

MEGJEGYZÉS A RUGÓKKAL MEGTÁMASZTOTT RUGALMAS SZERKEZETEK SZILÁRDSÁGI SZÁMÍTÁSÁHOZ

PÁCZELT ISTVÁN* – HERPAI BÉLA**
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1980. január 9-én]

A tanulmány a lágy rugókkal megtámasztott rugalmas rendszer szilárdsági számítását a rugalmas rendszer két szerkezeti egységre (alszerkezetre) történő felbontása révén tárgyalja. Feltételezve, hogy a lágy rugók a koordinátarendszer függőleges tengelyével párhuzamosak, az első alszerkezetet vízszintes síkkal párhuzamos rugókkal összekapcsolt megtámasztandó szerkezet, míg a második alszerkezetet a függőleges irányú lágy rugók alkotják. Az első alszerkezetet egy pontban úgy fogjuk meg, hogy mint merev testnek függőleges irányú elmozdulását és a vízszintes tengelyek körül történő szögelfordulását megakadályozzuk. Az alszerkezetek kinematikai illesztési- és az első alszerkezet egyensúlyi egyenleteinek megoldásából nyert függőleges irányú rugóerők és a merevtestszerű elmozdulás vektorának ismeretében a vizsgált szerkezet szilárdságtani viszonyai a szuperpozíciós elv alapján tisztázhatók. A feladat fenti felépítése lehetővé teszi a függőleges irányú rugók talajtól történő elválásának figyelembevételét is. Ebben az esetben a rugóerők és a merevtestszerű elmozdulás vektora, kvadratikusan programozási feladat megoldásával nyerhető.

I. Bevezetés

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan szerkezetekkel, amelyek a húzó-nyomó igénybevételt felvevő rugalmas rugókkal vannak megtámasztva.

A rugók bekötési pontjainak térbeli elhelyezkedése természetesen olyan kell, hogy legyen, hogy a szerkezetre ható bármilyen erőrendszerrel az adott hatásvonulú rugókban keletkező támasztóerők egyensúlyi erőrendszert alkotásának. Ebből adódóan minimálisan 6 db lineárisan független irányú rugóra van szükség.

A rugók merevségéről feltételezzük, hogy a függőleges irányú, a koordináta-rendszer Z tengelyével párhuzamos (RZ darab) rugók merevsége lényegesen kisebb, mint az XY síkkal párhuzamos síkokban elhelyezkedő (RXY darab) rugók merevsége.

A rugók említett kettéválasztása miatt az XY síkkal párhuzamos merevtestszerű mozgást 3 db nem egy pontba bekötött rugóval, a függőleges mozgást pedig minimálisan 3 db nem egy közös síkban fekvő, Z irányú rugóval tudjuk korlátozni.

Mivel a Z irányú rugók lágyak, ezért a megtámasztott szerkezet pontjainak függőleges eltolódásai nagyságrendekkel meghaladhatják a szerkezet pontjainak egymáshoz képest való elmozdulását.

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37.

** Dr. Herpai Béla, 3515 Miskolc, Kulich Gy. u. 13.

Amennyiben a szerkezet szilárdsági számítását végeeselemes elmozdulási módszerrel oldjuk meg [1], vagyis a megtámasztandó rugalmas szerkezet potenciális energiájához hozzáadjuk a rugókban keletkező potenciális energiát — amelyet a csomóponti elmozdulásvektoron keresztül fejezünk ki —, majd azt minimalizáljuk, rosszul kondicionált együtthatójú algebrai egyenlet-rendszerhez jutunk. Az így kapott mátrix pontos invertálása kérdésessé válik.

Ennek a számítástechnikai bizonytalanságnak az elkerülésére javasoljuk az alábbiakban ismertetendő módszert.

