VASTAGFALÚ FORGÁSHÉJAK SZÁMÍTÁSA HENGERSZIMMETRIKUS TEHER ESETÉBEN

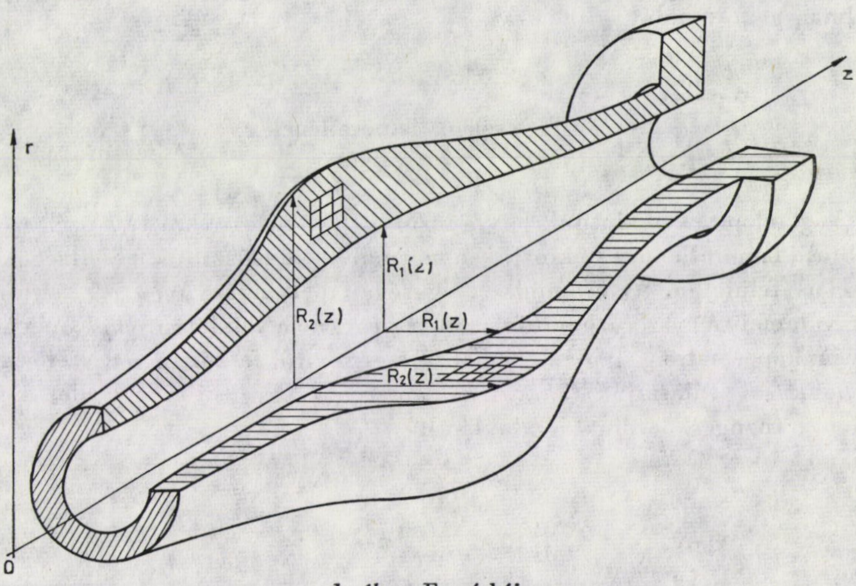
LÁMER GÉZA*

[Beérkezett: 1979. december 4-én]

Az adott tanulmányban tovább fejlesztjük a rugalmas és képlékeny állapotú vastagfalú forgáshéjak számítási módszerét hengerszimmetrikus terhelésre véges-elemes erőmódszer alkalmazásával. Megadjuk az egységállapotokhoz tartozó elmozdulás- és feszültségfüggvények együtthatóit és az ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletrendszer összeállításának algoritmusát.

1. A feladat megfogalmazása

Vizsgáljunk egy vastagfalú forgáshéjat hengerszimmetrikus terhelés esetében. Tegyük fel, hogy a héj vastagsága változhatik, mind a belső, mind a külső átmérő vonatkozásában. A falvastagság változása tetszőleges lehet: folyamatos vagy ugrásszerű (1. ábra). A héj anyaga lineárisan rugalmas — képlékeny. A végterhelése — hengerszimmetrikus belső és külső nyomás, a héj alkotója mentén ható, a tengelyirányban változó csúsztató erő, a homlokfelületekre ható normál és csúsztató erő.



1. ábra. Forgáshéj

* Lámer Géza, 1088 Budapest, Vas u. 15/B.

2. Bevezetés

A kitűzött feladat általános megoldását rugalmas állapotban megkaphatjuk vagy elmozdulásfüggvényekben [1], vagy feszültségfüggvényekben [1, 2, 3, 4], de bonyolult geometria alak és tetszőleges terhelés esetén a feladat megoldása nehézkes és terjedelmes. Vastagfalú cső vizsgálata rugalmas és rugalmas-képlékeny állapotban, állandó falvastagság mellett, az adott feltevések figyelembevételével gyakorlatilag teljesen megoldott [5, 6, 7].

Bonyolult geometriai alak és tetszőleges terhelés esetén széles körben alkalmazott megoldási eljárás a végeselem módszer. Részletes irodalom található mind az elméletről, mind az alkalmazási területekről a [8, 9, 10, 11, 12] munkákban. A [13, 14, 15] munkákban vékonyfalú forgáshéjakat vizsgálnak tengelyszimmetrikus terhelés esetén, és erre a célra mozgás [13, 14], illetve kombinált módszert [15] alkalmaznak. Háromdimenziós végeselem tetraéder formában (topológiai értelemben) a [16, 17, 18/19] munkákban található. Ezekben a tanulmányokban mozgásmódszert alkalmaznak, az elmozdulást pedig harmadfokú (teljes és hiányos) polinommal közelítik.

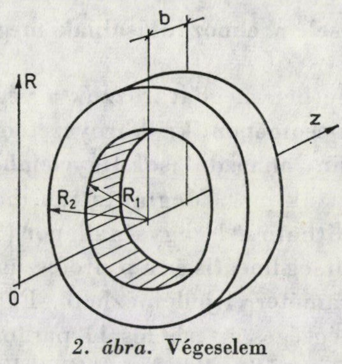
A jelen tanulmányban vizsgált feladat megoldásához végeselemként célszerű gyűrű alakú elemet választani, az elmozdulásra magasabb polinom fokszámmal. Képlékeny anyagtörvény alkalmazása esetén az erőmódszer látszik a megfelelőbbnek mert ebben az esetben a képlékeny állapot fizikai tartalma megtartható.

