varphi m}}{r_1} - \frac{N^*_{\vartheta m}}{r_2} = p_m \sin\varphi\,.$$

Bevezetve az

$$U_m(z) = N^*_{\varphi m}\, r \sin\varphi\,, \tag{9a, b}$$

$$V_m(z) = N^*_{\varphi\vartheta m}\, r^2\,,$$

valamint a

$$G_m(z) = -p_m\, r \cos\varphi\,,$$

$$H_m(z) = -p_m \frac{mr^2}{\sin\varphi} \tag{10a, b}$$

jelöléseket, a (8a), (8b) differenciálegyenletek egyszerűbb alakja:

$$U'_m + \frac{m}{r^2} V_m = G_m\,, \tag{11a, b}$$

$$V'_m - \frac{ma^4}{b^2 r^2} U_m = H_m\,,$$

ahol

$$(\ldots)' \equiv \frac{d}{dz}(\ldots).$$

A fenti differenciálegyenletek alapján az ismeretlen U_m és V_m függvényeket akként kell meghatároznunk, hogy az

$$N^*_{\varphi m}|_{z=-z_0} = 0\,, \qquad N^*_{\varphi\vartheta m}|_{z=-z_0} = 0 \tag{12a, b}$$

peremfeltételek teljesedjenek.

Az $N^*_{\varphi m}$ és $N^*_{\varphi\vartheta m}$ feszítőerők számítására a (9) alattiak alapján felírható

$$N^*_{\varphi m} = \frac{U_m}{r \sin \varphi}, \qquad N^*_{\varphi\vartheta m} = \frac{V_m}{r^2} \tag{13}$$

összefüggéseket, az $N^*_{\vartheta m}$ gyűrűerő meghatározására pedig a (8c) egyenletből levezethető

$$N^*_{\vartheta m} = \frac{r_2}{r_1} N^*_{\varphi m} - p_m r_2 \sin \varphi = \frac{r_2}{r_1} N^*_{\varphi m} - p_m r \tag{14}$$

képletet használhatjuk.

A következőkben csak az U_m és V_m függvények számítását közöljük, mégpedig külön-külön az $m = 0$, $m = 1$ és $m = 2$ esetekre. A levezetendő képletekben az egűszerűbb írásmód kedvéért az $m = 0$, $m = 1$, illetve az $m = 2$ esetre utaló 0, 1, 2 indexet csak a p betű mellé tesszük ki, a többi betű mellől elhagyjuk.

6. Az m = 0 eset

Ilyenkor forgásszimmetrikus terheléssel van dolgunk. A héjra ható, a héj középfelületére merőleges megoszló teherrendszernek a középfelület felszínegységére vonatkoztatott fajlagos értéke a ϑ koordinátától független, értéke

$$p = p_0 \sin \varphi, \quad (p_0 = \text{konst}) \tag{15}$$

A jelen esetben a (10) képletek szerint

$$G = -p_0 r \cos \varphi, \qquad H = 0, \tag{16a, b}$$

és így a (11a, b) differenciálegyenletek helyett az alábbi egyszerűbb két egyenletet írhatjuk:

$$U' = G, \qquad V' = 0. \tag{17a, b}$$

Ezek szerint esetünkben

$$V = \text{konst},$$

illetve a (9b) összefüggés folytán

$$V = 0. \tag{18}$$

A fennforgó körszimmetria miatt ui. $N^*_{\varphi\theta} = 0$.

Az adott esetben tehát mindössze a (17a) differenciálegyenlettel kell dolgoznunk. Ennek megoldása a (16a) és (4b) alattiak figyelembevételével

$$U = -p_0 \frac{a^3}{b^2} \int R \, dz + K, \tag{19}$$

ahol

$$R = \frac{z}{a} \sin \varphi, \tag{20}$$

K pedig integrálási állandó.