2. Alszerkezetek felvétele

A vizsgált rugalmas rendszert két szerkezeti egységre (alszerkezetre) bontjuk fel, majd ezeket egyrészt illesztjük, másrészt a merevtestszerű mozgással rendelkező alszerkezet egyensúlyát is kielégítjük. Esetünkben az első alszerkezetet a vízszintes rugókkal összekapcsolt megtámasztandó szerkezet, míg a második alszerkezetet RZ darab egymástól függetlenül álló Z irányú rugó alkotja. Az 1. alszerkezetet a koordináta-rendszer kezdőpontjában ideiglenesen úgy fogjuk meg, hogy mint merev testnek Z irányú elmozdulását, X és Y tengelykörüli elfordulását megakadályozzuk. Nevezzük ezt a megfogást röviden befalazásnak.

Ily módon a megtámasztandó szerkezet elmozdulásállapotát az alábbi „terhelések” révén kialakuló állapotok szuperponálásával állítjuk elő:

az 1. esetben: a befalazott 1. alszerkezetre az ismert erőrendszer hat;
 a 2. esetben: a befalazott 1. alszerkezetre Z irányú rugókban keletkező támasztóerők hatnak;

a 3. esetben: a befalazási kényszer feloldásából származó merevtestszerű mozgásból adódó állapotot vizsgáljuk.

A Z irányú rugóerők és a befalazás merevtestszerű elmozdulását az alábbiakban ismertetendő (7), (21) egyenletrendszerekből határozzuk meg.

2.1. *A kinematikai illesztési egyenlet*

A befalazott 1-es alszerkezetre működő terhelésből és a Z irányú rugók bekötési pontjaiban ható egységnyi erőkből származó elmozdulásmezőből (amit pl. végeeselemes elmozdulásmódszerrel határozunk meg) kiválaszthatók a Z irányú rugók bekötési pontjaiban fellépő függőleges elmozdulások. Jelölje ezeket f_I^1 , illetve $H_{IJ}^1 I = 1, \dots, RZ$, $J = 1, \dots, RZ$. Itt H_{IJ}^1 hatásfüggvény — az I -ik pontban fellépő Z irányú elmozdulás a J -ik pontban ható függőleges egységnyi erő hatására.

A merevtestszerű elmozdulásból származó Z irányú rugóbekötési pontok függőleges elmozdulása

$$d_I = W_0 + \psi_0^X Y_I - \psi_0^Y X_I, \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (1)$$

ahol W_0, ψ_0^X, ψ_0^Y — a koordináta-rendszer kezdőpontjának függőleges elmozdulása és környezetének X és Y tengely körüli merevtestszerű szögelfordulása.

A függőleges rugókban keletkező r_I ($I = 1, \dots, RZ$) rugóerők ismeretében a befalazás elhagyásával nyert 1. alszerkezetnek a Z irányú rugók bekötési pontjaiban ébredő függőleges elmozdulása:

$$\sum_{J=1}^{RZ} H_{IJ}^1 r_J + f_I^1 + d_I = W_I^1. \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (2)$$

Bevezetve a $\mathbf{H}^1 = [H_{IJ}^1]$ hatásmátrixot, az

$$\mathbf{f}^{1*} = [f_1^1, \dots, f_{RZ}^1]$$

terhelésből származó ismert elmozdulások vektorát¹ és a

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{RZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & -X_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_{RZ} & -X_{RZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ \psi_0^X \\ \psi_0^Y \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u}_R \quad (3)$$

merevtestszerű elmozdulás vektort, (2) helyett tömör formában a

$$\mathbf{w}^1 = \mathbf{G} \mathbf{u}_R + \mathbf{H}^1 \mathbf{r} + \mathbf{f}^1 \quad (4)$$

vektor egyenletet írhatjuk.

Mivel a 2. alszerkezetet a Z irányú rugók alkotják, így elmozdulásuk

$$W_I^2 = -\frac{r_I}{c_I^Z} + f_I^2 \quad (I = 1, \dots, RZ)$$

alakban írható fel, ahol f_I^2 — a rugó földhöz kapcsolódó pontjának elmozdulása (kinematikai teher), a c_I^Z [N/mm] — rugóállandó.