3. Végeselem, ismeretlenek

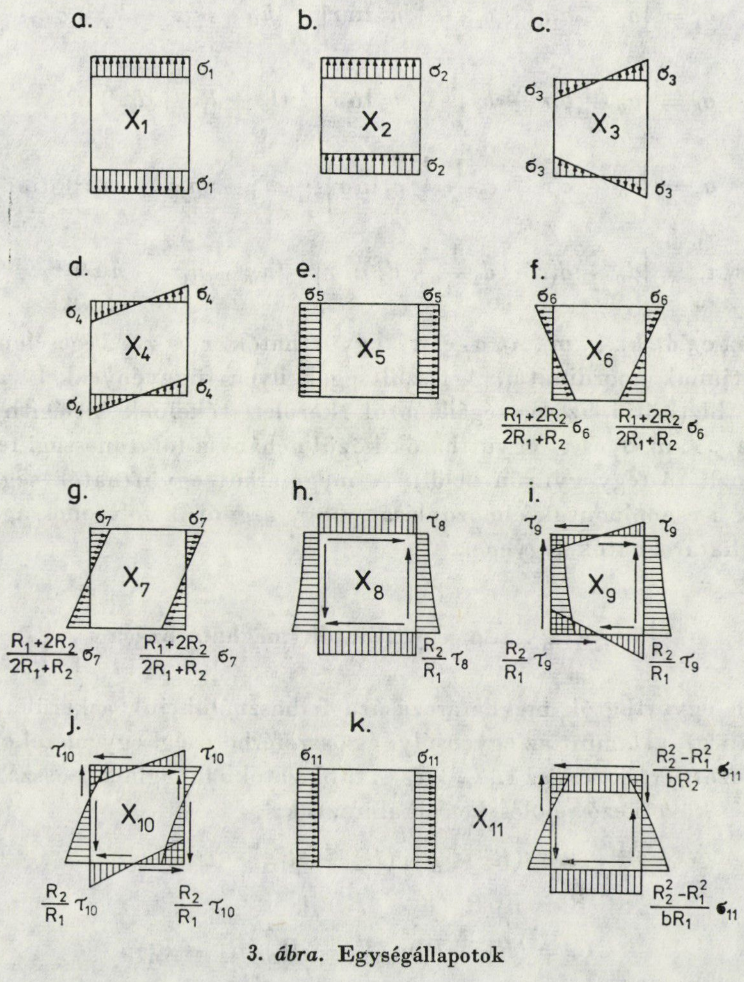
Végeselemnek tekintünk egy gyűrűt R_1, R_2 sugarakkal és b szélességgel (2. ábra). Ismeretlennek tekintjük a normál és a csúsztató feszültségeket a végeselem felületén. Az erőmódszer egységállapotainak választjuk a feszültségek valamely egyszerű kombinációit a végeselem felületén, előre megadott függvénykapcsolatok alapján (3. ábra). A nyíró feszültség τ_{rz} eloszlását hiperbolikusra választjuk ($3h, i, j, k$), amely az egyensúlyi egyenlet következménye (hengerkoordinátás alakban).

$$r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(r\,\tau_{rz}) = 0. \tag{1}$$

A többi feszültség eloszlását lineáris törvénnyel írjuk le. Az ordináták nagyságát elsősorban a gyűrű tengelyirányú egyensúlya határozza meg.



2. ábra. Végeselem



3. ábra. Egységállapotok

4. A végeselem elmozdulásainak meghatározása

Minden terhelési esetben meghatározzuk a véges elem csomópontjainak lineáris elmozdulását és a csomópont kis környezetének elfordulását. Az elmozdulásokat a végtelen kicsiny elmozdulások figyelembevételével, a rugalmasságtan egyenleteivel határozzuk meg. Megmutatjuk, hogy egy-egy gyűrűre ható tetszőleges terhelés előállítható a 11 egységállapot (3. ábra) lineáris kombinációjaként. A normálfeszültség lineáris és a nyírófeszültség hiperbolikus eloszlása esetén a terhelés 12 paraméterrel jellemezhető. Figyelembe véve a z irányú egyensúlyi egyenletet, elégséges a terhelés 11 paraméteres előállítása.

A terhelési eseteket Saint-Venant fél-fordított módszerével oldjuk meg [1].

A megoldáshoz a feszültségfüggvényeket polinomként adjuk meg.

$$\sigma_r = \left(a_0 + a_1 r + a_2 \frac{1}{r^2} + a_3 \ln r\right) \cdot (k_0 + k_1 z + k_2 z^3)\, \sigma_j, \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = \left(b_0 + b_1 r + b_2 \frac{1}{r^2} + b_3 \ln r\right) \cdot (l_0 + l_1 z + l_2 z^3)\, \sigma_j, \tag{3}$$

$$\sigma_z = \left(c_0 + c_1 r + c_2 \frac{1}{r^2} + c_3 \ln r\right) \cdot (m_0 + m_1 z + m_2 z^3)\, \sigma_j, \tag{4}$$

$$\tau_{rz} = \left(d_0 + d_1 r + d_2 \frac{1}{r^2} + d_3 \ln r\right) \cdot (n_0 + n_1 z + n_2 z^3)\, \tau_j, \tag{5}$$

ahol: $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{l}_i$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{n}_i$, σ_j és τ_j együtthatók, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{z}$ a végeselem tetszőleges pontjának koordinátái. A feszültségek ilyen függvényekkel való megközelítése biztosítja az egységállapotok kerületértékeinek kielégíthetőségét.

Az $\mathbf{a}_i \dots \mathbf{n}_i$, σ_j és τ_j együtthatók közül néhány a folytonossági feltételből meghatározható (egy gyűrűn belül). A megmaradt együtthatók segítségével kifejezzük a csomópontok elmozdulását, hogy a gyűrűk folytonossági feltételéből meghatározhatók legyenek.

5. Az $\mathbf{a}_i \dots \mathbf{n}_i$ együtthatók meghatározása

Ezen együtthatók meghatározására felhasználhatjuk a kerületi feltételeket (3. ábra), valamint az egyensúlyi és összeférhetőségi egyenleteket. Az így meghatározott értékeket az 1., 2., 3. és 4. táblázatokban foglaltuk össze. A táblázatokban a következő jelöléseket alkalmaztuk:

$$A = (R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2),$$

$$B = R_1^2\, R_2^2/(R_2 - R_1),$$

$$C = (R_2^3 - R_1^3)/(2R_1 + R_2)\,(R_2 - R_1)^2,$$

$$
\begin{aligned}
D &= (R_2 + R_1)/(2R_1 + R_2)\,(R_2 - R_1),\\
F &= R_1^2R_2^2/(2R_1 + R_2)\,(R_2 - R_1),\\
H &= (R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1)/(R_2^2 - R_1^2),\\
I &= R_1^2 R_2^2(\ln R_2 - \ln R_1),\\
J &= (R_2 + R_1)/(R_2 - R_1),\\
K &= 2R_2/(R_2 - R_1),\\
L &= (R_2^3 - R_1^3)/(R_2^2 - R_1^2),\\
M &= R_1^2R_2^2/(R_2 + R_1),\\
N &= (R_2 + R_1).
\end{aligned}
$$

6. Az elmozdulások meghatározása

A lineáris elmozdulásokat, u-t és w-t integrálással, míg az elfordulásokat a $\varphi = \partial u/\partial z$ és a $\psi = \partial w/\partial r$ (4. ábra) képletek segítségével határozzuk meg. Az elmozdulásfüggvények a következőképp alakulnak:

$$u = \left(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 \frac{1}{r} + a_4 r \ln r\right)(k_0 + k_1 z + k_2 z^3), \tag{6}$$

$$w = (b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 \ln r)\,(l_0 + l_1 z) + (b_4 + b_5 r)\,(l_2 z^2 + l_3 z^4) + C_w, \tag{7}$$

$$\varphi = \left(c_1 r + c_2 r^2 + c_3 \frac{1}{r}\right)(m_0 + m_2 z^2), \tag{8}$$

$$\psi = \left(d_0 + d_1 r + d_3 \frac{1}{r}\right)(n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^4). \tag{9}$$

Az a_i, b_i, c_i, k_i, l_i, m_i, n_i együtthatók értékeit az 5., 6., 7..8. táblázatban foglaltuk össze. A jelölések, mint az előbb. C_w — integrálási konstants, amely a σ_j és τ_j együtthatókkal együtt meghatározandó a vizsgált test globális folytonossági feltételéből; C_w függ a globális koordináta rendszertől és a test (tengelyirányú) megfogásától.