A számítások során az R integranduszt az

$$R = A_2 \frac{z}{a} + A_4 \frac{z^3}{a^3} + A_6 \frac{z^5}{a^5} + \dots \tag{21}$$

sorral célszerű megközelíteni, ahol az $A_2, A_4, A_6, \dots$ értékek alkalmasan felveendő állandók. Ezzel az egyszerűsítéssel a (19) képlet helyett az

$$U = -p_0 \frac{a^4}{b^2} \left(\frac{A_2}{2} \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{A_4}{4} \cdot \frac{z^4}{a^4} + \frac{A_6}{6} \cdot \frac{z^6}{a^6} + \dots \right) + K \tag{22}$$

képletet írhatjuk.

A (22) képletben szereplő K integrálási állandót a (12a) peremfeltétel alapján határozhatjuk meg.

7. Az m = 1 eset

Most antimetrikus megoszlású, a héj középfelületére merőleges megoszló teherrendszerről van szó és ennek fajlagos értéke a $\vartheta = 0$ meridiánvonal mentén

$$p = p_1 \sin \varphi, \quad (p_1 = \text{konst}). \tag{23}$$

Ebben az esetben a (10) képletek szerint

$$G = -p_1 r \cos \varphi,$$

$$H = -p_1 \frac{r^2}{\sin \varphi}, \tag{24a, b}$$

a (11a) alattiak folytán pedig

$$V = r^2 (G - U'). \tag{25}$$

Így

$$V' = r^2 (G' - U'') + 2r \frac{dr}{dz} (G - U').$$

Innen az (5a) képlet felhasználásával

$$V' = r^2 (G' - U'') + \frac{2a^2 z}{b^2} (G - U').$$

Ha ezt az összefüggést a (11b) képletbe behelyettesítjük, az

$$r^2U'' + \frac{2a^2z}{b^2}U' + \frac{a^4}{b^2r^2}U = r^2G' + \frac{2a^2z}{b^2}G - H$$

egyenlethez jutunk, ezt pedig a következő alakra hozhatjuk:

$$U'' + \frac{2a^2z}{b^2r^2}U' + \frac{a^4}{b^2r^4}U = G' + \frac{2a^2z}{b^2r^2}G - \frac{1}{r^2}H. \tag{26}$$

Ámde a (24a), valamint (5a) és (5b) egyenletek szerint

$$G' = -p_1\left(\frac{a^2z}{b^2r}\cos\varphi + \frac{a^4\sin^3\varphi}{b^2r^2}\right).$$

Ha ezt a kifejezést a (26) differenciálegyenletbe betesszük, az

$$U'' + \frac{2a^2z}{b^2r^2}U' + \frac{a^4}{b^2r^4}U = Sp_1 \tag{27}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$S = -\left(\frac{3a^2z}{b^2r}\cos\varphi + \frac{a^4\sin^3\varphi}{b^2r^2} - \frac{1}{\sin\varphi}\right). \tag{28}$$

Az U függvény meghatározásához először is a (27) jelű inhomogén differenciálegyenlet homogén alakzatának, vagyis az

$$U_h'' + \frac{2a^2z}{b^2r^2}U_h' + \frac{a^4}{b^2r^4}U_h = 0 \tag{29}$$

differenciálegyenletnek az általános megoldását kell felírnunk, majd pedig a (27) alatti inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kell előállítanunk.

7.1. *A homogén differenciálegyenlet általános megoldása*

A (29) jelű homogén differenciálegyenlet általános megoldása egyszerű számítással igazolhatóan

$$U_h = \frac{1}{r}\left(K_1 + K_2\frac{z}{a}\right), \tag{30}$$

ahol a K_1 és K_2 értékek tetszőleges állandók.

