OLDALNYOMÁSMENTES, LAPOS, EGYENLETESEN MEGOSZLÓ ERŐKKEL TERHELT, NYEREG ALAKÚ HIPERBOLIKUS PARABOLOIDHÉJAK STABILITÁSA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett: 1978. december 28-án]

Ez a dolgozat egy három részből álló sorozat második része. Az első részben olyan elméleti kérdésekkel foglalkoztunk (a membránmegoldás létezése és egyértelműsége, kinematikai határozatlanság), amelyeknek megválaszolása kellő alapot nyújt a mostani stabilitási elemzések elvégzéséhez. Cikkünkben a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos HP-héjak *deformálatlan* alaphelyzetből történő *elágazási* jelenségét tárgyaljuk. Ennek során foglalkozunk azzal is, hogy a *nyúlásmentes alakváltozás* kialakulási lehetősége milyen hatással van a stabilitásvesztési folyamatra.

Jelölések

$$C_{ij} = \cos\frac{i\pi}{2a}x \cdot \cos\frac{j\pi}{2b}y; \quad C_{mn} = \cos\frac{m\pi}{2a}x \cdot \cos\frac{n\pi}{2b}y;$$

$D = \dfrac{Eh}{(1-\mu^2)}$	fajlagos nyúlási merevség;
E	rugalmassági modulus;
F	a középfelületi erők feszültségfüggvénye ($F^{\cdot\cdot} = N_x$, $F^{\cdot\prime} = -N_{xy}$, $F'' = N_y$);
F_0	az alaphelyzet feszültségfüggvénye;
$\overline{F}^0$	az F_0 függvény első variációja ($F = F_0 + \overline{F}$);
$K = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	fajlagos hajlítási merevség;
M_x, M_y, M_{xy}	a héj hajlítónyomatékai, csavarónyomatéka;
N_x, N_{xy}, N_y	a középfelületi erők fajlagos értékei;
N_{xb}, N_{xyb}, N_{yb}	a hajlítási elmélettel nyert középfelületi erők fajlagos értékei;
N_{xm}, N_{xym}, N_{ym}	a membránerők fajlagos értékei;

$$S_{ij} = \sin\frac{i\pi}{2a}x \cdot \sin\frac{j\pi}{2b}y; \quad S_{mn} = \sin\frac{m\pi}{2a}x \cdot \sin\frac{n\pi}{2b}y;$$

U_b	a hajlítási erők potenciálja;
U_m	a középfelületi erők potenciálja;
V	a külső erők potenciálja;
$2a$, $2b$	az x, ill. y irányú peremvetületek hossza;
f_a, f_b	az x, ill. y irányú ívek nyílmagasságai;
h	a héj vastagsága;
i, ill. j	x, ill. y irányú félhullámok száma (n indexszel nyúlásmentes alakváltozás);
p	a z tengely irányába mutató, egyenletesen megoszló, szimmetrikus, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi teher intenzitása;
p_{cr}^{lin}	a lineáris kritikus teher;
$\overline{p}_{cr}$	az átpattanási kritikus teher;
$p_{cr,d}^{lin}$	a deformált alaphelyzetből elágazó kihajlás lineáris kritikus terhe;
u, v	az x, ill. y irányú felületi érintők irányába eső eltolódások;
$z(x, y)$; $\bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$	a héj középfelületének ordinátái;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása ($w = w_0 + \overline{w}$);

* Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

w_0	a középfelületi pontoknak az alaphelyzetben bekövetkező normális irányú eltolódása;
$\bar{w}$	az elágazási jelenségeknél kialakuló normális irányú eltolódásvariáció (δw_0);
w_k	a kezdeti hullámosság amplitúdója;
$\alpha = f_a/f_b$	nyílmagasságarány;
$\beta = a/h$	héjparaméter;
$\gamma = a/b$	oldalarány;
δ	a variációképzés szimbóluma (rövidítve: $\delta w_0 \equiv \bar{w}$);
η	a $\bar{z}$ tengelyre illeszkedő síkban levő, a második felületi alkotósereg irányába mutató koordináta;
$\lambda = \frac{P_{er}^{lin}}{E}$	sajátérték;
μ	a harántkontrakciós tényező (0, 2);
ξ	a $\bar{z}$ tengelyre illeszkedő síkban levő, az első egyenes felületi alkotósereg irányába mutató koordináta;
Π	a külső és belső potenciális energiák összege;
$\varrho = f_b/b$	héjparaméter;
ω	az iránysíkok közötti szög fele;
$\Delta\Delta(\,) = (\,)^{IV} + 2(\,)^{\cdot\cdot\prime\prime} + (\,)^{::}$	a biharmonikus differenciál-operátor;
$L_p(f_1, f_2) = f_1^{\prime\prime} \cdot f_2^{\cdot\cdot} - 2f_1^{\cdot\prime} f_2^{\cdot\prime} + f_1^{\cdot\cdot} f_2^{\prime\prime}$	a Pucher-féle differenciál-operátor.

1. Bevezetés

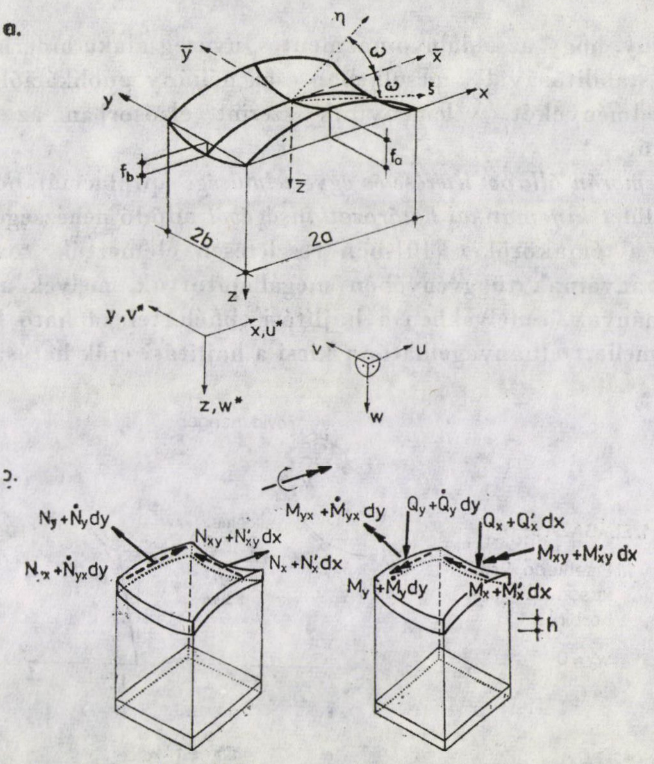
Tetszetős alakjuk és az egyenes alkotóik nyújtotta kedvező kivitelezési lehetőségeik miatt egyre sűrűbben építenek hiperbolikus paraboloid (a továbbiakban HP) alakú héjszerkezeteket. Ezeket leggyakrabban a felületi alkotóik vagy a főgörbületi íveik mentén támasztják meg peremtartókkal.

Az egyenes alkotók mentén oldalnyomásmentesen alátámasztott torznégyszöghéj statikai kérdéseit mind az elsőrendű, mind a másodrendű elmélettel részletesen tárgyalták [5], [7], [15], [19], [21].

A nyereg alakú, két-két főgörbületi íve mentén oldalnyomást és csavarást felvenni nem tudó (ún. oldalnyomásmentes) peremívekkel ellátott HP héjak esetében (1a. ábra) azonban nem ez a helyzet.

Mihailescu [16] a nyereg alakú HP-héjak elágazási jelenségét ($w_0 = 0$) — egytagú, szimmetrikus horpadási alakokat feltételezve — a síklemezek horpadási egyenlete alapján vizsgálta. A héj középső tartományában fellépő állandó nagyságú alkotóirányú membrán nyomóerőket egy helyettesítő síklemez peremein működtetve határozta meg a kritikus alkotóirányú nyomóerő értékét. A figyelembe vett egytagú horpadási alakok nem a HP-héj mértékadó horpadási alakjai. Ezen megoldás alkalmazása jelentős túlméretezéshez vezet.

Apeland [1] — egytagú horpadási alakokkal — *oldalnyomásos* paraboloid héjak elágazási jelenségét tárgyalta. A levezetett összefüggései (gyakorlatban nem megvalósítható) nyíróerőmentes, az egyik irányban (x: felülről domború ívek) állandó nyomó-, a másik irányban (y: felülről homorú ívek) állandó húzóerőkkel dolgozó héjakra érvényesek. Peremfeltételei és a felvett (önkényes) membrán erőjáték teljesen eltér az általunk vizsgálni kívánt esettől.



1. ábra. A nyereg alakú HP-héj geometriai adatai, belső erők és eltolódások

Gioncu [9] az Apeland-féle membrán erőjátékot vette alapul. Feltételezte, hogy a HP-héj az x irányban sok hullámban horpad. Ilyen feltételezésekkel arra az eredményre jutott, hogy a nyereg alakú HP-héj lineáris kritikus terhe azonos a vele megegyező görbületi viszonyú torznégyszöghéj kritikus terhével. Mind a membrán megoldásra, mind a horpadási alakra (egytagú) vonatkozó feltevései önkényesek, így megoldását kritikával kell fogadnunk.

Tsuboi [23] oldalnyomásmentes, lapos paraboloidhéjak horpadását (elágazását) tárgyalta. Egytagú horpadási alakokkal végzett számításai négyzet alaprajzú héjakra érvényesek. Nem tér ki a nyúlásmentes alakváltozási lehetőség hatásának elemzésére.