7. A megoldások analízise

A 11 egységállapotra javasolt megoldások nem mind pontosak. A gyűrű egyensúlya globálisan minden esetben biztosított. Ezen kívül a megoldásoknak ki kell elégíteniök az egyensúlyi egyenleteket differenciális formában radiális és tengely irányban. Ezeket az egyenleteket „r" és „z"-vel jelöljük. Az összeférhetőséget két feltételre tudjuk bontani: az **u** elmozdulás integrálhatósága a feszültségekből (Saint-Venant összeférhetőségi egyenlete) és a felvett nyírófeszültség egyezése az elmozdulásokból számítottal. Ezeket a feltételeket „u" és „τ"-val jelöljük.

Az 1, 2, 3, 4, 5 és 8 egységállapot megoldásai pontosak, kielégítik a rugalmasságtan összes egyenletét. A 6, 9 és 10 állapotra javasolt megoldások nem elégítik ki az „r" feltételt, ezen kívül a 7, állapotra javasolt megoldás a „τ" feltételt csak részletesen elégíti ki. A 11. állapotra javasolt megoldás közelítő, figyelembe véve azt, hogy az $1/r$ változó érték megadható mint $2/(R_1 + R_2)$.

8. A megoldandó egyenletek

Konkrét feladat megoldása esetén a testet felosztjuk egy vagy több sor gyűrűre. Deformált állapotban megköveteljük, hogy a deformáció előtt érintkező csomópontok elmozdulásai a deformáció után egymással egyenlőek legyenek (4a, b ábra).

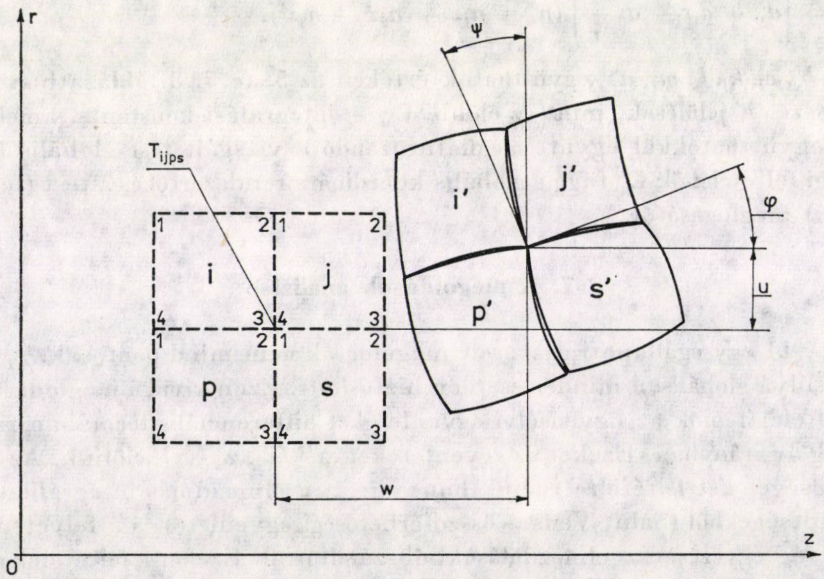
Bevezetjük a következő jelöléseket: $\mathbf{T}_{ik}$ az i-edik gyűrű k-adik csomópontja, $i = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, 3, 4$. A csomópontok sorszámát lásd a 4a. ábrán. $\mathbf{T}_{ijps}$ csomópont, amely egyszerre tartozik az **i**, **k** és **p**, s jelű gyűrűkhöz (4b ábra).

$\vec{\mathbf{X}}_i$ — az i-edik gyűrű feszültségállapot vektora

$\vec{\mathbf{X}}_i = || \mathbf{X}_{il} ||$; ahol $\mathbf{X}_{il} - \sigma_l$; $l = 1, 2 \ldots 7$ és τ_l; $l = 8, 9, \ldots 11$ és $\mathbf{X}_{i12} = \mathbf{C}_{iw}$,

$\vec{\mathbf{u}}_{ik}$ — i-edik elem k-adik csomópontjának elmozdulásvektora.

$$\vec{\mathbf{u}}_{ik} = || u_{ik}, w_{ik}, \varphi_{ik}, \psi_{ik} ||^T \tag{10}$$



4. ábra. A T_{ijps} pont környezete deformáció előtt (a) és után (b)

Az $\vec{u}_{ik}$ elmozdulásvektort a következőképpen határozzuk meg:

$$\vec{u}_{ik} = c_{ik}\vec{X}_i, \tag{11}$$

— ahol c_{ik} az i-edik elem k pontra vonatkozó hajlékonysági mátrixa, rendje 4×12, struktúrája a következő:

⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	0
⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	1
0	0	0	⊠	0	0	0	0	0	0	⊠	0
0	0	0	⊠	0	0	0	⊠	⊠	⊠	⊠	0

ahol a ⊗⊠-vel jelölt elem 0-tól és 1-től különbözik. Meghatározása az u; w, φ és ψ-re vonatkozó képletek segítségével történik. A c_{ik} mátrix összeállításánál az u, w, φ és ψ képleteiben szereplő r és z koordináták helyett a T_{ik} csomópont r_{ik} és z_{ik} csomóponti koordinátái írandók.

A T_{ijps} pontban a folytonossági feltétel nem más, mint a T_{ijps} pontot alkotó csomópontok a deformáció okozta lineáris elmozdulásának és a deformáció előtt érintkező felületek deformációt követő elfordulásának azonossága. Mátrix alakban:

$$E^* \vec{Z}_{ijps} = 0,$$

ahol

$$\vec{Z}_{ijps} = \left\| \begin{matrix} \vec{u}_{i3} \\ \vec{u}_{j4} \\ \vec{u}_{s1} \\ \vec{u}_{p2} \end{matrix} \right\|$$

a T_{ijps} pont általánosított elmozdulás vektora,

$$\text{és } E^* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline E & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & -E & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & -E^0 & 0 & 0 & 0 & -E_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -E_0 & 0 & E & 0 & -E^0 \\ \hline \end{array}$$

E^* — összeférhetőségi mátrix, amelyben

$$E = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad E^0 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad E_0 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{0} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Abban az esetben, amikor egy pontban csak két vagy három elem találkozik, akkor az általánosított $\mathbf{Z}_{ijps}$ elmozdulásvektor csak két vagy három elmozdulásvektorból áll, az $\mathbf{E}^*$ összeférhetőségi mátrix nagysága is megváltozik, de a szerkezete nem.