Azonnal megadható az U_h függvényhez rendelhető V_h függvény is. Homogén esetről lévén ui. szó, így a (25) képlet szerint

$$V = r^2(G - U_h') = -r^2U_h'.$$

Innen a (30) alattiak felhasználásával

$$V = -r^2\left(-\frac{a^2z}{b^2r^3}K_1 - \frac{az^2}{b^2r^3}K_2 + \frac{1}{ar}K_2\right),$$

illetve az (1a) alattiak behelyettesítésével

$$V = \frac{a}{r}\left(\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{z}{a}K_1 - K_2\right). \tag{31}$$

7.2. *Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása*

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának számításakor a (28) képlettel defineált S kifejezést az

$$S = -\frac{a}{r}\left(B_2 + B_4\frac{z^2}{a^2} + B_6\frac{z^4}{a^4} + \ldots\right) \tag{32}$$

sorral célszerű megközelíteni, ahol a $B_2, B_4, B_6, \ldots$ értékek alkalmasan felveendő állandók. Ekként eljárva, a (27) differenciálegyenlet helyett az

$$U_l'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2}U_l' + \frac{a^4}{b^2 r^4}U_l =$$

$$= -p_1\frac{a}{r}\left(B_2 + B_4\frac{z^2}{a^2} + B_6\frac{z^4}{a^4} + \ldots\right) \tag{33}$$

differenciálegyenlettel dolgozhatunk.

Minthogy a (30) alattiak szerint a (29) jelű homogén differenciálegyenletnek egymástól lineárisan független két megoldása ismeretes, nevezetesen

$$U_{h1} = \frac{1}{r} \quad \text{és} \quad U_{h2} = \frac{z}{r}, \tag{34}$$

a keresett U_l partikuláris megoldás előállítására az állandók variálásának a módszerét alkalmazhatjuk. Ehhez szükségünk van az

$$U_{h1}' = -\frac{a^2 z}{b^2 r^3} \quad \text{és} \quad U_{h2}' = -\frac{a^2 z^2}{b^2 r^3} + \frac{1}{r} = \frac{a^2}{r^3}$$

deriváltakra és a

$$\Phi_1(z) = \int \frac{-U_{h2}\,S}{U_{h1}\,U_{h2}' - U_{h1}'\,U_{h2}}\,dz = \int -U_{h2}\,S\,r^2\,dz\,,$$

$$\Phi_2(z) = \int \frac{U_{h1}\,S}{U_{h1}\,U_{h2}' - U_{h1}'\,U_{h2}}\,dz = \int U_{h1}\,S\,r^2\,dz$$

integrálkifejezések értékére. Ezeket ismerve, a keresett partikuláris megoldást

$$U_i = \Phi_1 U_{h1} + \Phi_2 U_{h2}$$

alakban fejezhetjük ki. A számítás eredménye

$$U_i = -p_1 \frac{a^3}{r} \left(\frac{B_2}{2} \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{B_4}{12} \cdot \frac{z^4}{a^4} + \frac{B_6}{30} \cdot \frac{z^6}{a^6} + \ldots \right). \tag{35}$$

Ezek után az U_i függvénynek megfelelő V_i függvényt a (24a) összefüggés figyelembevételével a (25) alattiak utasítása szerint határozhatjuk meg:

$$V_i = p_1 \operatorname{arz} \left[\frac{B_2}{1} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \frac{B_4}{3} \cdot \frac{z^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{B_6}{5} \cdot \frac{z^4}{a^4} \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \ldots \right] - p_1 r^3 \cos \varphi. \tag{36}$$

7.3. *Az U és V függvények*

A homogén és inhomogén megoldások birtokában a keresett U és V függvényt a következőképpen állíthatjuk elő:

$$U = U_h + U_i, \qquad V = V_h + V_i. \tag{37}$$

Az U_h (30) jelű képletében szereplő K_1 és K_2 határozatlan paraméterek értékét a (12) peremfeltétel figyelembevételével kell megállapítani.