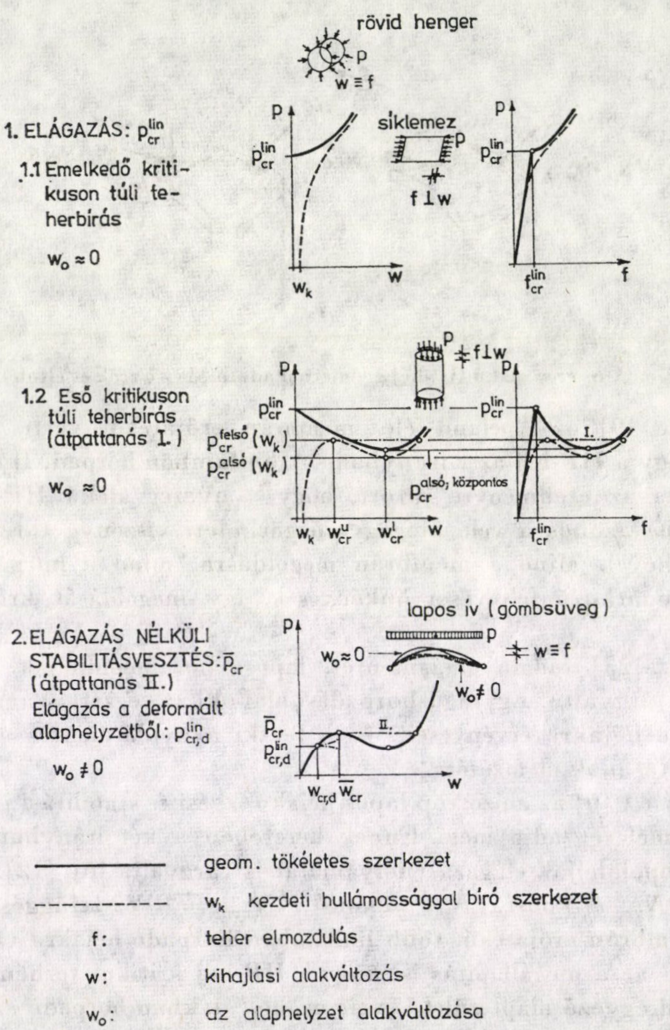
Dulácska [6] az anizotróp lapos héjak rezgési és stabilitási jelenségeinek általános elméletét adja meg. Ennek keretében a két irányban különböző görbületű kupolahéjak elágazási folyamatát is tárgyalta [6], [12]. Ezen eredményei az $N_{xm} = \text{konst.}$, $N_{ym} = \text{konst.}$, $N_{xym} = 0$ összefüggésekkel jellemezhető membrán erőjátékú, több hullámban horpadó héjakra vonatkoznak. Igen jelentős az a megállapítás is, hogy a HP-héj kritikus terhének alsó korlátja a héjjal egyező alapterületű, vele azonos alakban horpadó síklemez horpasztó feszültségének megfelelő teher.

Az a tény, hogy az oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak stabilitásával kapcsolatban csak néhány publikációban találunk bizonyos eredményeket, véleményünk szerint elsősorban az alábbiakkal magyarázható:

— *a membrán állapot létezése és egyértelműsége* problémájából, valamint

— a felület *kinematikai határozatlanságából* adódó nehézségek.

Ezeket a témaköröket [10]-ben részletesen elemeztük, továbbá a héj geometriai arányainak függvényében megállapítottuk, melyek azok a paraméter tartományok, amelyekben a hajlítási elmélettel kapható középfelületi erők hatása mellett elhanyagolhatóan kicsi a hajlítási erők hatása.



2. ábra. **Stabilitási jelenségek teherbírási jelleggörbéinek néhány alapesete**

Ezen geometriai arányok mellett jogos a lineáris kritikus teherre való vizsgálat. Cikkünkben a nyereg alakú, oldalnyomásmentes hiperbolikus paraboloidhéjak deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) történő *elágazási* jelenségét tárgyaljuk (2. ábra). A tárgyalás során foglalkozunk azzal is, hogy a *nyúlásmentes alakváltozás* kialakulási lehetősége [8], [10], [12], [13] milyen hatással van a stabilitásvesztési folyamatra.

Elméleti eredményeinket a gyakorlati tervezés igényeinek megfelelően diagramokkal szemléltetjük.

2. Az alaphelyzet jellemzése, alapfeltevések

A lapos héjak elsőrendű hajlítási elmélete alapján [10]-ben előállítottuk a $p = \text{const.}$ terhű héjszerkezet belső erőinek meghatározására szolgáló kifejezéseket:

$$p(x, y) = \frac{16}{\pi^2} p \sum_m^M \sum_n^N \frac{1}{mn} \sin\frac{m\pi}{2a} x \sin\frac{n\pi}{2b} y , \tag{2.1}$$

$$m = 1, 3, 5, \ldots M,$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots, N$$

$$\alpha = f_a/f_b, \ \beta = a/h, \qquad (2.2a-d)$$

$$\gamma = a/b, \ \varrho = f_b/b,$$

$$A_{mn} = \frac{768(1-\mu^2)}{\pi^4} (\varrho\beta\gamma)^2 (m^2 - \alpha n^2), \tag{2.3}$$

$$B_{mn} = (m^2 + \gamma^2 n^2)^2, \tag{2.4}$$

$$N_{mn} = -\frac{A_{mn}}{A_{mn}(m^2 - \alpha n^2) + B_{mn}^2} \tag{2.5}$$

$$S_{mn} = \sin\frac{m\pi}{2a} x \cdot \sin\frac{n\pi}{2b} y ,$$

$$C_{mn} = \cos\frac{m\pi}{2a} x \cdot \cos\frac{n\pi}{2b} y , \qquad (2.6a-b)$$

$$n_x^\circ = -\frac{8}{\pi^2} \sum_m^M \sum_n^N \frac{n}{m} N_{mn} S_{mn},$$

$$n_{xy}^\circ = -\frac{8}{\pi^2 \gamma} \sum_m^M \sum_n^N N_{mn} C_{mn}, \qquad (2.7a-c)$$

$$n_y^\circ = -\frac{8}{\pi^2\gamma^2} \sum_m^M \sum_n^N \frac{m}{n} N_{mn} S_{mn},$$

$$m = 1, 3, 5, \ldots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots, N$$

$$m_x^\circ = -\frac{64}{\pi^4}\sum_m^M\sum_n^N \frac{m}{n}\frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn},$$

$$m_{xy}^\circ = -\frac{64(1-\mu)}{\pi^4}\gamma\sum_m^M\sum_n^N \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} C_{mn},$$

$$m_y^\circ = -\frac{64}{\pi^4}\gamma^2\sum_m^M\sum_n^N \frac{n}{m}\frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn}' S_{mn}, \qquad (2.8a-d)$$

$$w^\circ = -\frac{3072(1-\mu^2)}{\pi^6}\beta^4\sum_m^M\sum_n^N \frac{1}{mn}\frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn},$$

$$m = 1, 2, 5, \ldots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots, N$$

$$N_{xb} = n_x^\circ \frac{pa^2}{f_b},$$

$$N_{xyb} = n_{xy}^\circ \frac{pa^2}{f_b} \qquad (2.9a-c)$$

$$N_{yb} = n_y^\circ \frac{pa^2}{f_b},$$

$$M_x = (m_x^\circ + \mu m_y^\circ)\, pa^2,$$

$$M_{xy} = m_{xy}^\circ pa^2, \qquad (2.10a-d)$$

$$M_y = (m_y^\circ + \mu m_x^\circ)\, pa^2,$$

$$w = \frac{ph}{E} w^\circ.$$

A felsorolt összefüggések megfelelnek [2] megoldásának.

A stabilitási elemzéseket a lineáris elmélettel fogjuk elvégezni. Az elágazás bekövetkezte előtti *alaphelyzetet membrán állapotnak tekintjük.*

Ez azzal indokolható, hogy [10] szerint kb. az $f_a/f_b = (1{,}5 \div 2) \div 4$ geometriai arányok esetén a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt hiperbolikus paraboloidhéjak *hajlítási elmélettel számítható középfelületi erőinek hatása mellett a hajlítási hatások elenyészőek.* Ebben a paraméter tartományban tehát a vizsgált nyereg alakú HP-héjak membrán héjaknak tekinthetők. Ebből következően membrán erőknek a (2.9a—c) *folytonos* függvényekkel leírható normál- és csúsztatóerőket vehetjük.

A diszkontinuitásos membrán megoldás használata egyrészt kényelmetlen lenne, másrészt ilyen megoldás is csak meghatározott f_a/f_b arányok mellett lehetséges.

Az elágazás bekövetkezte előtti membrán jellegű alaphelyzet lehajlási alakváltozásai — amint a szakirodalomban [3], [12], [17], [22], [25] általánosan elfogadott — elhanyagolhatók, tehát

$$w_0 = 0. \tag{2.11}$$

Az ún. *deformálatlan alaphelyzetet* a (2.11) egyenlettel definiáljuk.

Tekintettel arra, hogy nem adható meg pontosan az az f_a/f_b érték, amelynél kisebb f_a/f_b arányok esetén már nem tekinthető a héj membránnak, a lineáris kritikus terheket a [10]-ben vizsgált teljes paraméter tartományban ($f_a/f_b = 1 \div 4$) meghatározzuk. Természetesen már előre tudjuk, hogy kb. az $f_a/f_b = 1 \div (1{,}5 \div 2)$ nyílmagasságarányokhoz számítható lineáris kritikus teher értékeknek csak elméleti jelentősége van. Ebben a tartományban a héjakat *csak nemlineáris elmélettel* — a hajlítónyomatékok figyelembevételével — lehet kezelni. Egy későbbi tanulmányunkban a nemlineáris elemzést is elfogjuk végezni [11]. A jelen tanulmányban meghatározott lineáris kritikus terhek és a nem lineáris elmélettel kapható teher-lehajlás diagramok segítségével megállapítható a szóban forgó HP-héjak teljes stabilitási viselkedése.

Az elemzések során a héjakat *geometriailag tökéletesnek*, *laposnak* és *lineárisan rugalmas* anyagúnak tételezzük fel.

Az egész felületre kiterjedő horpadási alakokat vizsgáljuk.

A külső terhektől független nyírási sajátfeszültségeket zérusnak tekintjük.