Az ismeretlenek meghatározására az összeférhetőségi egyenleteken kívül a határfeltételeket kell figyelembe venni. A külső terhelést egy-egy elemhatáron belül linearizálni (normál erő) kell, illetve hiperbolikusan (nyíró erő) kell elosztani.

A határfeltételeket minden elem minden határpontjában figyelembe vesszük. Jelöljük (r) és (z) felső indexszel a pont környezetében a külső normális irányát.

A $\mathbf{T}_{ik}^{(r)}$ pontban a határfeltétel

$$\vec{\mathbf{P}}_{ik}^{(r)} = \mathbf{c}_{ik}^{(r)} \vec{\mathbf{X}}_i.$$

A $\mathbf{T}_{ik}^{(z)}$ pontban

$$\vec{\mathbf{P}}_{ik}^{(z)} = \mathbf{c}_{ik}^{(z)} \vec{\mathbf{X}}_i,$$

ahol

$$\vec{\mathbf{P}}_{ik}^{(r)} = \left\| \begin{matrix} p \\ t \end{matrix} \right\| \text{ és } \vec{\mathbf{P}}_{ik}^{(z)} = \left\| \begin{matrix} p \\ t \end{matrix} \right\|$$

terhelési vektorok, amelyek a külső teher normális p és csúsztató t összetevőit veszik figyelembe a $\mathbf{T}_{ik}^{(r)}$ és $\mathbf{T}_{ik}^{(z)}$ pontokban.

A $\mathbf{c}_{ik}^{(r)}$ és $\mathbf{c}_{ik}^{(z)}$ mátrixokat az 1. Függelékben adtuk meg.

Konkrét feladat megoldása esetén az összeférhetőségi egyenletek és a határfeltételek nem elégségesek a megoldáshoz. Szükségessé válik két szomszédos gyűrű egyensúlyát biztosító egyenlet felírása. Tengelyszimmetria miatt a sugárirányú eredő erő nulla, míg a tengelyirányú erők egyensúlyát külön feltétellel kell biztosítani két szomszédos elem érintkezési felületén. A (z) irányú külső normálissal jellemzett felület esetén ez a feltétel

$$\mathbf{c}_i^{(z)} \vec{\mathbf{X}}_i = \mathbf{c}_j^{(z)} \vec{\mathbf{X}}_j$$

alakban írható fel, míg az (r) irányú külső normális esetén azt

$$\mathbf{c}_i^{(r)} \vec{\mathbf{X}}_i = \mathbf{c}_p^{(r)} \vec{\mathbf{X}}_p$$

alakban kell felírni.

Itt:

$$\mathbf{c}_i^{(z)} = \| 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \|$$

$$\mathbf{c}_j^{(z)} = \| 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0 \|$$

$$\mathbf{c}_i^{(r)} = \left\| 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{R_{2i}}{R_{1i}}\ 0\ 0\ -\frac{R_{2i} - R_{1i}}{b_i}\ 0 \right\|$$

$$\mathbf{c}_p^{(r)} = \left\| 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \frac{R_{2p} - R_{1p}}{b_p}\ 0 \right\|$$

i, j és p — a gyűrűk indexe (4a. ábra), R_1, R_2 és b a gyűrűk mérete (2. ábra).

9. Egy speciális eset

Amikor egy rövid, vastagfalú csövet felosztunk n sorra és m oszlopra (az ismeretlenek száma $12nm$) a következő feltételeket kell kielégítenünk.

9.1. Határfeltétel minden egyes pontban r és z irányban, kivéve a 4 sarokelem sarokpontjait, ahol három feltétel lesz (a negyedik a nyírófeszültség dualitása miatt elesik). Így négy sarokelemre $4\ (2 + 3 + 2) = 28$ egyenlet írható fel, míg a fennmaradó $2\ (m - 2) + 2(n - 2)$ határelemekre egyenként 4, összesen $8m - 8n - 32$ egyenlet állítható fel. Ily módon $8m - 8n - 4$ olyan egyenletet kapunk, amely a határfeltételeket veszi figyelembe.

9.2. Folytonossági feltétel minden $\mathbf{T}_{ljps}$ típusú pontban (ilyen $(n-1) \times (m - 1)$ van) 10 írható fel, míg $\mathbf{T}_{lj00}$ (illetve $\mathbf{T}_{l00p}$) típusú pontban (ilyen $2(n - 1) + 2(m - 1)$ van) 3 feltétel írható fel. Ez összesen $10\ nm - -4n - 4m - 2$ feltétel.

9.3. A szomszédos elemek közös egyensúlyára a legkülső sorokban és oszlopokban $2(n - 2) + 2(m-2)$, eggyel beljebb csak $2\frac{1}{2}(n - 4) + 2\frac{1}{2}(m - 4)$ pár állítható össze. A maradék elemekre összesen $2(n - 4)\ (m - 4) + + (n - 4) + (m - 4)$ feltétel írható fel. Ez összesen $2\ nm - 4n - 4m + 8$ feltétel.

9.4. A felírt egyenletek száma (ide véve a folytonossági egyenleteket, a határfeltételeket és a két elem közös egyensúlyi egyenleteit) két felesleges egyenlet kihúzása után, a sarokelemek egyensúlyi egyenletei közül, összesen $12nm$.

Az ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletek mátrix egyenletté alakíthatók:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{Z}} = \vec{\mathbf{P}}$$

ahol $\vec{\mathbf{Z}}$ — vektor-ismeretlen, $\vec{\mathbf{Z}} = \|\vec{\mathbf{X}}_i\|$,
$\vec{\mathbf{P}}$ — vektor-terhelés, $\vec{\mathbf{P}} = \|\vec{\mathbf{P}}_i\|$.

Az **A** mátrix-szalagmátrix $24n$, illetve $24m$ szélességű (az $n \gtrless m$ arány függvényében).