Tömörebb formában áll a

$$\mathbf{w}^2 = -\mathbf{H}^2 \mathbf{r} + \mathbf{f}^2 \quad (5)$$

kifejezés, ahol

$$\mathbf{H}^2 = \left\langle \frac{1}{c_1^Z}, \dots, \frac{1}{c_{RZ}^Z} \right\rangle$$

diagonál mátrix,

$$\mathbf{w}^{2*} = [W_1^2, \dots, W_{RZ}^2], \quad \mathbf{f}^{2*} = [f_1^2, \dots, f_{RZ}^2].$$

¹ * A transzponálás jele.

Ezek után az alszerkezetek

$$W_I^1 - W_I^2 = 0 \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (6)$$

illesztési egyenletrendszerre (4) és (5) figyelembevételével

$$\mathbf{G}u_R + (\mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2) \mathbf{r} + \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

2.2. Az egyensúlyi egyenlet

Az 1. alszerkezet befalazási pontjában ébredő támasztóerőrendszernek — az egész szerkezet szempontjából vizsgálva — zérusnak kell lennie, vagyis az 1. alszerkezetre ható ismert terhelő erőrendszer és a rugóerők egyensúlyi erőrendszer kell, hogy alkossanak (a Z irányú erők vetülete; az X és Y tengelyekre számított nyomatéka zérus kell, hogy legyen).

Legyen az (X_J, Y_J, Z_J) koordinátájú pontba bekötött vízszintes rugó rugóállandója c_J , a rugó hatásvonalának X tengellyel bezárt szöge α_J . Ekkor a befalazott 1. alszerkezetenél a terhelésből származó J -ik rugóirányú elmozdulás

$$\Delta_J^0 = U_J^0 \cos \alpha_J + V_J^0 \sin \alpha_J, \quad (8)$$

míg a Z irányú egységnyi erőkből származó elmozdulás

$$\Delta_{IJ}^Z = U_{IJ}^Z \cos \alpha_I + V_{IJ}^Z \sin \alpha_I, \quad (9)$$

ahol U_J^0, V_J^0 az ismert terhelésből származó J pontbeli X és Y irányú elmozdulásokat, míg U_{IJ}^Z, V_{IJ}^Z a J -ik helyen ható függőleges egységnyi teherből az I -ik helyen fellépő X és Y irányú elmozdulásokat jelöli.

A rugókban keletkező $c_J \Delta_J^0$ nagyságú erők X és Y tengelyekre

$$M'_X = \sum_{J=1}^{RXY} c_J \Delta_J^0 Z_J \sin \alpha_J, \quad (10)$$

$$M'_Y = - \sum_{J=1}^{RXY} c_J \Delta_J^0 Z_J \cos \alpha_J \quad (11)$$

nyomatékot adnak. A Z irányú rugókban keletkező r_J nagyságú erők, továbbá hatásukra az XY síkkal párhuzamos rugókban keletkező rugóerőkkel együtt

$$M''_X = \sum_{J=1}^{RZ} Y_J r_J + \sum_{I=1}^{RXY} \sum_{J=1}^{RZ} c_I \Delta_{IJ}^Z Z_I \sin \alpha_I r_J, \quad (12)$$

$$M''_Y = - \sum_{J=1}^{RZ} X_J r_J - \sum_{I=1}^{RXY} \sum_{J=1}^{RZ} c_I \Delta_{IJ}^Z Z_I \cos \alpha_I r_J \quad (13)$$

nyomatékot fejtenek ki az X és Y tengelyekre.

Az ismert erőrendszer eredőjének Z irányú komponensét jelölje F_Z^0 , míg X és Y tengelyekre kifejtett nyomatékát M_X^0, M_Y^0 .

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a befalazásnál tett $W_0 = 0, \psi_0^X = 0, \psi_0^Y = 0$ korlátokat feloldva a megtámasztandó szerkezet merevtestszerű mozgásának hatására a rugókban mekkora erő keletkezik, s azoknak milyen feltételeket kell kielégíteniük.