3. Az alapegyenletek

Ha a héjszerkezet horpadása deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) megy végbe, akkor az alaphelyzetbeli (0 indexszel ellátott) középfelületi erők U_{m0} és a hajlítási erők U_{b0} potenciális energiájának második variációja

$$\delta^2 U_{m0} = \frac{1}{Eh}\int_0^{2a}\int_0^{2b} (\bar{F}^{\prime\prime 2} - 2\mu \bar{F}^{\prime\prime} \bar{F}^{\cdot\cdot} + \bar{F}^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu)\, \bar{F}^{\cdot\prime 2} +$$

$$+ (F_0^{\prime\prime} \bar{w}^{\cdot 2} - 2F_0^{\cdot\prime} \bar{w}^{\cdot} \bar{w}^{\prime} + F_0^{\cdot\cdot} w^{\prime 2})\, Eh]\, dxdy, \tag{3.1}$$

$$\delta^2 U_{b0} = K\int_0^{2a}\int_0^{2b} [\bar{w}^{\prime\prime 2} + 2\mu \bar{w}^{\cdot\cdot}\, \bar{w}^{\prime\prime} + \bar{w}^{\cdot\cdot 2} + 2(1-\mu)\, \bar{w}^{\cdot\prime 2}]\, dxdy \tag{3.2}$$

alakban írható fel.

Felülvonással az alaphelyzetből a szomszédhelyzetbe való átmenet során kialakuló $\bar{w} \equiv \delta w_0$ lehajlás variációkat és az $\bar{F}(\bar{w}) \equiv \delta F_0$ feszültségfüggvény variációkat jelöltük.

A p külső terhelés V_0 potenciális energiájának második variációja jelen esetben zérus:

$$\delta^2 V_0 = 0. \tag{3.3}$$

Jelölje u_0, ill. π_0 a belső, ill. a teljes potenciális energia második variációjának fajlagos értékét.

A teljes Π_0 alaphelyzetbeli potenciális energia második variációját végeredményben a

$$\delta^2 U_0 = \int_0^{2a}\int_0^{2b} u_0\, dxdy = \delta^2 U_{m0} + \delta^2 U_{b0}, \tag{3.4}$$

$$\delta^2 \Pi_0 = \int_0^{2a}\int_0^{2b} \pi_0\, dxdy = \delta^2 U_0 + \delta^2 V_0 \tag{3.5}$$

összefüggések adják meg. A (3.5) energia kifejezés a horpadást követő és az azt megelőző állapot potenciális energiája $\Delta\Pi$ különbségének a kétszerese.

Az indifferens egyensúlyi helyzet kritériuma az, hogy — a rendszer erőinek változatlanul hagyása mellett — létezzék a teljes Π_0 potenciális energiának legalább egy olyan különleges második variációja, amelynek minden első variációja zérus. Így a p_{cr}^{lin} teher meghatározásához a

$$\delta(\delta^2 \Pi_0) = 0 \tag{3.6}$$

variációs feladatot kell megoldani.

A szóban forgó $\delta^2\Pi_0$ funkcionált stacionárius értékké tevő $\overline{w}$ extrémális függvényt az alábbi Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}'}\right)^{'} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot}}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{''}}\right)^{''} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot '}}\right)^{\cdot '} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0. \tag{3.7}$$

Ha a középfelületi erők U_{m0} potenciális energiája második variációjában az $\bar{F}$ feszültségfüggvény differenciálhányadosait az $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\overline{w}$ eltolódás variációk függvényében írjuk fel, majd a (3.7) egyenlet által kijelölt műveleteket elvégezzük, akkor a

$$K\Delta\Delta\overline{w} - L_p(\bar{F}, z) - L_p(F_0, \overline{w}) = 0 \tag{3.8}$$

egyenlethez jutunk. Mint ismeretes, a (3.8) összefüggés a lapos héjak deformálatlan alaphelyzetből végbemenő elágazási jelenségének egyensúlyi egyenlete [6], [7].

Írjuk át a (3.1) kifejezést a következő alakra:

$$\delta^2 U_{m0} = \int_0^{2a}\int_0^{2b} [2(\bar{F}^{''}(\bar{v}^{\cdot} - \overline{w}z^{\cdot\cdot}) - \bar{F}^{\cdot '}(\bar{u}^{\cdot} + \bar{v}^{'}) + \bar{F}^{\cdot\cdot}(\bar{u}^{'} - \overline{w}z^{''})) -$$

$$- \frac{1}{Eh}(\bar{F}^{''2} - 2\mu\, \bar{F}^{\cdot\cdot}\bar{F}^{''} + \bar{F}^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu)\, \bar{F}^{'\cdot 2}) +$$

$$+ F_0^{''}\overline{w}^{\cdot 2} - 2F_0^{\cdot '}\, \overline{w}^{\cdot} w^{'} + F_0^{\cdot\cdot}\overline{w}^{'2}]\, dxdy. \tag{3.9}$$

Ha most a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján a $\delta^2 U_0$ funkcionál variációképzését $\bar{F}$ szerint hajtjuk végre, akkor a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{''}}\right)^{''} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{\cdot '}}\right)^{\cdot '} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0 \tag{3.10}$$

Euler—Lagrange-féle variációs egyenlet segítségével kaphatjuk meg a lapos héjak elágazási feladatának kompatibilitási egyenletét [6], [7]:

$$\Delta\Delta\bar{F} + D(1-\mu^2)\,L_p(\bar{w}, z) = 0. \tag{3.11}$$

A későbbiekben a (3.8) és (3.11) egyenleteket Galerkin-módszerrel meg fogjuk oldani. A pontos megoldás megadása előtt célszerűnek tartjuk olyan közelítő megoldás előállítását, mely a tárgyalt elágazási jelenség leglényegesebb vonásait egyszerű eszközökkel le tudja írni.

4. Közelítő megoldás

DULÁCSKA egytagú horpadási alakokat alapul vevő általános egyenletei [6] alapján ki lehet mutatni, hogy az egyenletesen megoszló p terhét az

$$N_{x0} = -\frac{pa^2}{2fa},$$

$N_{y0} = N_{xy0} = 0$ erőrendszerrel *ívszerűen* hordó nyereg alakú HP-héj (l. a 3a. ábrán legfelül) lineáris kritikus terhe a

$$p_{cr,h}^{lin} = \frac{E\pi^2}{24(1-\mu^2)}\frac{\alpha\varrho}{\gamma\beta^3}\frac{1}{i^2}(i^2+\gamma^2 j^2)^2 + \frac{E32}{\pi^2}\frac{\alpha\gamma\varrho^3}{\beta}\frac{1}{i^2}\left(\frac{\alpha j^2 - i^2}{i^2+\gamma^2 j^2}\right)^2 \tag{4.1}$$

képletből számítható. Az első tag a hajlítási, a második tag a középfelületnyúlási hatást fejezi ki. Nyúlásmentes alakváltozás esetében a (4.1) kifejezés a peremein a HP-héj peremerőivel terhelt, a héjjal azonos alakban horpadó *síklemez* kritikus terhét adja meg [6], [12].

A következőkben bebizonyítjuk, hogy a (4.1) összefüggésből kapható lineáris kritikus teher az oldalnyomásmentes HP-héj lineáris kritikus terhének *felső korlátja*:

$$p_{cr}^{lin} < p_{cr,h}^{lin}. \tag{4.2}$$

A továbbiakban az említett ívszerűen dolgozó héjat *homogén feszültségi állapotú héjnak* nevezzük (h index).

4.1. *Nyúlásmentes horpadás*

A jelen fejezetben tárgyalt esetekben kell, hogy teljesedjék a nyúlásmentes alakváltozás [10]-ben levezetett kinematikai kritériuma:

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{i_n^2}{j_n^2}. \tag{4.3}$$

Amennyiben a HP-héj $N_{x0} = \text{const}$, $N_{xy0} = 0$, $N_{y0} = \text{const}$. belső erőkkel viselné a terheit, akkor — ha nyúlik a középfelület horpadása során, ha nem — a (3.8) és (3.11) *ekkor állandó* együtthatós differenciálegyenletek sajátfüggvénye

$$w_{ij} S_{ij} = w_{ij} \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y$$

alakú lenne. Nyúlásmentes elágazási jelenségnél az i_n, j_n horpadási félhullámszámok között a (4.3) összefüggés által megszabott kapcsolat van:

$$\overline{w} = w_{i_n j_n} S_{i_n j_n}, \tag{4.4a—b}$$

$$S_{i_n j_n} = \sin \frac{i_n \pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j_n \pi}{2b} y .$$

Az Aimond-féle geometriai elmélet szerinti membránerők állandók ugyan, de a csúsztatóerők nem zérus nagyságúak az egész tartományban. Ilyen erőjáték esetében tehát a

$$w_{i_n j_n} \cdot S_{i_n j_n}$$

alakú egytagú függvény nem lehet pontos sajátfüggvény.

Ha a középfelületi erőket a (2.9a—c) folytonos függvényekkel határozzuk meg, akkor a *változó* együtthatójú (3.8) és (3.11) differenciálegyenleteknek a (4.4a—b) kifejezés nem lehet egzakt megoldása.

A most következő vizsgálatokkal igazoljuk a (4.2) egyenlőtlenség teljesülését. Ehhez először egytagú horpadási alakokat veszünk alapul, mert ha ezekre teljesül az egyenlőtlenség, akkor annak a szinusz alakú függvények kombinációjából álló pontos horpadási alakra még inkább teljesülnie kell. Ennek az az oka, hogy a feladat egyensúlyát leíró parciális differenciáloperátor pozitív definit. Ekkor a Galerkin-módszer felülről közelít, tehát több tag esetén kisebb sajátérték adódik.