Az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]$ mátrix elemei a következő alakúak:

$$\mathbf{a}_{ij} = \|\ \mathbf{c}_{ik}, \mathbf{c}_{ik}^{( )}, \mathbf{c}_{ik}^{(z)}, \mathbf{c}_i^{(r)}, \mathbf{c}_i^{(z)}\ \|$$

10. A képlékeny állapot figyelembevétele

A javasolt metodika alapján meghatározható a héj feszültség- és elmozdulásállapota az anyag rugalmas viselkedése esetén. Továbbá kiterjeszthető az eljárás arra az esetre is, amikor a héj egyes pontjaiban az anyag képlékeny állapotba kerül. Képlékeny anyagtörvény feltételezése mellett a feladat megoldásakor figyelembe vesszük:

1. A képlékeny állapot bekövetkezését a Huber—Mises—Hencky-féle folyásfeltétel adja meg [20]:

$$f = \frac{1}{6}\left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2\right] + \tau_{rz}^2 - \tau_f^2 = 0 \qquad (*)$$

2. Ennek a feltételnek a kielégítése érdekében feltesszük, hogy a képlékeny állapot egyszerre következik be egy végeselem egész tartományában. Ily módon az elemet feltételesen általánosított pontnak nevezhetjük. Más szavakkal: feltételezzük, hogy lehetséges olyan feszültségfüggvényeket találni, amelyek a végeselem tartomány minden egyes pontjában kielégítik a fent említett folyási feltételt. Az állapot meghatározása (rugalmas vagy képlékeny) a „rugalmas" számítás után történik az elem négy csomópontjaiban ébredő feszültségek segítségével.

Megmutatható, hogy azok az elementáris feszültségfüggvények, amelyek kielégítik a folyásfeltételt, nem elégítik ki az egyensúlyi egyenletet differenciális alakban. És viszont, azon függvények (az elementárisok közül), amelyek az egyensúlyi egyenleteket kielégítik, azok a folyásfeltételt nem elégítik ki.

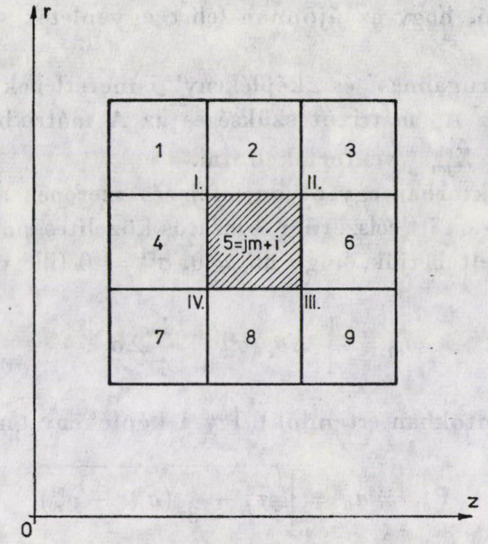
Ezért feltesszük, hogy képlékeny állapotban $\sigma_r = \sigma_\theta =$ conts, $\sigma_z =$ conts, $\tau_{rz} =$ conts, e mellett τ_{rz} kifejezhető a σ_r és σ_z segítségével. Ily módon az általánosított pont homogén képlékeny állapotát két független változóval jellemezhetjük.

3. Tekintsük az előbb vizsgált példát azzal a feltételezéssel, hogy a $jm+i$ elem képlékeny állapotban van. A vektor-ismeretlenben az $\vec{\mathbf{X}}_{jm+i}$ helyére egy $\vec{\mathbf{X}}^{\circ}_{jm+i}$ nulla vektort teszünk, amely ugyanolyan méretű (12×1). Ez azt jelenti, hogy azon egyenletek, amelyekben az $\mathbf{X}^{\circ}_{jm+i}$ vektor elemei szerepelnek, azokat azonossággá alakítja át. Ezen egyenletek száma: 10 folytonossági egyenlet mind a 4 pontjában és egy-egy egyensúlyi egyenlet a négy felületen, így összesen 44 egyenletet alakítunk át azonossággá.

Továbbiakban bevezetünk 3 paramétert, amely a képlékeny állapotot jellemzi: σ_r^{pl}, σ_z^{pl} és τ_{rz}^{pl}.

A 3 paraméter nem független egymástól, mivel ki kell hogy elégítsék a folyási feltételt (*), emellett a környező rugalmas állapotban levő tartomány elemeinek folytonossági feltételeit is. Az általánosság megsértése nélkül a képlékeny elem csomópontjait jelöljük k-val ($k = 1, 2, 3, 4$), felületét l-lel ($l = 1, 2, 3, 4$) és a környező elemet j-vel ($j = 1, 2, \ldots 9$) (5. ábra). Az elem felületén ($l = 1, 2, 3, 4$) páronként egyensúlyi feltételt kell biztosítani sugárirányban és a tengely irányában; mátrix alakban:

$$\mathbf{c}_j \vec{\mathbf{X}}_j = \mathbf{c}_{pl} \vec{\mathbf{X}}_{pl}$$



5. ábra. A képlékeny zóna és környezete

Képlékeny állapotban a térfogatváltozás nulla. A mi esetünkben megköveteljük, hogy az alakváltozást meghatározzák a csomópontok deformációi:

$$\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1,$$
$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3,$$

vagy mátrix alakban:

$$\mathbf{c}_1\vec{\mathbf{X}}_1 - \mathbf{c}_3\vec{\mathbf{X}}_3 + \mathbf{c}_9\mathbf{X}_9 - \mathbf{c}_7\vec{\mathbf{X}}_7 = 0.$$

A képlékeny állapot egyenlete:

$$\mathbf{c}_r\,\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{pl}} = \sqrt{\tau_j^2 - 1/3\,(\sigma_r - \sigma_z)^2}\,.$$

Ezeket az egyenleteket egy mátrix egyenletbe foglaljuk össze:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{pl}}\;\vec{\mathbf{Z}}(\vec{\mathbf{X}}_{\mathrm{pl}}) = \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{P}}_{\mathrm{pl}}),$$

ahol

$$\mathbf{X}_{\mathrm{pl}} = ||\;\sigma_r^{\mathrm{pl}}\;0\;0\;0\;\sigma_z^{\mathrm{pl}}\;0\;0\;\tau_{rz}^{\mathrm{pl}}\;0\;0\;0\;0\;||^T.$$

Az $\mathbf{A}_{\mathrm{pl}}$ mátrix struktúráját és elemeit, valamint a $\vec{\mathbf{P}}_{\mathrm{pl}}$ vektort a 2. Függelékben adjuk meg.

Ily módon a képlékeny tartomány környezetében felírunk $4\times6 = 24$ folytonossági egyenletet, és $4\times2 = 8$ páronkénti egyensúlyi egyenletet és az alakváltozás két egyenletét, az összesen $n = 34$. Innét a kiegészítő egyenletek száma $N = n + 1 = 35$.