Az említett korlátok feloldásából következik, hogy az X tengely körüli egységnyi ψ_0^X szögelfordulás okozta merevtestszerű mozgásból adódóan a J -ik XY síkkal párhuzamos rugóban

$$\Delta J^{RX} = (-Z_J + V_0^X + \varphi_Z^X X_J) \sin \alpha_J + (U_0^X - \varphi_Z^X Y_J) \cos \alpha_J, \quad (14)$$

míg az Y tengely körüli egységnyi ψ_0^Y szögelfordulás hatására

$$\Delta J^{RY} = (Z_J + U_0^Y - \varphi_Z^Y Y_J) \cos \alpha_J + (V_0^Y + \varphi_Z^Y X_J) \sin \alpha_J \quad (15)$$

elmozdulás lép fel, ahol az egységnyi ψ_0^X ($X \leftrightarrow Y$) szögelfordulásakor fellépő U_0^X, V_0^X és φ_Z^X ($X \leftrightarrow Y$) a befalazási pont X és Y tengelyirányú elmozdulása, ill. környezetének Z tengely körüli elfordulása.

A Z irányú eltolódásból a szóban forgó rugókban — lineáris elméletet feltételezve — erő nem keletkezik.

A merevtestszerű mozgásnak olyannak kell lennie, hogy az X és Y irányú vetületi egyenletek és a Z tengelyre felírt nyomatéki egyenlet teljesüljenek. Ezekből a feltételekből egységnyi ψ_0^X és ψ_0^Y szögelfordulásokhoz tartozóan $U_0^X, V_0^X, \varphi_Z^X$ ($X \leftrightarrow Y$) a (16) alatti egyenletrendszerekből határozhatók meg.

$$\begin{bmatrix} \Sigma c_J (CJ)^2 & \Sigma c_J SJCJ & \Sigma c_J QJ CJ \\ \Sigma c_J SJ CJ & \Sigma c_J (SJ)^2 & \Sigma c_J QJ SJ \\ \Sigma c_J QJ CJ & \Sigma c_J QJSJ & -\Sigma c_J (QJ)^2 CJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^X & U_0^Y \\ V_0^X & V_0^Y \\ \varphi_Z^X & \varphi_Z^Y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma c_J Z_J CJ SJ & -\Sigma c_J Z_J (CJ)^2 \\ \Sigma c_J Z_J (SJ)^2 & -\Sigma c_J Z_J SJ CJ \\ -\Sigma c_J Z_J QJ SJ & \Sigma c_J Z_J QJ CJ \end{bmatrix} \quad (16a, b)$$

ahol:

$$CJ = \cos \alpha_J; SJ = \sin \alpha_J; QJ = X_J \sin \alpha_J - Y_J \cos \alpha_J.$$

Amennyiben $\alpha_J = 0, \pi/2$, vagyis a rugók vagy az X , vagy az Y tengellyel párhuzamosak, úgy a (16a, b) egyenletrendszerek kétismeretlenesek lesznek ((16a)-nál V_0^X, φ_Z^X , (16b)-nél U_0^Y, φ_Z^Y). Továbbá, ha a rugók az XY síkban fekszenek, a (16a, b) egyenletrendszerek homogének, megoldásuk triviális.