Ha a *homogén feszültségi állapotú héj* a (4.4a—b) alakban nyúlásmentesen kihorpad, akkor az

$$X = K\Delta\Delta\overline{w} - L_p(F_0, \overline{w}), \tag{4.5}$$

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} X \cdot S_{i_n j_n} dx\, dy = 0 \tag{4.6}$$

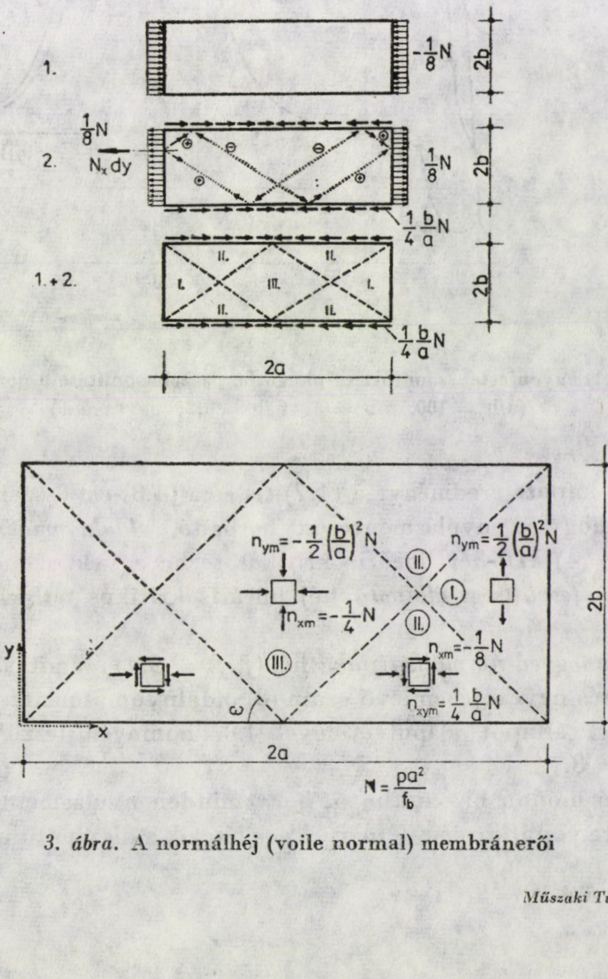
egyenletekkel jellemezhető Galerkin-módszerrel a következőket kapjuk:

$$\frac{\pi^4}{16} K \frac{b}{a^3} (i_n^2 + \gamma^2 j_n^2)^2 - \frac{\pi^2}{8} p_{cr,h}^{lin} \frac{ab}{f_a} i_n^2 = 0, \tag{4.7}$$

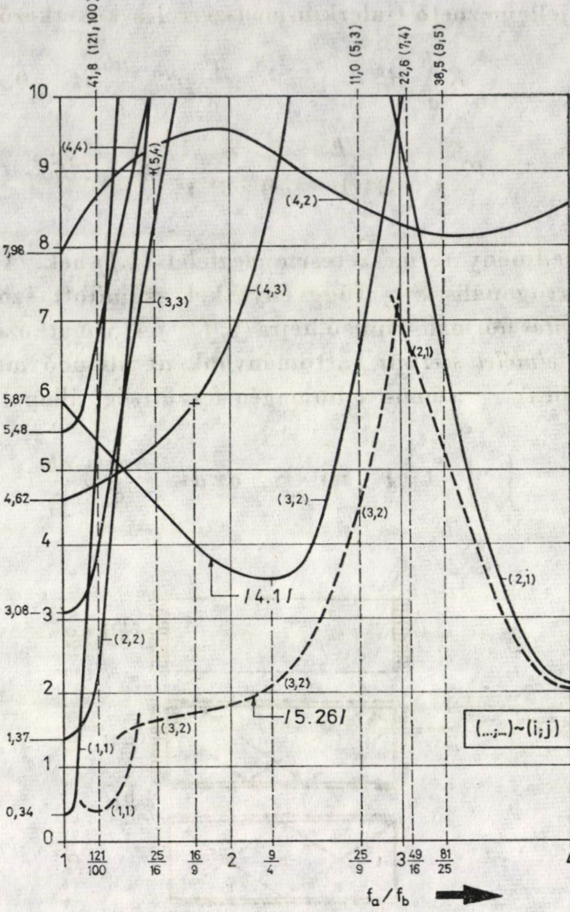
$$p_{cr,h}^{lin} = \frac{E\pi^2}{24(1-\mu^2)} \frac{\alpha\varrho}{\gamma\beta^3} \frac{1}{i_n^2} (i_n^2 + \gamma^2 j_n^2)^2. \tag{4.8}$$

Ez az eredmény természetesen megfelel (4.1)-nek. Az $L_p(F_0, \overline{w})$ függvénynek az ortogonális $S_{i_n j_n}$ függvényekkel számított szorzatintegrálja az *oldalnyomásmentes* normális típusú héjra ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan — az ***Aimond-féle geometriai elmélet szerinti*** tartományonként állandó membránerőket feltételezve (3. ábra) — azonos a homogén feszültségi állapotra meghatározott értékkel:

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} L_p(F_0, \overline{w}) \cdot S_{i_n j_n} dx\, dy = \frac{\pi^2}{8} p \frac{ab}{f_a} i_n^2. \tag{4.9}$$



3. ábra. A normálhéj (voile normal) membránerői



4. ábra. A (4.1) egyenlettel számított csipkegörbe összehasonlítása a pontos megoldással ($a/h = 100$, $a/b = 1$, $f_b/b = 0{,}2$; egytagú $\overline{w}$)

A most kapott eredményt a (4.7)-tel és a (4.8)-cal összehasonlítva, megállapítható, hogy a nyúlásmentesen horpadó, *oldalnyomásmentes normális típusú* ($f_a/f_b = 4$) HP-héj lineáris kritikus terhe a vele azonos alakban horpadó *homogén feszültségi állapotú* héj lineáris kritikus terhével *egyenlő* (egytagú $\overline{w}$).

A *háromnegyed normális típusú* héj ($f_a/f_b = 9/4$) számítása azt adta, hogy a (4.9) kifejezés nevezőjében levő szám (8) oldalnyomásmentes diszkontinuitásos feszültségi állapot alapulvételével 4.8, homogén feszültségi állapottal meghatározva 8.

Hasonló módon bizonyítható, hogy minden nyúlásmentes alakban horpadó HP-héjra vonatkozóan — melyeknek létezik a diszkontinuitásos membrán állapota — a (4.9) kifejezést a homogén feszültségi állapot teszi minimálissá. Ebből következik a tárgyalt — egytagú $\overline{w}$-t alapul vevő — esetekre a (4.2) egyenlőtlenség teljesülése.

A fenti eredményekből [(4.7)—(4.9)] az is következik, hogy ha képes a *normális* típusú HP-héj nyúlásmentesen horpadni, akkor a lineáris kritikus terhének nagysága független a héjban a horpadás előtt kialakult belső erők x és y irányú eloszlásától.

Kimutattuk [10], hogy azon f_a/f_b tartományban, ahol a hajlítási hatások elhanyagolhatóan kicsik, a kettős Fourier-sorokkal meghatározott [(2.9a—c)] belső erőfüggvényeket jól közelítik a geometriai elmélet szolgáltatta belső erők.

Ennek megfelelően, ha a membránerők nem állandóak, a (4.8) *kifejezés* akkor is *felső korlátja* a nyúlásmentesen horpadó héj *lineáris kritikus terhének*. Ezt a megállapítást támasztja alá a 4. ábra, melyen a (4.1) kifejezés szolgáltatta csipkegörbéket tüntettük fel az 5. fejezetben előállított, egytagú $\overline{w}$ horpadási alakokkal számolt, pontos megoldás csipkegörbéivel együtt. A (4.2) egyenlőtlenség feltétlenül kielégül, hiszen a sajátérték feladat *többtagú* (pontos) *horpadási alakkal* végrehajtott számítása olyan csipkegörbét ad (6. ábra), mely a 4. ábrán látható, szaggatott vonallal rajzolt (egytagú horpadási alakokkal meghatározott) csipkegörbe alatt fut.

Az ábráról a (4.3) összefüggés segítségével állapíthatjuk meg a függőleges szaggatott vonalakkal jelzett — nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró — HP-héjakhoz tartozó nyúlásmentes horpadási függvények alakját.

4.2. *Nem nyúlásmentes horpadás*

Kézenfekvőnek látszik az a feltételezés, hogy az oldalnyomásmentes HP-héj nyúlásmentes horpadási alakkal számított lineáris kritikus terhe kisebb, mint a nyúlásos alakváltozással meghatározható lineáris kritikus teher. Ez azonban csak bizonyos f_a/f_b arányok mellett igaz. A (4.3) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy pl. a $f_a/f_b = 49/25$ nyílmagasságarány esetén x irányban 7, y irányban 5 félhullámot alkotna az egytagú nyúlásmentes horpadási alak.

Valószínű, hogy egy más — a *középfelület nyúlásával* járó — kisebb félhullámszámú horpadási alakhoz kisebb kritikus teher tartozik. A nyúlásmentes alakváltozást GEYLING [8] „reflexió-elmélete" alapján tárgyalva, a fentieket még szemléletesebben fogalmazhatjuk meg. Minél több (egyenes alkotók menti) körüljárás után térünk vissza valamely perempontba, annál rövidebb hullámhosszúságú nyúlásmentes alakváltozásra képes a héj. Ezt a rövid hullámhosszú nyúlásmentes alakváltozást pedig a héj K hajlítómerevsége nagymértékben meg tudja gátolni, s ekkor egy nagyobb hullámhosszúságú nyúlásos horpadási alak veszélyesebb lehet [12].

Ha horpadás közben nyúlik a középfelület, akkor a

$$\overline{w} = w_{ij} S_{ij},$$

$$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y \qquad (4.10a-b)$$

horpadási függvény S_{ij} tényezőjének az $L_p(F_0, \overline{w})$ függvénnyel vett szorzatintegráljához [(4.6)] hozzáadódik még az $L_p(\overline{F}, z)$ függvény megfelelő szorzatintegrálja is. A 4.1. fejezetben leírt módon bebizonyítható, hogy *egytagú nyúlásos horpadási alak esetén is teljesül a* (4.2) *egyenlőtlenség*. Az egytagú nyúlásos horpadási alakokkal végzett számításaink eredményei is a 4. ábrán láthatók. Az ábrán a függőleges szaggatott vonalak a nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró HP-héjakat jelzik. Jól látható, hogy csak bizonyos f_a/f_b arányok mellett ($f_a/f_b = 1, 9/4, 4$) mértékadó a nyúlásmentes alakváltozás. Egyéb — nyúlásmentes alakváltozási lehetőséget adó — f_a/f_b arányokhoz (121/100, 25/16, 16/9, 25/9, 49/16, 81/25) a középfelület nyúlásával járó, de nagyobb félhullámhosszúságú horpadási alakok a veszélyesebbek.