Megmutatható, hogy az újonnan felírt egyenletek száma szükséges és elégséges.

Az egyenlet „rugalmas" és „képlékeny" ismeretlenek egyidejű meghatározása érdekében az $\mathbf{A}_{pl}$ mátrixot szükséges az $\mathbf{A}$ mátrixban elhelyezni, míg az $\vec{\mathbf{X}}^{\circ}_{jm+i}$ helyére az $\vec{\mathbf{X}}^{pl}_{jm+i}$ vektort kell írni.

A terhelés vektorban egy olyan kifejezés szerepel, amely függ a σ_r^{pl} és σ_z^{pl} ismeretlentől. Ezért itt célszerű a sorozatos közelítés módszerét alkalmazni. Első közelítésben feltehetjük, hogy $\sigma_{r0}^{pl} = 0$, $\sigma_{z0}^{pl} = 0$ (illetve a rugalmas megoldásból

$$\sigma_{r0}{}' = \frac{1}{4} \Sigma\sigma_r, \ \sigma_{z0}^{pl} = \frac{1}{4} \Sigma\sigma_z ,$$

σ_r és σ_z a csomópontokban értendők). Így a képlékeny terhelés első lépésben

$$\mathbf{P}_{pl} = a_0 = \sqrt{\tau_j^2 - \frac{1}{3}(\sigma_{r0}{}' - \sigma_{z0}^{pl})}.$$

Másodszor megoldva a feladatot meghatározzuk a σ_{r1}^{pl} és σ_{z1}^{pl} értékeket, és ezen értékek felhasználásával $\mathbf{P}_{pl} = a_1 = \ldots$ és így tovább.

Összefoglalás

Az adott tanulmányban továbbfejlesztettük a vastagfalú forgáshéjak számítási módszerét tengelyszimmetrikus teher esetében végeselemek felhasználásával erőmódszert alkalmazva.

Ismeretleneknek a feszültségek valamely egyszerű kombinációit tekintjük a végeselem felületén. Meghatározásuk a folytonossági feltételből történik (a csomópontokban). A csomóponti elmozdulások meghatározása az egységállapotokban a rugalmasságtan egyenleteinek felhasználásával történik, figyelembe véve a kis elmozdulások elméletét. Ezen megoldások eredményeit analizáljuk. A tárgyalt módszer lehetővé teszi nemcsak a csomópontok lineáris elmozdulásának figyelembevételét, hanem a csomópontok kis környezetének elfordulását is.

A végeselem módszer alkalmazása a fent tárgyalt variációban lehetővé teszi különböző belső és külső konfigurációjú felülettel jellemzett forgáshéjak vizsgálatát, és ami lehetőséget ad hasonló problémák különböző számítási modellekkel nyert megoldásainak összehasonlítására.

A továbbiakban kidolgoztuk és analizáltuk az ismeretlen meghatározására szolgáló egyenletrendszer összeállításának algoritmusát.

A dolgozat utolsó fejezetében megvizsgáltuk az ajánlott számítási módszer kiterjeszthetőségét képlékeny zóna kialakulásának esetére is. Megmutattuk ennek lehetőségét az adott számítási eljárás mellett.

A dolgozatban felvetett problémák kidolgozása olyan szintű, hogy a kapott eredmény felhasználható számítógépes program elkészítéséhez, a fent említett típusú szerkezetek méretezésére.

IRODALOM

1. BEZUHOV, N. I.—LUZSIN, O. B.: Prilozsenyie metodov teorii uprugosztyi i plaszticsnoszti k resenyiju inzsenernüh zadacs. Moszkva, Viszsaja skola, 1974. 38—41
2. LOVE, A.: Matematicsekaja teoria uprugosztyi (A treatise on the Matematical Theory of Elasticity, Cambridge, 1927.) Moszkva—Leningrád ONTI, 1935. p. 48—99, p. 268—288
3. TIMOSHENKO, S.: Teorija uprugosztyi. (Theory of Elasticity, London, New-York, 1934.) Moszkva—Leningrád, ONTI, 1934. p. 339—342
4. KOLTUNOV, M. A.—VASZILJEV, JU. N.—CSORNÜH, V. A.: Uprugoszty i procsnoszty cilindricseszkih tel. Moszkva, Viszsaja skola, 1975, p. 42—54
5. BELJAJEV, N. M.—SZINYICKIJ, A. K.: Naprazsényija i deformácija v tolsztosztennüh cilindrah pri uprugo-plaszticseszkom szosztojanyii materiála. V knige: Beljajev N. M. „Trudi po teorii uprugosztyi i plasztyicsnosztyi". Moszkva, GITTL, 1937, p. 240—356
6. ILJUSIN, A. A.—OGIBÁLOV, P. M.: Uprugo-plaszticseszkie deformácii polüh cilindrov. Moszkva, Izdatyelsztyvo MGU 1960. p. 37—91
7. KOLTUNOV, M. A.—VASZILJEV JU., N.—CSORNÜH, V. A.: Uprugoszty i procsnoszty cilinricseszkih tel. Moszkva, Viszsaja skola, 1975. 273—352
8. STRANG, G.—FIX, G.: Teorija metoda konyecsnüh elementov. (An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.) Moszkva, MIR, 1977
9. ZIENKIEWICZ, O. C.—CHEUNG, Y. K.: The Finite Element Method in Struktural and Continium Mechanics. Mc Graw-Hill, New-York 1967
10. MARTIN, M. C.—CAREY, G. F.: Bevezetés a végeselem analízisbe (Introduction to Finite Element Analysis, New-York, McGraw-Hill). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977
11. ODEN, G.: Konyecsnüe elementü v melinejnoj mehanike szplosnüh szred (Finit elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New-York, 1972). Moszkva, MIR, 1976
12. ROBINSON, I.: Integrated Theory of Finite Element Methods. Bristols, J. W. Arrowsmith Ltd., 1973
13. JONES, R. E.—STROME, D. R.: Direct Stiffness Methods. Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements. *A. I. A. A. Journal* 4 (1966), 1519—1525
14. Accuray of Model Stress Calculations by the Finite Element Method. *A. I. A. A. Journal* **8**, 261—277
15. ELIAS, Z. M.: Mixed Finite Element Method for Axisymmetric shells. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **4**. No 2. p. 261—277
16. GALLAGHER, R. H.—PADLOG, I.—BIJLARD, P. P.: Stress Analysis in Heated, Complex Shapes. *J. Aerospace Sci*, (1962), 700—707
17. ARGYRIS, J. H.: Matrix Analysis of Three Dimensional Elastic Media. Small and Large Displacements. *A. I. A. A. Journal* **3** (1965) 45—51
18/19. RASHID, V. R.: Three Dimensional Analysis of Elastic Solids. *Int. J. Solids and Struct.* **5**, 1311—1332; **6**, 195—207
20. SZKOLOVSZKIJ, V. V.: Teorija plaszticsnosztyi. Moszkva, Viszsaja skola, 1969

Calculation of Thick-Walled Shells of Revolution Submitted to Axisymmetrical Loading. — The calculation method of the thick-walled shells of revolution, in elastic and plastic states, subjected to axisymmetrical loading is refined by the author, by making use of the finite-element energy theorem. The coefficients of the displacement and stress functions associated with the unit states and the algorithm of the establishment of the set of equation serving for the determination of the unknown values are given.