8. Az m = 2 eset

Ebben az esetben a héj középfelületére merőleges, periodikus megoszlású teherrendszerről van szó. Ennek fajlagos értéke a $\vartheta = 0$ meridiánvonal mentén

$$p = p_2 \sin \varphi, \quad (p_2 = \text{konst}). \tag{38}$$

Most a (10) képletek szerint

$$G = -p_2 r \cos \varphi, \qquad H = -p_2 \frac{2r^2}{\sin \varphi}, \tag{39a, b}$$

a (11a) képlet szerint pedig

$$V = \frac{r^2}{2}(G - U'). \tag{40}$$

Így

$$V' = \frac{r^2}{2}(G' - U'') + r\frac{dr}{dz}(G - U').$$

Ezt az értéket, valamint az (5a) összefüggést a (11b) képletbe bevezetve, az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = G' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} G - \frac{2}{r^2} H$$

egyenlethez jutunk, innen pedig a

$$G' = -p_2 \left(\frac{a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} \right)$$

összefüggés felhasználásával az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = T p_2 \tag{41}$$

differenciálegyenletet vezethetjük le, ahol

$$T = -\left(\frac{3a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} - \frac{4}{\sin \varphi} \right). \tag{42}$$

Feladatunk tárgyalása során ebben az esetben is először a (4) jelű inhomogén differenciálegyenlet homogén alakzatának, vagyis az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = 0 \tag{43}$$

homogén differenciálegyenletnek általános megoldását kell meghatároznunk, majd az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kell előállítanunk.

8.1. *A homogén differenciálegyenlet általános megoldása*

A keresett homogén megoldás ebben az esetben egyszerű próbával igazolhatóan

$$U_h = \frac{1}{r^2} \left(K_1 + K_2 \frac{z}{a} - K_1 \frac{z^2}{b^2} \right), \tag{44}$$

ahol K_1 és K_2 tetszőleges állandók.

Most a homogén megoldáshoz tartozó V függvény a (40) képlet szerint

$$V_h = \frac{1}{r^2}\left(K_1 \frac{2a^2 z}{b^2} - K_2 \frac{a}{2} + K_2 \frac{az^2}{2b^2}\right). \tag{45}$$

8.2. *Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása*

A (41) jelű inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározásához a (42) képlettel defineált T kifejezést közelítésképpen a

$$T = -\left(C_2 + C_4 \frac{z^2}{a^2} + C_6 \frac{z^4}{a^4} + \ldots\right) \tag{46}$$

sorral célszerű helyettesíteni, ahol a $C_2, C_4, C_6 \ldots$ értékek alkalmasan felvett állandók. Ezzel az egyszerűsítéssel a (41) differenciálegyenlet helyett a következőt írhatjuk:

$$U_i'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r} U_i' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U_i = -p_2 \frac{a^2}{r^2}\left(C_2 + C_4 \frac{z^2}{a^2} + C_6 \frac{z^4}{a^4} + \ldots\right). \tag{47}$$

Minthogy a (44) képlet alapján a homogén differenciálegyenlet két egymástól lineárisan független megoldása ismeretes, nevezetesen

$$U_{h1} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) = \frac{1}{r^2}, \quad \text{és} \quad U_{h2} = \frac{z}{r^2}, \tag{48}$$

így az inhomogén differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldását ebben az esetben is az állandók variálásának a módszerével határozhatjuk meg. Az idevágó számítás során szükségünk van az

$$U_{h1}' = -\frac{2a^2 z^3}{b^4 r^4} - \frac{2a^2 z}{b^2 r^4} - \frac{2z}{b^2 r^2} = -\frac{4z}{b^2 r^2},$$

$$U_{h2}' = -\frac{2a^2 z^2}{b^2 r^4} + \frac{1}{r^2}$$

deriváltakra, valamint az alábbi két integrálkifejezésre:

$$\Psi_1(z) = \int \frac{-U_{h2} T}{U_{h1} U_{h2}' - U_{h1}' U_{h2}} dz - \int U_{h2} T a^2 r^2 dz,$$

$$\Psi_2(z) = \int \frac{U_{h1} T}{U_{h1} U_{h2}' - U_{h1}' U_{h2}} dz = \int U_{h1} T a^2 r^2 dz.$$