Érdemes megfigyelni, hogy ezek a nagyobb hullámhosszakat adó horpadási alakok éppen az $f_a/f_b = 1, 9/4$ és 4 arányokhoz tartozó nyúlásmentes horpadási alakok ($i_n = j_n = 1$; $i_n = 3, j_n = 2$; $i_n = 2, j_n = 1$). A pontos horpadási alak a (4.4a—b) és a (4.10a—b) típusú függvények lineáris kombinációja lesz [(5,1)]. A (4.2) egyenlőtlenség a ***kombináció esetén méginkább kielégül.***

A *szeminormál héj* ($f_a/f_b = 1$) esetében azért nem teljesül a (4.2) egyenlőtlenség, mert ez a héj — és a hozzá hasonló viselkedésű, kb. $f_a/f_b = 1 \div 1{,}5$ paraméterű héjak — semmiképpen sem tekinthetők membránhéjaknak [10]. Ezek a héjak a terheiket túlnyomórészt hajlítási erőkkel viselik, így a hozzájuk tartozó (fiktív) lineáris kritikus terheket csak a teljesség kedvéért határoztuk meg.

Nagy *gyakorlati haszna* van annak az eredménynek, hogy a [(4.1) (ill. 4.8)] képlet a *normális típusú héjra* ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan mindössze kb. 4%-kal adott nagyobb értéket, mint az egy tagra vonatkozó (5.26) pontos megoldás (a 4. ábrán feltüntetett paraméterek esetén). 16 tagú horpadási függvénnyel számolva a hiba kb. 8%-ra adódott. Előtervezéshez a *háromnegyed normális* típusú héjak ($f_a/f_b = 9/4$) lineáris kritikus terhét is jó közelítéssel megkaphatjuk a (4.8) egyenlettel majdnem teljesen megegyező képletből. Az eltérés mindössze az, hogy a nevezőben levő szám 24 helyett 40. Ezt az eredményt a diszkontinuitásos membrán erőjáték alapulvételével kaptuk meg. A 6. ábrán látható pontos megoldással összehasonlítva a hiba kisebb, mint a normálhéjra ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan a (4.8) képlettel előállított értékek említett hibája.

5. A sajátértékfeladat pontos megoldása

5.1 *A horpadási alak felvétele*

Ismeretes, hogy a kis alakváltozásokat végző rudak és síklemezek elágazási jelenségének egyik fontos feltételezése a rúdtengely és a középfelület nyúlásmentessége [3], [17], [22].

Héjak lineáris kritikus terhének meghatározásakor azonban általában nem tételezhetjük fel a középfelület nyúlásmentességét [3], [12], [17], [22], [25]. Csak akkor maradhat a héjak középfelülete nyúlásmentes, ha a szerkezet geomeriai arányai és megtámasztási módja lehetővé teszik a nyúlásmentes alakváltozási folyamatot [8], [10], [13].

A héj nyúlásmentes horpadási alakja bizonyos esetekben veszélyesebb, mint a nagyobb hullámhosszúságú, de a középfelület nyúlásával járó horpadási alak. A 4. fejezetben leírtak szerint a nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró HP héjak bizonyos megszámlálhatóan végtelen elemű f_a/f_b halmazához ($f_a/f_b = 1, 9/4, 4, \ldots$) az egytagú nyúlásmentes horpadási alak, egy másik megszámlálhatóan végtelen elemű f_a/f_b halmazhoz (121/100, 25/16, 16/9, 25/9, 49/16, 81/25, ...) pedig az egytagú nyúlásos horpadási alak ad kisebb lineáris terhet.

Természetesen a valóságban nem nyúlásmentes vagy nyúlási horpadási alakok léteznek, hanem különböző horpadási hullámhosszak, melyek közül a szerkezet a (3.6) feltételnek megfelelően maga választ.

A fentiek alapján a horpadási sajátfüggvényt a

$$\overline{w} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij}\, S_{ij} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} \overline{w}_{ij} \tag{5.1}$$

függvénysor alakjában vesszük fel. Az i és j horpadási félhullámszámokról nem kötjük ki, hogy a (4.3) összefüggéssel jellemzett kapcsolatban álljanak egymással, de ennek lehetőségét nem is zárjuk ki. A későbbiekben részletezett algoritmus automatikusan, saját maga választja ki a horpadási függvény nyúlásos és nyúlásmentes komponenseit.

A pontos sajátfüggvényt helyettesítő $\overline{w}$ függvény minden egyes tagja kielégíti a feladat alábbi geometriai és statikai peremfeltételeit:

$$\overline{w}_{ij}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0, \quad \overline{w}_{ij}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0, \tag{5.2a—d}$$

$$\overline{w}''_{ij}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0, \quad \ddot{\overline{w}}_{ij}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0 \tag{5.3e—h}$$

Az $\bar{F}$ sajátfüggvényt az

$$\bar{F} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} F_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} \bar{F}_{ij} \tag{5.4}$$

függvénysorral írjuk le. Ezen sor minden tagja teljesíti a feladat peremnormálerőkre vonatkozó peremfeltételeit:

$$\bar{F}''_{ij}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0, \quad \bar{F}''_{ij}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0. \tag{5.5a—d}$$

5.2. *Megoldás Galerkin-módszerrel*

Mindenekelőtt a (3.11) egyenlet alapján meghatározzuk az (5.1) horpadási függvény egy-egy tagja és az (5.4) feszültségfüggvény egy-egy tagja közötti kapcsolatot:

$$F_{ij} = w_{ij} \frac{8}{\pi^2} Eha\gamma\varrho \frac{(\alpha j^2 - i^2)}{(i^2 + \gamma^2 j^2)^2}\,. \tag{5.6}$$

Ha most a (3.8) egyensúlyi egyenletbe behelyettesítjük az alaphelyzetbeli középfelületi erők (2.9a—c) függvényeit, valamint az (5.1), (5.4), (5.6) kifejezéseket, akkor az egyensúlyi egyenlet bal oldala (X) így írható fel:

$$\begin{aligned} \frac{4a}{\pi^2}\frac{X}{E} = {} & \frac{\pi^2}{48(1-\mu^2)}\frac{1}{\beta^3} \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij}(i^2 + \gamma^2 j^2)^2 \cdot S_{ij} + \\ & + \frac{16}{\pi^2}\frac{\varrho^2\gamma^2}{\beta} \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} \frac{(\alpha j^2 - i^2)^2}{(i^2 + \gamma^2 j^2)^2} S_{ij} + \frac{p}{E}\frac{\gamma}{\varrho} \times \\ & \times \left[n_x^\circ \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij}\, i^2 \cdot S_{ij} - 2n_{xy}^\circ \gamma \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij}\, ijC_{ij} + n_y^\circ \gamma^2 \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij}\, j^2 S_{ij} \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Az X *hibafüggvény* akkor lenne pontosan zérussal egyenlő, ha az (5.1) horpadási függvény a valóságos horpadási függvényt teljes pontossággal határozná meg.

Az (5.1) kifejezés lineárisan független komponensekből áll, továbbá kielégülnek a feladat összes geometriai és statikai peremfeltételei, ezért teljesülnek a Galerkin-módszer alkalmazhatóságának feltételei [4], [17], [18], [25].

Ha az X hibafüggvényt a $\overline{w}$ függvény komponenseinek ortogonális S_{ij} tényezői szerint sorbafejtve képzeljük el, akkor kitűnik, hogy a Galerkin-módszer alábbi — a virtuális elmozdulások tételéből (az anyagtörvény felhasználásával) variációs úton származtatható — definiáló egyenlete [25]

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} XS_{i'j'}\,dx\,dy = 0 \tag{5.8}$$

$$i' = 1, 2, \ldots, I_0$$

$$j' = 1, 2, \ldots, J_0$$

az X hibafüggvény zérushoz való tartását fejezi ki, ha $I_0 \to \infty$, $J_0 \to \infty$. Az X hibafüggvény tehát ortogonális a $\overline{w}$ függvény minden egyes komponensének S_{ij} tényezőjére.

A Galerkin-módszer pozitív definit operátorok esetében a p_{cr}^{lin} *sajátértékeket felülről közelíti* [4]. Ez következik abból is, hogy ez az eljárás nemcsak az alkalmazott rugalmasságtan közelítő differenciálegyenlet megoldási módszereinek egyike, hanem az energia-módszer egyik változatának is tekinthető.

Az (5.8) egyenlet megoldásakor a benne szereplő trigonometrikus függvényeknek a (2.9a—c) súlyfüggvényekre való ortogonalitását kell felírni.

Az (5.8) egyenlet az alábbi sajátértékfeladatra vezet:

$$\mathbf{A}\underline{w} = \lambda \underline{w}. \tag{5.9}$$

A fenti egyenlet részletezése:

$$\lambda = \frac{E}{p_{cr}^{lin}}, \tag{5.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{(N_0\times N_0)}{\mathbf{A}} = \underset{(N_0\times N_0)}{\mathbf{D}^{-1}}\ \underset{(N_0\times N_0)}{\mathbf{B}},\\
&\mathbf{D} = \langle d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{kk}, \ldots, d_{N_0N_0}\rangle,\\
&N_0 = I_0 \cdot J_0,\\
&d_{kk} = \frac{\pi^2}{48(1-\mu^2)}\,\frac{(i'^2+\gamma^2 j'^2)^2}{\beta^3} + \frac{16}{\pi^2}\,\frac{\varrho^2\gamma^2}{\beta}\,\frac{(\alpha j'^2 - i'^2)^2}{(i'^2+\gamma^2 i'^2)^2},
\end{aligned}\right\} \tag{5.11a—d}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{B} = \{\, b_{kl} \,\},\\
&b_{kl} = -\frac{\gamma}{\varrho ab}\int_0^{2a}\int_0^{2b}\left[n_x^\circ \sum_i^{I_0}\sum_j^{J_0} i^2 S_{ij} - 2n_{xy}^\circ \gamma \sum_i^{I_0}\sum_j^{J_0} ij\, C_{ij}\right.\\
&\left. + n_y^\circ \gamma^2 \sum_i^{I_0}\sum_j^{J_0} j^2 S_{ij}\right] S_{i'j'}\,dx\,dy,\\
&i' = 1, 2, \ldots I_0, \quad j' = 1, 2, \ldots, J_0\\
&k = j' + J_0(i'-1), \quad l = j + J_0(i-1).
\end{aligned}\right\} \tag{5.12a—e}$$

A **B** mátrix nem diagonálmátrix, mert képzése során a belső erők függvényeiből származó S_{mn}, C_{mn} függvények — mint súlyfüggvények — is bekerülnek az integráljelek mögé (általános ortogonalitás).