Berechnung der durch rotationssymmetrische Belastung beanspruchten dickwandigen Rotationsschalen. — Die Berechnungsmethode der durch rotationssymmetrische Belastung beanspruchten, dickwandigen, in elastischen und plastischen Zuständen befindlichen elastischen Rotationsschalen wird durch Anwendung des Kraftgrößen Verfahrens mit finiten Elementen weiterentwickelt. Die Koeffizienten der zu den Einheitszuständen gehörigen Verschiebungs- und Spannungsfunktionen und der Algorithmus der Aufstellung des zur Ermitte u ng der unbekannten Größen dienenden Gleichungssystems werden angeführt.

1. táblázat

A σ_r feszültségfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók						
	a_0	a_1	a_2	a_3	k_0	k_1	k_2
1	1	0	0	0	1	0	0
2	A	0	$-2B$	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	A	0	$-2B$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	$-\frac{2-\mu}{\mu}C$	$\frac{2-\mu}{\mu}D$	$-\frac{2-\mu}{\mu}F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-\mu}{\mu}C$	$\frac{4-\mu}{\mu}D$	$\frac{4-\mu}{1-\mu}F$	0	0	$\frac{3}{2}\frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^2$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\frac{1+\mu}{\mu}H$	0	$\frac{1+\mu}{\mu}I$	$-\frac{1+\mu}{\mu}$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
10	$-\frac{1+\mu}{\mu}HJ$	0	$\frac{1+\mu}{\mu}IJ$	$-\frac{1+\mu}{\mu}J$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
	$\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu}KL$	$\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu}K$	$\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu}KM$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0

2. táblázat

A σ_θ feszültségfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók						
	b_0	b_1	b_2	b_3	l_0	l_1	l_2
1	1	0	0	0	1	0	0
2	A	0	$2B$	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	A	0	$2B$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	$-\frac{2-\mu}{\mu}C$	$\frac{1+\mu}{\mu}D$	$\frac{2-\mu}{\mu}F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-\mu}{1-\mu}C$	$\frac{4+10\mu-5\mu^2}{(2+\mu)(1-\mu)}D$	$\frac{4-\mu}{1-\mu}F$	0	0	$\frac{3}{2}\frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\frac{1-\mu}{\mu}-\frac{1+\mu}{\mu}H$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu}I$	$-\frac{1+\mu}{\mu}$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
10	$-\frac{1-\mu}{\mu}I-\frac{1+\mu}{\mu}HJ$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu}IJ$	$-\frac{1+\mu}{\mu}J$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
	$\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu}KL$	$-\frac{2}{3}\frac{1+2\mu}{\mu}K$	$-\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu}KM$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0

3. táblázat

A σ_z feszültségfüggvény együtthatói

Az egységállapot száma	Együtthatók						
	c_0	c_1	c_2	c_3	m_0	m_1	m_2
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1	0	0
6	$-2C$	$3D$	0	0	1	0	0
7	$-2C$	$3D$	0	0	0	$\frac{3}{2}\frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0

4. táblázat

A τ_{rz} feszültségfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók						
	d_0	d_1	d_2	d_3	n_0	n_1	n_2
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	C	$-D$	$-F$	$\frac{3}{2}\frac{2}{b}$	0	$-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	R_3	1	0	0
9	0	0	0	R_2	0	$\frac{2}{b}$	0
10	1	0	0	R_2J	0	$\frac{2}{b}$	0
	1	0	0	K	0	$\frac{2}{b}$	0
11	$-N$	0	0	$\frac{N^2}{2}$	$\frac{2}{b}$	0	0

5. táblázat

Az u elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók						
	a_1	a_2	a_3	a_4	k_0	k_1	k_2
1	$\frac{1-\mu}{E}$	0	0	0	1	0	0
2	$\frac{1-\mu}{E}A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{B}{N}$	0	1	0	0
3	$\frac{1-\mu}{E}$	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	$\frac{1-\mu}{E}A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{B}{N}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	0	1	0	0
6	$-\frac{2-3\mu-\mu^2}{\mu E}C$	$-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{\mu E}D$	$\frac{(1+\mu)(2-\mu)}{\mu E}F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-5\mu}{E}C$	$\frac{4-8\mu+6\mu^2+4\mu^2}{(1-\mu)(2+\mu)E}D$	$-\frac{(1+)(4-\mu)}{(1-\mu)E}F$	0	0	$\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\frac{1-\mu}{\mu E}+\frac{1-\mu^2}{\mu E}H$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu E}A$	$-\frac{1-\mu^2}{\mu E}$	$\frac{2}{b}K_2$	0	0
10	$-\frac{1-\mu}{\mu E}J+\frac{1-\mu^2}{\mu E}HJ$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu E}AJ$	$-\frac{1-\mu^2}{\mu E}J$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
	$\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{\mu E}(1+\mu)KL$	$\frac{2}{3}\frac{1-\mu^2}{\mu}K$	$\frac{2}{3}\frac{(1+\mu)(2+\mu)}{\mu E}MK$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0