Maga a keresett partikuláris megoldás a következőképpen adódik:

$$U_i = \Psi_1 U_{h1} + \Psi_2 U_{h2}\,.$$

A kijelölt számításokat elvégezve, az alábbi képletet kapjuk:

$$U_i = -p_2 \frac{a^4}{r^2}\left[C_2\left(\frac{z^2}{2a^2} + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{z^4}{6a^4}\right) + C_4\left(\frac{z^4}{12a^4} + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{z^6}{20a^6}\right) + \right.$$
$$\left. + C_6\left(\frac{z^6}{30a^6} + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{z^8}{42a^8}\right) + \ldots\right]. \tag{49}$$

Ezek után az U_i függvénynek megfelelő V_i függvényt a (39a) alattiak figyelembevételével a (40) képlet szerint határozhatjuk meg:

$$V_i = p_2 a^3 \frac{a^2}{b^2}\left[C_2\,\frac{z}{a}\left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{z^2}{2r^2} + \frac{2z^2}{6a^2} - \frac{a^2}{6b^2}\,\frac{z^4}{a^2r^2}\right) + \right.$$
$$+ C_4\,\frac{z^3}{a^3}\left(\frac{2b^2}{12a^2} - \frac{z^2}{12r^2} + \frac{3z^2}{20a^2} - \frac{a^2}{20b^2}\cdot\frac{z^4}{a^2r^2}\right) +$$
$$\left. + C_6\,\frac{z^5}{a^5}\left(\frac{3b^2}{30a^2} - \frac{z^2}{30r^2} + \frac{4z^2}{42a^2} - \frac{a^2}{42b^2}\cdot\frac{z^4}{a^2r^2}\right) + \ldots\right] -$$
$$- p_2\,\frac{a^3}{2}\cdot\frac{r^3}{a^3}\cos\varphi. \tag{50}$$

8.3. *Az U és V függvény*

A homogén és inhomogén megoldásokat ismerve, a keresett U és V függvényeket a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} U &= U_h + U_i, \\ V &= V_h + V_i. \end{aligned} \tag{51}$$

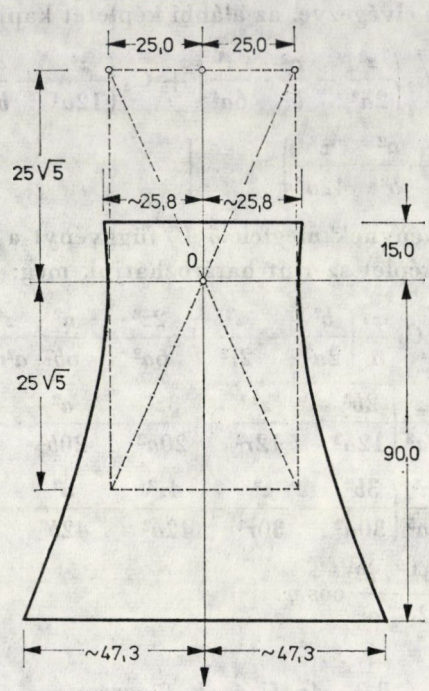
A fenti kifejezések képleteiben szereplő K_1 és K_2 integrálási állandók értékét a (12) peremfeltételek alapján kell megállapítani.

9. Az R, S, T függvények

Az előzőekben az R, S, T függvények számítására egyszerű szerkezetű olyan sorokat vezettünk be, amelyek lehetővé tették, hogy a feladat megoldásához szükséges, egyébként bonyolult integrálási műveleteket tagonként zárt alakban végezzük el.