A (16a, b) megoldásának ismeretében az XY síkkal párhuzamos rugókban, a megtámasztandó szerkezetre hatóan $\psi_0^X = 1$ -nél.

$$\begin{aligned} F_{XJ}^{RX} &= -c_J \Delta_J^{RX} \cos \alpha_J, \\ F_{YJ}^{RX} &= -c_J \Delta_J^{RX} \sin \alpha_J, \end{aligned} \quad (17a, b)$$

$\psi_0^Y = 1$ szögelfordulásnál pedig

$$\begin{aligned} F_{XJ}^{RY} &= -c_J \Delta_J^{RY} \cos \alpha_J, \\ F_{YJ}^{RY} &= -c_J \Delta_J^{RY} \sin \alpha_J \end{aligned} \quad (18a, b)$$

nagyságú erők keletkeznek, míg nyomatékuk az X és Y tengelyekre tetszőleges ψ_0^X és ψ_0^Y értéknél

$$M_X'' = - \sum_{J=1}^{RXY} (F_{YJ}^{RX} \psi_0^X + F_{YJ}^{RY} \psi_0^Y) Z_J, \quad (19)$$

$$M_Y'' = \sum_{J=1}^{RXY} (F_{XJ}^{RX} \psi_0^X + F_{XJ}^{RY} \psi_0^Y) Z_J. \quad (20)$$

Ezek után a fentiek alapján könnyen felírhatók az egyes alszerkezetre vonatkozó — a befalazás elhagyásából származó — egyensúlyi egyenletek:

$$\left. \begin{array}{l} Z \text{ irányú vetületi} \\ X \\ Y \end{array} \right\} \text{ tengelyre számított nyomatéki } \left. \vphantom{\begin{array}{l} Z \\ X \\ Y \end{array}} \right\} \text{ egyenlet}$$

$$\mathbf{G}_R \mathbf{u}_R + (\tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{G}^*) \mathbf{r} = -\mathbf{v}, \quad (21)$$

ahol $\tilde{\mathbf{G}}$ (12), (13), (3); \mathbf{G}_R (19), (20); míg \mathbf{v} (10), (11) alapján állítható elő.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,1}^Z Z_I \sin \alpha_I & \dots & \sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,RZ}^Z Z_I \sin \alpha_I \\ \hline -\sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,1}^Z Z_I \cos \alpha_I & & -\sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,RZ}^Z Z_I \cos \alpha_I \end{array} \right] \quad (22)$$

$$\mathbf{G}_R = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\sum_{J=1}^{RXY} F_{YJ}^{RX} Z_J & -\sum_{J=1}^{RXY} F_{XJ}^{RY} Z_J \\ \hline 0 & \sum_{J=1}^{RXY} F_{XJ}^{RX} Z_J & \sum_{J=1}^{RXY} F_{YJ}^{RY} Z_J \end{array} \right], \quad \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} F_2^0 \\ M_X^0 + \sum_{J=1}^{RXY} c_J Z_J \Delta_J^0 \sin \alpha_J \\ M_Y^0 - \sum_{J=1}^{RXY} c_J Z_J \Delta_J^0 \cos \alpha_J \end{array} \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_R^* = [W_0, \psi_0^X, \psi_0^Y] \quad (25)$$

A (7) és (21) egyenletek alkotják az alszerkezetek együttdolgozásának egyenletrendszerét.

3. A megtámasztandó szerkezet elmozdulásállapota

A (7), (21) egyenletrendszer megoldásából nyert r rugóerők és u_R elmozdulás ismeretében a vizsgált szerkezetben fellépő elmozdulások, a szuperpozíció elv alapján számíthatók:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{u}^0 + \sum_{J=1}^{RZ} \mathbf{u}_J^Z r_J + \mathbf{G}_{\text{merev}} \mathbf{u}_R, \quad (26)$$

ahol \mathbf{u}^0 — a befalazott 1-es alszerkezetre ható, ismert terhelésből származó elmozdulásmező;

\mathbf{u}_J^Z — a befalazott 1-es alszerkezetre, a J -ik függőleges rugó bekötési pontjában ható Z irányú egységnyi erőből származó elmozdulásmező,

$$\mathbf{G}_{\text{merev}} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & U_0^X - \varphi_Z^X Y & Z + U_0^Y - \varphi_Z^Y Y \\ \hline 0 & -Z + V_0^X + \varphi_Z^X X & V_0^Y + \varphi_Z^Y X \\ \hline 1 & Y & -X \end{array} \right] \quad (27)$$