Vizsgálatainkat konzervatív erőtérben, az alap egyensúlyi helyzet kis környezetében végezzük, ezért a rendszer potenciális energiájának második variációja (a $2\Delta\Pi$ energianövekmény) az általános koordináták ($\overline{w}, \overline{w}', \overline{w}^{\cdot}, \overline{w}'', \overline{w}^{\cdot\prime}, \overline{w}^{\cdot\cdot}$) homogén kvadratikus alakja. Ebből következően a **B** mátrix (mely az alaphelyzetbeli erőknek az $\frac{1}{2}\overline{w}'^2, \overline{w}^{\cdot}\overline{w}', \frac{1}{2}\overline{w}^{\cdot 2}$ nyúlás és szögtorzulás növekményeken végzett munkájából származik) *valós szimmetrikus*. Belátható, hogy a **D** mátrix *valós*, *pozitív definit* diagonális mátrix.

Ismeretes, hogy a valós szimmetrikus mátrixok — a normális típusú mátrixok unitér transzformációjának speciális eseteként — hasonlósági transzformációval diagonizálhatók és sajátértékeik, valamint sajátvektoraik valósak [20], [24]. A $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}$ mátrix nem szimmetrikus, ezért az (5.9) *általánosított sajátérték feladatot* a $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ felbontás segítségével *célszerű visszavezetni* olyan *speciális sajátérték feladatra*, melynek **C** mátrixa valós szimmetrikus. A **B** és **D** mátrixokból származtatott **C** mátrix minden sajátértéke és sajátvektora továbbra is valós marad. A **D** mátrix említett felbontása a Cholesky-féle felbontás speciális esete.

A **C** mátrix képzésének lépései a következők:

$$\mathbf{B}\underline{w} = \lambda \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\underline{w}. \tag{5.13}$$

Az (5.13) egyenletet balról szorozzuk meg $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$-del:

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\underline{w} = \lambda D^{\frac{1}{2}}\, \underline{w}. \tag{5.14}$$

Bevezetve a

$$\underline{w} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\underline{x} \tag{5.15}$$

transzformációt, az (5.13) egyenlet így alakul:

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\,\underline{x} = \lambda\underline{x}. \tag{5.16}$$

A fenti egyenletben szereplő

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{B}\,\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \tag{5.17}$$

valós szimmetrikus mátrix

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E})\,\underline{x} = 0 \tag{5.18}$$

sajátérték feladata már a közismert *speciális sajátértékfeladat.* A **C** mátrix általános eleme a **B** és a **D** mátrixok megfelelő elemeiből képezhető:

$$c_{kl} = \frac{b_{kl}}{+\sqrt{d_{kk}\, d_{ll}}}\,. \tag{5.19}$$

Elvégezve az (5.8) egyenlet által kijelölt integrálási műveleteket, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$d_{kk} = \frac{\pi^6}{12\,288(1-\mu^2)} \frac{\varrho}{\gamma\beta^3}(i'^2+\gamma^2 j'^2)^2 + \frac{\pi^2}{16} \frac{\varrho^3\gamma}{\beta} \frac{(\alpha j'^2 - i'^2)^2}{(i'^2+\gamma^2 j'^2)^2}, \tag{5.20}$$

$$SZ = iji'j'[2(m^2j^2+n^2i^2) - (m^2+i^2-i'^2)(n^2+j^2-j'^2)], \tag{5.21}$$

$$NE = [m^2-(i+i')^2]\,[m^2-(i-i')^2]\,[n^2-(j+j')^2][n^2-(j-j')^2], \tag{5.22}$$

$$b_{kl} = \sum_m^M \sum_n^N N_{mn} \frac{SZ}{NE}, \tag{5.23}$$

$$i = 1, 2, \ldots, I_0, \quad j = 1, 2, \ldots, J_0, \quad m = 1, 3, \ldots, M, \quad n = 1, 3, \ldots, N,$$
$$i' = 1, 2, \ldots, I_0, \quad j' = 1, 2, \ldots, J_0,$$
$$k = j' + J_0(i'-1),$$
$$l = j + J_0(i-1).$$

Innen könnyen felismerhető a **D** valós mátrix pozitív definit volta és a **B** valós mátrix szimmetriája.

Az S_{mn} súlyfüggvényekkel vett általános ortogonalitásból adódóan csak az

$$i \pm i' = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots, \tag{5.24a—b}$$
$$j \pm j' = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$$

feltételeknek eleget tevő helyeken lesz a **B** mátrixban zérustól különböző elem. A **D** és a **B** mátrixok szerkezete így ábrázolható (legyen pl. I_0 és J_0 páros szám):

Amennyiben közelítő számításhoz csak egytagú horpadási alakot veszünk alapul, akkor a

$$\frac{p_{cr}^{lin}}{E} = \frac{d_{11}}{b_{11}} \tag{5.26}$$

kifejezést használhatjuk.

Érdemes megvizsgálni az (5.25) egyenletben feltüntetett **B** mátrix struktúráját. A **B** mátrix hipermátrixnak fogható fel, melyben a nem zérus blokkok „sakktáblaszerűen" helyezkednek el. *Ez az általános ortogonalitásból* (5.24a—b) *adódik.*

Amennyiben $I_0 = J_0$ — azaz x és y irányban azonos számú horpadási hullám alakul ki —, akkor a **B** mátrix független sorainak száma 4. Ez abból látható, hogy a „sakktáblaszerű" szerkezet miatt egy blokksorhoz két független sor tartozik és a hipermátrixban két független blokksor ismétlődik. A fen-

$$
\underset{\mathbf{D}}{
\begin{array}{c|cccccccccccccccc|}
 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \underset{\smile}{k} & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot\ N_0 \\
\hline
1 & \boxed{1,1} & & & & & & & & & & & & & & & \\
2 & & \boxed{,} & & & & & & & & & & & & & & \\
\cdot & & & \boxed{\cdot} & & & & & & & & & & & & & \\
\cdot & & & & \boxed{1,J_0} & & & & & & & & & & & & \\
\cdot & & & & & \boxed{2,1} & & & & & & & & & & & \\
\underset{\smile}{k} & & & & & & \boxed{2,2} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \boxed{\cdot} & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \boxed{2,J_0} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \boxed{\cdot} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \boxed{\cdot} & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \boxed{} & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \boxed{\cdot} & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \boxed{I_0,1} & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \boxed{I_0,2} & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & \boxed{\cdot} & \\
N_0 & & & & & & & & & & & & & & & & \boxed{I_0,J_0} \\
\hline
\end{array}
}
\quad
\begin{array}{c}
i',j' \\
\left|\begin{array}{c}
1,1 \\ 1,2 \\ \cdot \\ 1,J_0 \\ 2,1 \\ 2,2 \\ \cdot \\ 2,J_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_0,1 \\ I_0,2 \\ \cdot \\ I_0,J_0
\end{array}\right|
\end{array}
\; w\,\lambda\; -
\tag{5.25}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & . & . & . & \underbrace{k} & \underbrace{l} & . & . & . & N_0 \end{array} \\
\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
1 & 1,1 & & 1,3 & & & & & & 3,1 & & 3,3 & & & & & \\
2 & & 1,2 & & 1,J_0 & & & & & & 3,2 & & 3,J_0 & & & & \\
. & 1,1 & & 1,3 & & & & & & 3,1 & & 3,3 & & & & & \\
. & & 1,2 & & 1,J_0 & & & & & & 3,2 & & 3,J_0 & & & & \\
\hline
. & & & & & 2,1 & & 2,3 & & & & & & I_0,1 & & I_0,3 & \\
\underbrace{k} & & & & & & 2,2 & & 2,j_0 & & & & & & I_0,2 & & I_0,J_0 \\
 & & & & & 2,1 & & 2,3 & & & & & & I_0,1 & & I_0,3 & \\
 & & & & & & 2,2 & & 2,J_0 & & & & & & I_0,2 & & I_0,J_0 \\
\hline
 & 1,1 & & 1,3 & & & & & & 3,1 & & 3,3 & & & & & \\
 & & 1,2 & & 1,J_0 & & & & & & 3,2 & & 3,J_0 & & & & \\
 & 1,1 & & 1,3 & & & & & & 3,1 & & 3,3 & & & & & \\
 & & 1,2 & & 1,J_0 & & & & & & 3,2 & & 3,J_0 & & & & \\
\hline
. & & & & & 2,1 & & 2,3 & & & & & & I_0,1 & & I_0,3 & \\
 & & & & & & 2,2 & & 2,J_0 & & & & & & I_0,2 & & I_0,J_0 \\
. & & & & & 2,1 & & 2,3 & & & & & & I_0,1 & & I_0,3 & \\
N_0 & & & & & & 2,2 & & 2,J_0 & & & & & & I_0,2 & & I_0,J_0 \\
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
ij' \\
\left[\begin{array}{c} 1,1 \\ 1,2 \\ \\ 1,J_0 \\ 2,1 \\ 2,2 \\ . \\ 2,J_0 \\ 3,1 \\ 3,2 \\ . \\ 3,J_0 \\ I_0,1 \\ I_0,2 \\ . \\ I_0,J_0 \end{array}\right]
\end{array}
= o.
$$

B

tiekből nem következik az, hogy a **B** mátrix nem egyszerű struktúrájú, hiszen minden valós szimmetrikus mátrixnak van N_0 számú független (bal és jobb oldali) sajátvektora. Arról van csupán szó, hogy az N_0 számú (független) $\bar{w}_k$ sajátvektor bármelyike az (5.1) trigonometrikus összeg meghatározott 4 különböző csoportja *egyikének* (változó számú) tagjaiból áll. Például $N_0 = 25$ esetén a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok csak az $S_{11}, S_{13}, S_{15}, S_{31}, S_{33}, S_{35}, S_{51}, S_{53}, S_{55}$ komponensek változó arányú lineáris kombinációiból tevődnek össze. Ennek a ténynek *komoly számítástechnikai előnye van*, ti. a **C** mátrix Det $(\lambda) = |\,\lambda\mathbf{E} - \mathbf{C}\,|$ teljes karakterisztikus polinomjának felírása helyett elég az említett 4 csoportnak megfelelő lényegesen alacsonyabb fokszámú 4 polinomot előállítani. Ez az előny természetesen numerikus módszer alkalmazása esetén is lényeges.