6. táblázat

A w elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Az első tag együtthatói						A második tag együtthatói			
	b_0	b_1	b_2	b_3	l_0	l_1	b_4	b_5	l_2	l_3
1	1	0	0	0	0	$-\frac{2\mu}{E}$	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	$-\frac{2\mu}{E}\frac{B}{N}$	0	0	0	0
3	0	0	$-\frac{1-\mu}{E}$	0	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{2\mu}{E}$	0	$\frac{2}{b}$	0
4	0	0	$-\frac{1-\mu}{2E}A$	$-\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{B}{N}$	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{2\mu}{E}A$	0	$\frac{1}{2}\frac{2}{b}$	0
5	1	0	0	0	0	$\frac{1}{E}$	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	$-\frac{2(1+\mu)}{E}C$	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{2-10\mu-2\mu^2}{(1-\mu)E}C$	$\frac{6-15\mu-15\mu^2+6\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)E}D$	$\frac{3}{4}\frac{2}{b}$	$\frac{1}{8}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	$\frac{R_2}{G}$	1	0	0	0	0	
9	$\frac{1-\mu}{E}+\frac{2(1+\mu)}{E}HJ$	0	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}$	0	$\frac{2}{b}R_2$	0	0	0	0
10	$\frac{1-\mu}{E}J+\frac{2(1+\mu)}{E}H$	0	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}J$	0	$\frac{2}{b}R_2$	0	0	0	0
	$-\frac{2}{3}\frac{2+\mu}{E}2LK$	$\frac{2(1+\mu)}{E}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{2(1+\mu)}{E}N$	$\frac{\mu}{E}$	$\frac{1+\mu}{E}N^2$	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{1}{E}$	0	$\frac{1}{2}\frac{2}{b}$	0

7. táblázat

A φ elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók				
	c_1	c_2	c_3	m_0	m_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	$\frac{1-5\mu}{E}A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}A$	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	$-\frac{4-5\mu}{E}C$	$\frac{4-8\mu+6\mu^2+4\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)E}D$	$-\frac{(1+\mu)(4-\mu)}{E\mu}F$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{b}$	$-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
11	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0

8. táblázat

A ψ elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység-állapot száma	Együtthatók						
	d_0	d_1	d_2	n_0	n_1	n_2	n_3
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	$-\frac{1-\mu}{E}A$	$\frac{-2(1+\mu)}{E}A$	$\frac{2}{b}$	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	$-\frac{6-15\mu-15\mu^2+6\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)E}D$	0	0	0	0	$\frac{3}{4}\frac{2}{b}\cdot$	$-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	$-\frac{R_2}{G}$	1	0	0	0
9	0	0	$-\frac{R_2}{G}$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
10	0	0	$-\frac{R_2}{G}J$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
	$-\frac{K}{G}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0	0	0
11	$\frac{2(1+\mu)}{E}N$	$-\frac{2\mu}{E}$	$\frac{1+\mu}{E}N^2$	$\frac{2}{b}$	0	0	0

1. Függelék

A $C_{ik}^{(r)}$ és $C_{ik}^{(z)}$ mátrixok

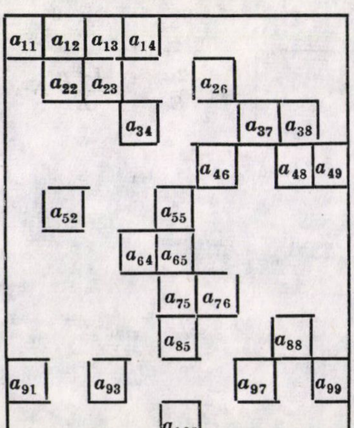
$$c_{ik}^{(r)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & A - \dfrac{2M}{Nr_{ik}} \\ 0 & \dfrac{2}{b} z_{ik} \\ 0 & \dfrac{2}{b} z_{ik}\left(A - \dfrac{2M}{Nr_{ik}}\right) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{R_2}{r_{ik}} & 0 \\ \dfrac{2}{b} z_{ik} \dfrac{R_2}{r_{ik}} & 0 \\ \dfrac{2}{b} z_{ik}\left(K - J\dfrac{R_2}{r_{ik}}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|^T, \quad c_{ik}^{(z)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2C + 3Dr_{ik} \\ 0 & \dfrac{2}{b} z_{ik}(-2C+3Dr_{ik}) \\ \dfrac{R_2}{r_{ik}} & 0 \\ \dfrac{2}{b} z_{ik} \dfrac{R_2}{r_{ik}} & 0 \\ \dfrac{2}{b} z_{ik}\left(K - J\dfrac{R_2}{r_{ik}}\right) & 0 \\ \dfrac{N}{b}\left(-2 + \dfrac{N}{r_{ik}}\right) & \dfrac{2}{b} z_{ik} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|^T$$

2. Függelék

A 2. Függelékben a mátrixokat álló nagybetűkkel jelöltük, míg az A_{pl} hipermátrix blokkjait kis a-val

Az A_{pl} mátrix elemei

$A_{pl} =$



Az A_{pl} mátrix struktúrája

$$a_{ij} = E^{*}_{ij} \left\| \frac{c_{ij}}{0} \right\| + E^{**}_{ij} \left\| \frac{0}{c_{ij}} \right\| \qquad (i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, \ldots, 9)$$

$$E^{*}_{11} = E^{*}_{22} = E^{*}_{34} = E^{*}_{46} = E^{1}$$
$$E^{*}_{12} = E^{*}_{23} = E^{*}_{38} = E^{*}_{49} = E^{2}$$
$$E^{*}_{14} = E^{*}_{26} = E^{*}_{37} = E^{*}_{48} = E^{3}$$
$$E^{**}_{11} = E^{**}_{23} = E^{**}_{37} = E^{**}_{48} = E^{4}$$
$$E^{**}_{12} = E^{**}_{22} = E^{**}_{38} = E^{**}_{48} = E^{5}$$
$$E^{**}_{14} = E^{**}_{26} = E^{**}_{34} = E^{**}_{49} = E^{6}$$

$$E^{1} = \left\| \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad E^{2} = \left\| \begin{array}{c|c} -E & 0 \\ \hline E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad E^{3} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$E^{4} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right\| \qquad E^{5} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -E^{\circ} \end{array} \right\| \qquad E^{6} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -E_0 \end{array} \right\|$$

ahol E, E°, E_0 és 0 mátrixokat lásd a 209. oldalon

$$a_{52} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{R_2-R_1}{B} & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{55} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{64} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{65} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{75} = a_{65}$$

$$a_{76} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{85} = a_{55}$$

$$a_{88} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & \frac{R_2-R_1}{b} & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{9j} = E_{9j} \cdot C_{ij}$$

$$E_{91} = E_{99} = -E_{92} = -E_{97} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$a_{105} = \| \; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \; \|$$

Az A_{pl} mátrix elemei

$$\vec{p}_{\mathrm{pl}} = \| \underbrace{0 \ldots 0}_{n} \, p_{\mathrm{pl}} \|^{T},$$

$$p_{\mathrm{pl}} = \sqrt{\tau_f^2 - \frac{1}{3} (\sigma_r^{pl} - \sigma_z^{pl})^2}$$

A „képlékeny" terhelés.