4. Megjegyzések

A fentiekben vázolt módszer a szilárdsági feladat megoldását szuperponálható feladatok megoldására építi fel, aminek számítógépes realizálása a szerkezettől függően nagyméretű háttér használatát követelheti meg. Véges-elemes elmozdulásmódszerre alapozott eljárás esetén [1] az 1-es befalazott alszerkezetre ható ismert erőrendszerből, illetve a függőleges rugók bekötési pontjaiban ható Z irányú egységnyi erőkből származó elmozdulásokat az algebrai egyenletrendszer együttható mátrixának egyszeri invertálásával, több jobboldal felvételével célszerű meghatározni.

A (7), (21) egyenletrendszer mátrixainak előállításához a (16a, b) egyenletrendszert is meg kell oldani, melynek megoldása a terheléstől független. Így, amennyiben a megtámasztandó szerkezet különböző terhelések alatti viselkedésére vagyunk kíváncsiak, és ezt egy futás alatt akarjuk tisztázni, a (7), (21) egyenletrendszert is több jobboldallal oldjuk meg.

A vázolt módszer jól alkalmazható járművázszerkezetek megtámasztásának pontosabb figyelembevételére: az egyenlőtlen úttesten álló járművek szilárdsági viszonyai a korábbiaktól eltérően ugyanazon modellen tisztázhatók, mint a sík úton álló járművé.

A bemutatott módszer, bizonyos módosítással lehetőséget ad a Z irányú rugók (kerék) talajtól történő elválásának figyelembevételére is. Nevezetesen a (7) alatti egyenlőség helyett a talaj és az egyes alszerkezethez kapcsolt függőleges rugók közötti távolságot kifejező

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\mathbf{u}_R + \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2 \geq \mathbf{0} \quad (28)$$

egyenlőtlenséget véve, a következő kvadratikus programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \{ \mathbf{g}^* \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \geq \mathbf{0}; \mathbf{g} \geq \mathbf{0}; \mathbf{G}_R \mathbf{u}_R + (\tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{G}^*) \mathbf{r} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \}. \quad (29)$$

A függőleges irányú rugókban u_i csak nyomóerők léphetnek fel, továbbá a megoldásnál $\mathbf{g}^* \mathbf{r} = 0$, hiszen ahol $g_i = 0$, ott a támasztóerő (rugóerő) $r_i \geq 0$, és ahol $g_i > 0$, ott $r_i = 0$ az egyoldalú kapcsolatból következően. A (29) feladat megoldása ismert eljárásokkal könnyen elérhető [2].

5. Példa

Vegyük az 1. ábrán vékony vonallal vázolt rúdszerkezetet a feltüntetett $F_X = 2000$ N erő terheléssel, továbbá írjuk elő a 2. és 10. csomópontba bekötött függőleges rugók talajjal érintkező pontjainak 40 mm-es megemelését.

A rudak anyagát jellemző anyagállandók: $E = 2,07 \cdot 10^5$ N/mm² rugalmassági tényező, $\nu = 0,3$ Poisson-tényező. A rúdszerkezet I 140-es szelvényű rudakból áll. Az X és Z tengelyekkel párhuzamos rudak keresztmetszeteinek egyes főtengelye Y -nal, míg az Y -nal párhuzamos rudaknál X -szel párhuzamos.

A támasztó rugók rugóállandói X irányban $c_X = 1000$ N/mm; Y irányban $c_Y = 2000$ N/mm míg Z irányban $c_Z = 200$ N/mm. Az 1. ábrán a rúdszerkezet 1. jelű csomópontjának elmozdulásához viszonyított deformálódott alakot a vastag vonallal megrajzolt ábra mutatja.