Az alábbiakban a 3. ábrán feltüntetett méretekkel jellemzett forgáshiperboloidhéj kapcsán ellenőrizni fogjuk, hogy a közölt sorokkal számított

R, S, T függvényértékek mennyiben térnek el a pontos R, S, T értékektől, ha egyszerűsítésként ezeknek a soroknak csak az első, vagy legfeljebb csak az első két tagját vesszük számításba.



3. ábra. Gyakorlati példa

Az ellenőrző számításhoz először is különböző z/a helyeken az r/a, $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ értékeket határoztuk meg. Ennek a számításnak az eredményét az 1. táblázatba foglaltuk. Az R, S, T függvények közelítő értékének számításakor ezekkel a táblázati értékekkel dolgozunk.

1. táblázat

Számítási értékek

z/a	r/a	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$
−0,6	1,035 374	0,993 350	−0,115 129
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000 000
+0,6	1,025 374	0,993 350	+0,115 129
+1,2	1,134 901	0,978 363	+0,206 897
+1,8	1,283 745	0,962 857	+0,270 014
+2,4	1,466 970	0,950 416	+0,310 981
+3,0	1,673 320	0,941 316	+0,337 526
+3,6	1,895 257	0,934 816	+0,355 133

9.1. *Az R függvény*

Alkalmazzuk a közelítő R értékek számítására a (32) képlet egytagos alakját:

$$R \cong A_2 \frac{z}{a} .$$

Az A_2 paramétert vegyük fel úgy, hogy a $z/a = 2{,}4$ helyen R pontos és közelítő értéke egyezzék meg egymással. Ez az egyezés akkor következik be, ha

$$A_2 = 0{,}950.$$

A közelítő R függvény tehát

$$R \cong 0{,}950 \frac{z}{a} . \tag{52}$$

Az R függvény pontos értékét, valamint az (52) képlettel számított közelítő értékét a 2. táblázatba foglaltuk. Mint látható, a vizsgált esetben a kétféle R érték csak kevéssé tér el egymástól.

2. táblázat

Az R függvény pontos és közelítő értéke

z/a	Pontos érték	Közelítő érték*
−0,6	−0,596	−0,570
0,0	0,000	0,000
+0,6	+0,596	+0,570
+1,2	+1,174	+1,140
+1,8	+1,733	+1,711
+2,4	+2,281	+2,281
+3,0	+2,824	+2,851
+3,6	+3,365	+3,421

* egyparaméteres megoldás esetében

9.2. *Az S függvény*

Használjuk a közelítő S értékek számítására a (32) képletet kéttagos alakban:

$$S \cong -\frac{a}{r}\left(B_2 + B_4 \frac{z^2}{a^2}\right).$$

Az ebben szereplő B_2 és B_4 paramétereket vegyük úgy számításba, hogy a $z/a = 0$ és $z/a = 3,0$ helyeken a pontos és a közelítő S értékek egyezzenek meg egymással. Az egyezés az adott esetben akkor következik be, ha

$$B_2 = -0{,}8,$$

$$B_4 = -0{,}03.$$

3. táblázat

Az S függvény pontos és közelítő értéke

z/a	Pontos érték	Közelítő érték*
−0,6	0,784	0,783
0,0	0,800	0,800
+0,6	0,784	0,783
+1,2	0,745	0,743
+1,8	0,703	0,699
+2,4	0,667	0,663
+3,0	0,640	0,640
+3,6	0,620	0,627

* kétparaméteres megoldás esetében

Ekként eljárva, az S függvény közelítő értékének számítására az

$$S \cong -\frac{a}{r}\left(-0{,}8 - 0{,}03\frac{z^2}{a^2}\right) \tag{53}$$

képletet kaptuk.

Az S függvény pontos értékét, valamint az (53) képlettel számított közelítő értékét a 3. táblázat tünteti fel. A kétféle S érték, mint megállapítható, csak lényegtelenül tér el egymástól.