A (7), (21) egyenletrendszer megoldásából nyert Z irányú rugóerők az alábbiak:

$$\begin{aligned} r_1 &= -2404,45 \text{ N} \\ r_2 &= 2457,70 \text{ N} \\ r_9 &= -1820,18 \text{ N} \\ r_{10} &= 1766,93 \text{ N} \end{aligned}$$

míg a szerkezetet X és Y irányokban megtámasztó rugókban

$$\begin{aligned} X \text{ irányú rugóknál} \quad r_4 &= -1225,22 \text{ N} \\ r_9 &= -5836,65 \text{ N} \\ r_{11} &= 5061,87 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \text{ irányú rugóknál} \quad r_4 &= 474,853 \text{ N} \\ r_{10} &= -24,413 \text{ N} \\ r_{11} &= -450,439 \text{ N}. \end{aligned}$$

Itt az r mellett álló alsó index a rugó bekötési csomópontjának jele. A rugóerő előjele akkor pozitív, ha a megtámasztandó szerkezetre ható erő a koordináta-rendszer tengelyeinek pozitív irányába mutat. Mivel a terhelés csak X tengelyirányú, ezért a Z és Y irányú rugókban keletkező erők eredőjének zérusnak kell lennie. Könnyen ellenőrizhető ennek teljesülése.

A lágy Z irányú rugók miatt a szerkezet pontjainak Z irányú eltolódása 30 mm nagyságrendű, míg az Y irányú elmozdulások ennek mintegy csak 100-ad részét teszik ki. A csomópontok elmozdulását az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat

Csp. jele	U [MM]	V [MM]	W [MM]
1	5.24126E+00	-3.99928E-01	1.20222E+01
2	5.23967E+00	1.26706E-02	2.77115E+01
3	-2.32116E+00	1.35881E-01	1.20222E+01
4	1.22522E+00	-2.37426E-01	2.77115E+01
5	6.34468E+00	-4.01368E-01	1.08040E+01
6	6.34468E+00	1.21783E-02	2.91246E+01
7	6.34598E+00	-1.94445E-01	1.99641E+01
8	-1.12819E+01	-3.23890E-01	1.99641E+01
9	5.83665E+00	-4.03329E-01	9.10091E+00
10	5.83766E+00	1.22066E-02	3.11654E+01
11	-5.06187E+00	2.25220E-01	9.10091E+00
12	2.99791E 01	-5.35001E-01	3.11654E+01

Csp. jele	FIX [RAD]	FIY [RAD]	FIZ [RAD]
1	-1.07162E-03	-1.51249E-02	-2.10857E-04
2	1.20972E-03	-1.60366E-02	-2.12050E-04
3	-1.07162E-03	-1.51249E-02	-2.10857E-04
4	8.95720E-04	-1.60684E-02	-2.12050E-04
5	-1.48086E-03	-1.83895E-02	1.88573E-04
6	1.73975E-03	-1.83909E-02	1.87372E-04
7	1.29445E-04	-1.81819E-02	5.26333E-04
8	1.29445E-04	-1.73509E-02	5.26333E-04
9	-1.76490E-03	-2.18857E-02	7.57056E-04
10	2.18883E-03	-2.21515E-02	7.57056E-04
11	-1.00320E-03	-2.17527E-02	7.57664E-04
12	2.18883E-03	-2.21515E-02	7.57056E-04

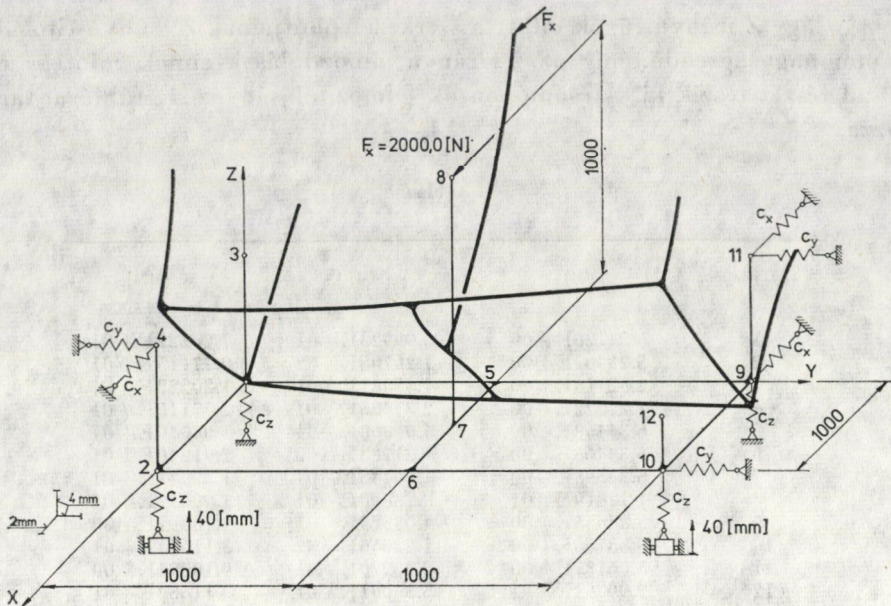
Megjegyzés

A vázolt módszer sikeres alkalmazást nyert a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszékének AUTOKUT részére végzett Szm. 266-XXVIII-6/78. sz. kutatási-fejlesztési munkája során.

A programrendszer kidolgozásában PŐDŐR András és NÁNDORI Frigyes is részt vettek. A szerzők ez úton fejezik ki köszönetüket közreműködésükért.

IRODALOM

- ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971
- KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin 1962



1. ábra

Note on the Strength Calculation of Elastic Structures Supported by Springs.—The paper deals with the strength calculation of an elastic system supported by soft springs, by dividing the elastic structure into two structural units (or substructures). Provided the soft springs are parallel with the vertical axis of the system of coordinates, the first subsystem is the construction to be supported, joined to the springs which are parallel to the horizontal plane, while the second substructure is composed of the vertically arranged soft supporting springs. The first substructure is fixed at a point in such a way that the displacement in the vertical direction of the subsystem (as a rigid body), and its rotation about the horizontal axis is prevented. With a knowledge of the vertical spring forces and the vector of the rigid-body displacement obtained by the solution of the kinematic joint equations of the substructures and by the solution of the equilibrium equations of the first substructure, the strength conditions of the construction investigated may be clarified by making use of the principle of superposition. Building up the problem in the above way also permits the separation of the vertical springs from the ground. In this case, the spring forces and the vector of the rigid-body displacement might be obtained by the solution of the quadratic programming problem.

Bemerkung zur Festigkeitsberechnung der durch Federn unterstützten elastischen Konstruktionen. — Die Festigkeitsberechnungen eines durch weiche Federn unterstützten elastischen Systems werden durch Zerteilung der elastischen Konstruktion auf zwei konstruktionsteile (oder Untersysteme) behandelt. Angenommen, daß die weichen Federn mit der senkrechten Achse des Koordinatensystems parallel angeordnet sind, das erste Untersystem besteht aus der zu unterstützenden, mit den Federn verbundenen Konstruktion, während das zweite Untersystem aus den senkrechten Federn zusammengesetzt ist. Das erste Untersystem sollte an einem Punkt derart eingespannt werden, daß die senkrechte Verschiebung desselben als steifen Körpers und die Rotation um die horizontale Achse verhindert werden. Bei Kenntnis der aus der Lösung der kinematischen Verbindungsgleichungen der Untersysteme und der Gleichgewichtsgleichungen des ersten Untersystems erhaltenen senkrechten Federkräfte und des Vektors der steifkörperartige Verschiebung, die Festigkeitsverhältnisse der untersuchten Konstruktion können durch Anwendung des Superpositionsprinzips klar gestellt werden. Eine derartige Aufbau der Aufgabe ermöglicht auch die Berücksichtigung der Abtrennung der senkrechten Federn vom Boden. In diesem Fall können die Federkräfte und der Vektor der steifkörperartige Verschiebung durch Lösung der quadratischen Programmierungsaufgabe erhalten werden.