9.3. *A T függvény*

Alkalmazzuk ennek közelítő számítására a (46) képletet egytagos alakban, vagyis legyen

$$T \cong -C_2.$$

A C_2 értéket válasszuk meg úgy, hogy a $z/a = 1, 2$ helyen a pontos és a közelítő T érték egyezzék meg egymással. Ez az eset akkor következik be, ha

$$T = 3{,}812. \tag{54}$$

A T függvény pontos értékét, valamint az (54) képlet szerinti közlítő értékét a 4. táblázat állítja egymással szembe. Mint megállapítható, a kétféle T érték csak kevéssé tér el egymástól. Ez a körülmény, valamint az R és S függvények esetében tett hasonló értelmű megállapítás is, a javasolt közelítés célszerű és megengedhető voltát igazolja.

4. táblázat

A T függvény pontos és közelítő értéke

z/a	Pontos érték	Közelítő érték*
−0,6	3,804	3,812
0,0	3,800	3,812
+0,6	3,804	3,812
+1,2	3,812	3,812
+1,8	3,819	3,812
+2,4	3,824	3,812
+3,0	3,827	3,812
+3,6	3,829	3,812

* egyparaméteres megoldás esetében

IRODALOM

1. DISCHINGER, FR.: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung. *Der Bauingenieur* **17** (1936), H. 23—29
2. RABICH, R.: Die Membrantheorie der einschalig hyperbolischen Rotationsschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 7 (1953), 310—318, 320
3. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959, 22—28
4. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke, 5. Aufl. Springer-Verlag, Wien 1959, 352—386
5. NOVOSHILOV, V. V.: The Theory of Thin Shells. Grooningen. The Netherlands, Noordhoff Ltd, 1959
6. KRÄTZIG, W.: Schnittgrößen und Verformung windbeanspruchter Naturzugkühltürme. *Beton u. Stahlbetonbau* **10** (1960), 247—255
7. GRAVINA, B. B. J.: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961
8. HAMPE, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke, Verlag für Bauwesen, Band I—V. Berlin 1963—1964
9. ALBASINY, E. L.: Equilibrium Stresses in Hyperbolic Cooling Towers. *International Symposium on Shell Structures in Engineering Practice*, Budapest Hungary, August 1965. **2**, 181—198
10. BANERJEE, S. P.: Water Tower of Novel Design. *IASS Bulletin* **22** (1965), 53
11. TOTTENHAM, H.: Stresses in Hyperbolic Cooling Towers due to Wind Loading. *IASS Bulletin* **32** (1967), 3—5
12. LEE, S. L.—GOULD, P. L.: Hyperbolic Cooling Towers under Wind Loading. *J. of the Struc. Div. ASCE* **93**, № ST5, Oct. 1967, 487—514
13. PADUART, A.: On Problems of Cooling Towers. *IASS Bulletin* **36** (1968), 45—50
14. KOLLÁR, L.: Schalenkonstruktionen. *Beton-Kalender* 1974. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1974, 351—354
15. HAMPE, E.: Kühltürme. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1979

Hyperbolic Shells of Revolution due to Wind Loading. — Present paper describes a method for the determination of membrane forces in hyperbolic shells of revolution subject to wind forces. This method is a version of the one published by R. Rabich. Its chief idea is the substitution of the integrands figuring in the formulae by appropriate series in such a way that the integrations can be very simply performed member by member. The new method is sufficiently exact even if taking into account only some first members of the series.

Windbelastete hyperbolische Rotationsschalen. — Der Aufsatz beschreibt eine Methode zur Berechnung der Membrankräfte in windbelasteten hyperbolischen Rotationsschalen. Diese Methode ist eine modifizierte Variante des von R. Rabich aufgestellten Rechenverfahrens. Das Wesentliche des neuen Verfahrens ist die Ersetzung der Integranden durch Zahlenreihen die so konstruiert werden, daß die Integrationen gliedweise einfach durchführbar seien. Das Verfahren ist schon bei Verwendung von nur aus wenig Gliedern bestehende Reihen genügend genau.