Az említett négy S_{ij} csoport függetlenségének szemléletes fizikai magyarázata van. *A horpadási függvényeknek négyféle jellegzetes alakja van:*

— a horpadási alakok $\bar{x}$, ill. $\bar{y}$ irányú metszetei szimmetrikusak az $\overline{xz}$, ill. az $\overline{yz}$ síkra,

— a metszetek antimetrikusak az $\overline{xz}$, ill. az $\overline{yz}$ síkra,

— az $\bar{x}$ irányú metszet szimmetrikus az $\overline{xz}$ síkra, az $\bar{y}$ irányú metszet antimetrikus az $\overline{yz}$ síkra,

— az $\bar{x}$ irányú metszet antimetrikus az $\overline{xz}$ síkra, az $\bar{y}$ irányú metszet szimmetrikus az $\overline{yz}$ síkra.

A N_0 számú sajátvektor bármelyike csak a fenti négy eset egyikének tagjaiból állhat.

Ha $I_0 \neq J_0$ — azaz x és y irányban különböző a horpadási függvény tagjainak száma —, akkor a **B** mátrix független sorainak száma 2 vagy 4. Ekkor ui. a szimmetria és az antimetria négyféle kombinációjából kettő ($J_0 = 1$) vagy négy marad. A kétféle kombináció csak elvi lehetőség, hiszen J_0 a megfelelő pontosság eléréséhez nagyobb kell legyen mint 1.

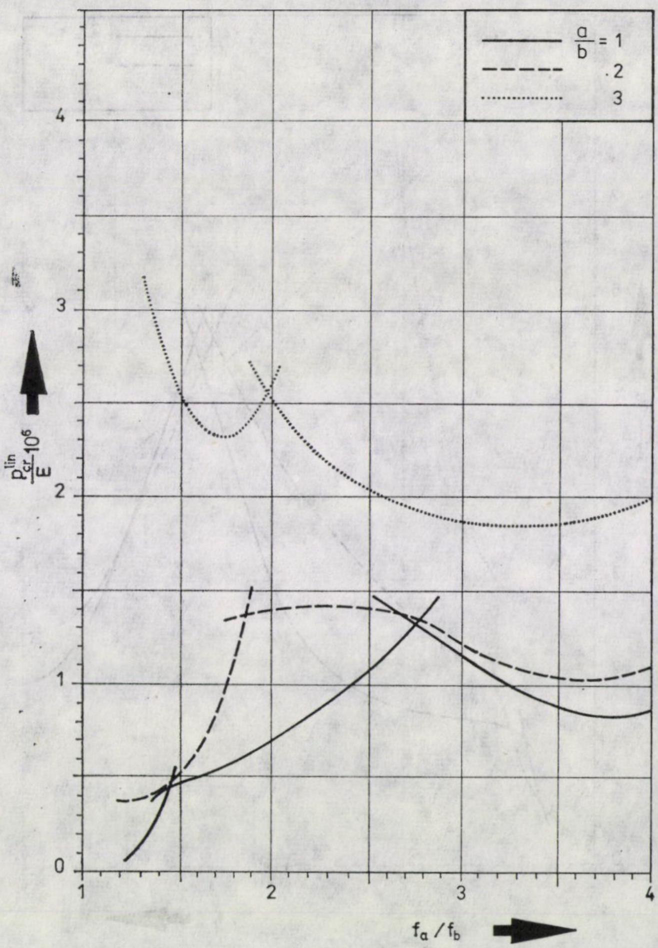
Végül rámutatunk arra, hogy a levezetett összefüggések némi átalakítással felhasználhatók *parabola vezérgörbéjű dongahéjak* ($f_b = 0$) és *elliptikus paraboloidhéjak* ($f_b \to -f_b$) vizsgálatára is.

5.3. *Numerikus vizsgálatok*

A **C** mátrix (ill. 4 független sor megfelelő permutálásával kapott 4 független blokk) sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásához a J. G. Francis által javasolt, numerikusan rendkívül stabil ún. *QR* algoritmusnak a Wielandt-iterációval összekapcsolt változatát alkalmaztuk [20], [24].

Az 5.—13. ábrákon látható csipkegörbéket a vasbeton héjak legtöbbjét jól jellemző geometriai arányokra határoztuk meg.

A horpadási függvény tagjainak száma általában $I_0 \cdot J_0 = N_0 = 4 \times 4 = 16$ volt.

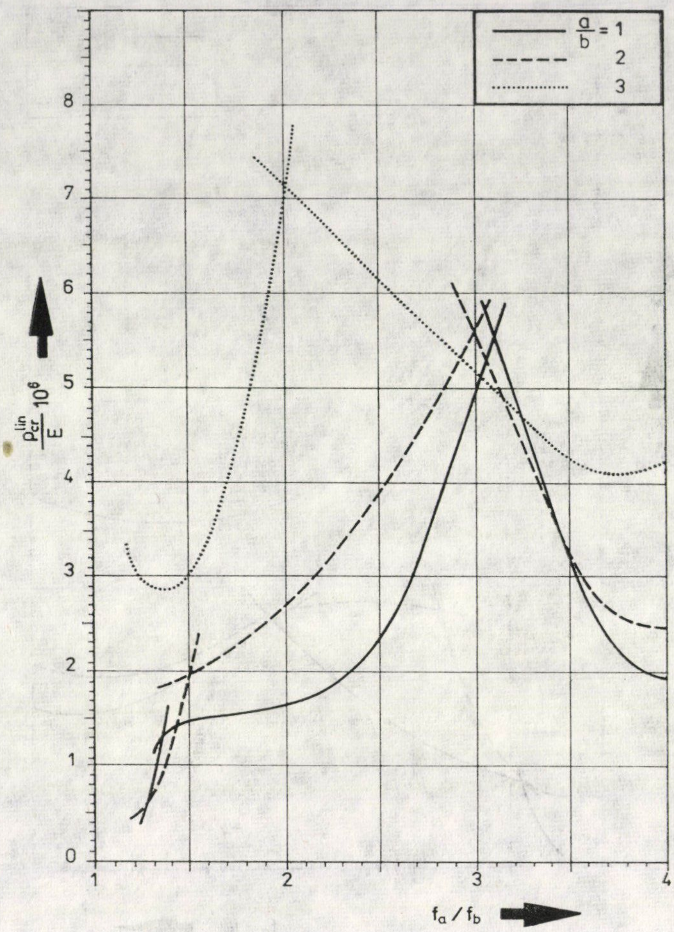


5. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 100$, $f_b/b = 0{,}1$)

A számítások azt az érdekes és a gyakorlat szempontjából hasznos eredményt adták, hogy a horpadási függvényeknek minden esetben volt *domináns tagja*.

Különösen az $f_a/f_b = 9/4$ (háromnegyed normális típusú héj) és az $f_a/f_b = 4$ (normális típusú héj) geometriai arányok esetén dominált egy-egy tag, mégpedig éppen a *nyúlásmentes alakváltozást* okozó tag.

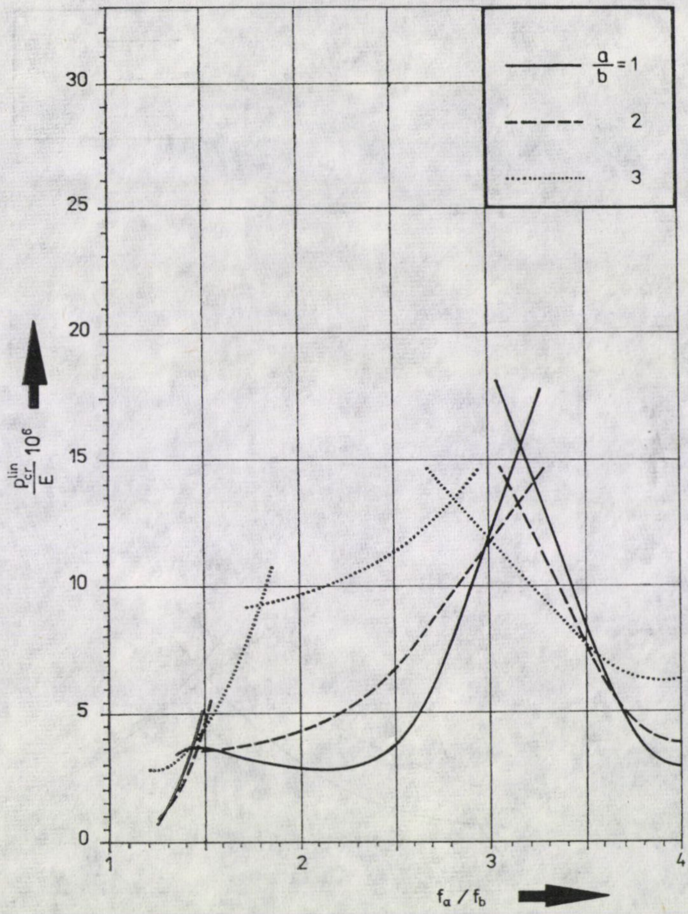
Azt találtuk, hogy a *háromnegyed normális típusú* héjat a teljes többtagú horpadási alakkal számolva, a lineáris kritikus teher általában kevesebb,mint 25%-kal adódik kisebbre, mint a *nyúlásmentes* horpadást okozó — $i_n = 3$, $j_n = 2$ számokkal meghatározott alakú — domináns tagnak megfelelő teher.



6. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe (a/h = 100, f_b/b = 0,2)

A ***normális típusú*** héj horpadásánál az $i_n = 2$, $j_n = 1$ számokkal jellemezhető ***nyúlásmentes*** tag a domináns. Az egytagú és a teljes horpadási alakhoz tartozó lineáris kritikus terhek eltérése általában kisebb mint 15%. Ezek az eredmények összhangban vannak a 4.1 és 4.2 pontokban tett azon megállapítással, hogy e két héjtípus egytagú horpadási alakhoz tartozó lineáris kritikus terhei előtervezéshez kielégítő ***közelítéssel a diszkontinuitásos membrán megoldásnak*** megfelelő (4.8) képletből számíthatók [$f_a/f_b = 9/4$ esetén a képlet nevezőjébe 24 helyett 40 írandó (vö. a 4.2. fejezet végén található megjegyzéssel)].

Az $f_a/f_b = 9/4 \div 4$ nyílmagasságarányok esetén a horpadási alak domináns tagja vagy az $i_n = 3$, $j_n = 2$, vagy az $i_n = 2$, $j_n = 1$ félhullámhosszú szinusz függvény.

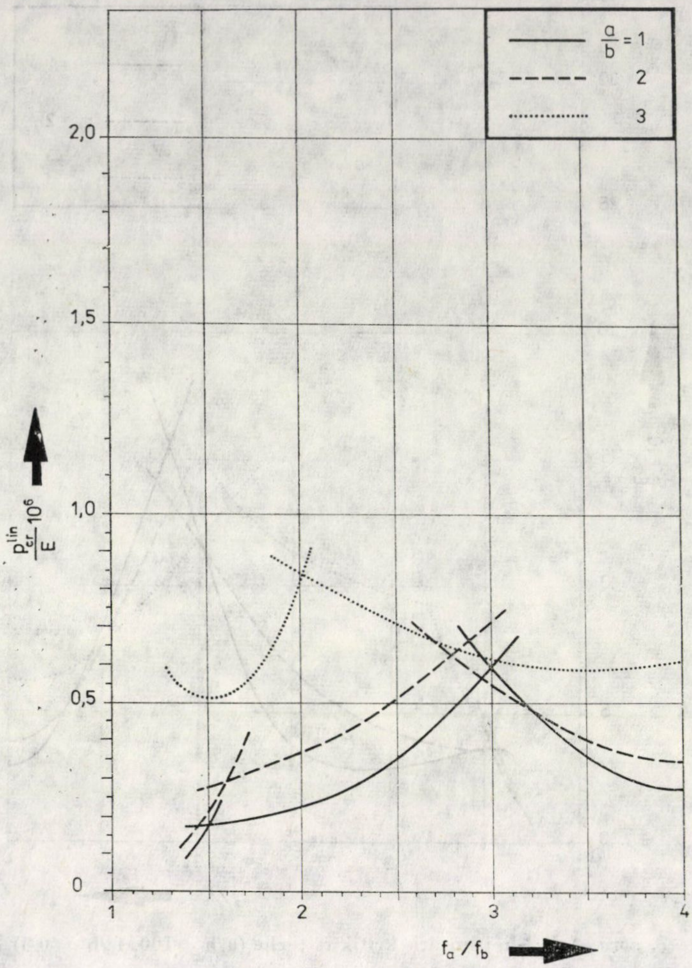


7. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe (a/h = 100, f_b/b = 0,3)

Az egytagú — ezen esetekben már a középfelület nyúlását is kiváltó — horpadási alakokhoz tartozó lineáris kritikus teher általában kevesebb, mint 30%-kal nagyobb, mint a pontos érték.

A vizsgált $f_a/f_b = 1 \div 4$ tartományban *a legnagyobb lineáris kritikus teher* értékek kb. az $f_a/f_b = 3$ arány környezetében találhatók. Ezek a terhek lényegesen meghaladják a normális és háromnegyed normális típusú héjakhoz tartozó értékeket. Megfigyelhető, hogy kb. az $f_a/f_b = 3$ aránynál a görbék igen meredeken futnak, ezért valószínű, hogy ezek a héjak eléggé érzékenyek a geometriai tökéletlenségekre (az f_a/f_b arány kismértékű megváltozására). A görbék menetéből arra is következtethetünk, hogy az f_a/f_b arány megváltozásával a kritikus teher csökkenhet is, nőhet is.

Kb. az $f_a/f_b = 1{,}5 \div 2{,}25$ tartományban az esetek többségében (általában

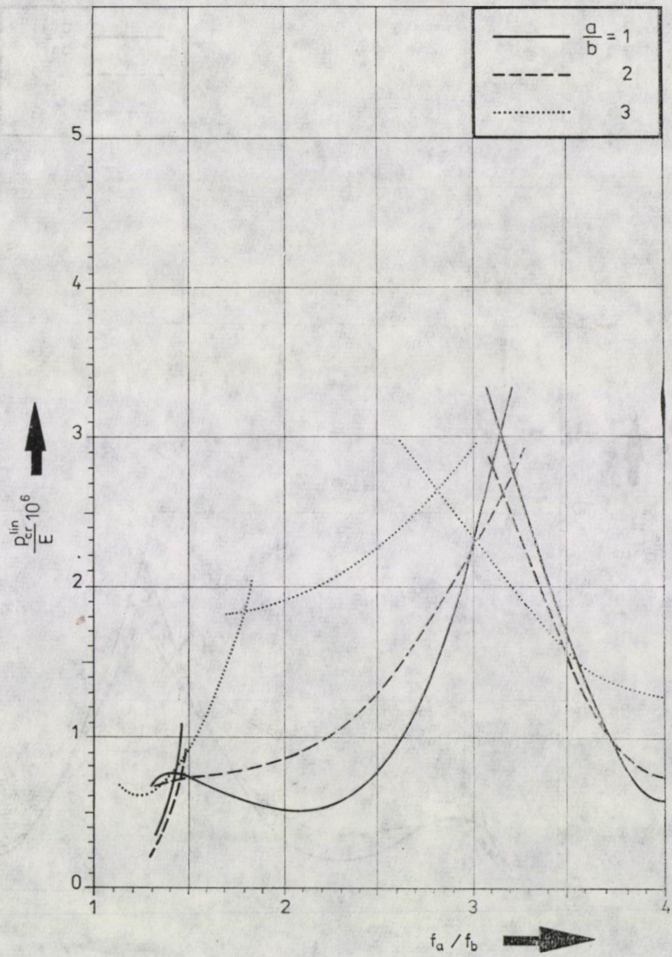


8. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe (a/h = 150, f_b/b = 0,1)

ha $a/b \neq 3$) az $f_a/f_b = 9/4$ paraméterhez tartozó horpadási alak a mértékadó.

A *szeminormál héj* környezetében (kb. $f_a/f_b = 1 \div 1{,}5$) a számított lineáris kritikus terheket csak a teljesség kedvéért ábrázoltuk, hiszen ezen geometriai arányok esetén a héjat csak nem lineáris elmélettel szabad vizsgálni. Ennek az az oka, hogy pl. a szeminormál héj túlnyomórészt hajlítónyomatékokkal viseli a terheit. Középfelületi erőket csak a teherfüggvénynek a nyúlásmentes lehajlási alakoktól eltérő alakú ($m \neq n$) teherkomponensei váltanak ki benne [10].

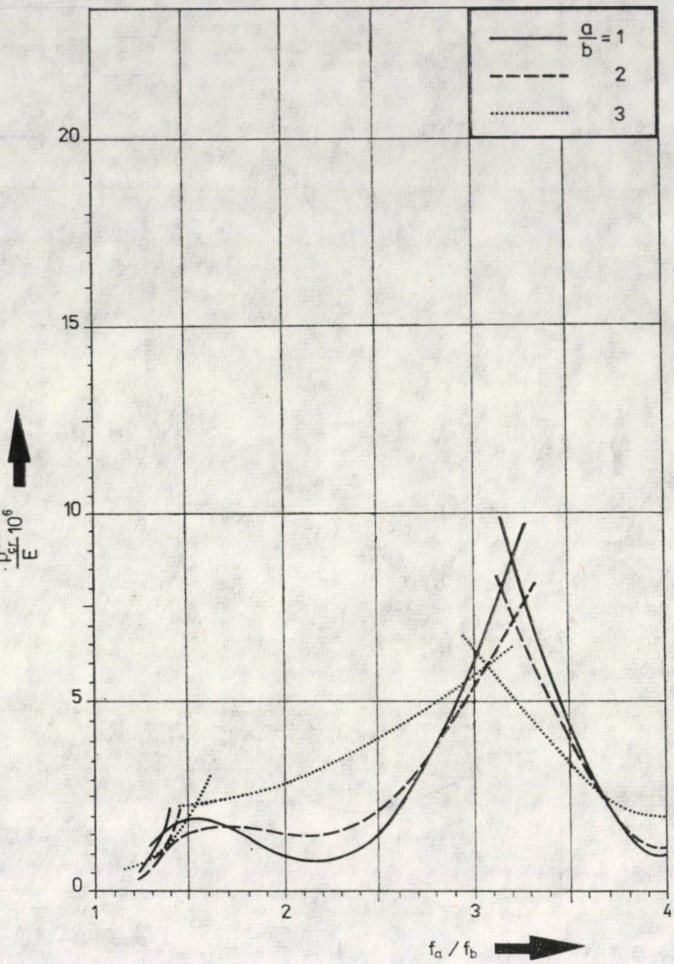
A számított lineáris kritikus terheket az $f_a/f_b = 1$ paraméterhez nem



9. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe (a/h — 150, $f_b/b = 0,2$)

tüntettük fel; ezeknek az igen *nagy fiktív értékeknek nincs gyakorlati jeletőségük.* Megjegyezzük, hogy kb. az $f_a/f_b = 1 \div 1,5$ nyílmagasságarányoknál a horpadási alak domináns komponense az $i_n = j_n = 1$ félhullámszámú *nyúlásmentes* tag. Az egytagú horpadási alakokhoz tartozó lineáris kritikus terhek hibája a pontoshoz képest ekkor általában jóval nagyobb, mint az egyéb héjakra vonatkozó említett eltérés.

Természetesen nem létezik olyan meghatározott f_a/f_b határ, melytől kezdve jogos a héjat lineáris elmélettel kezelni. Ez a határ az $f_a/f_b = 1,5$ és az $f_a/f_b = 2$ értékek között helyezkedik el [10]. A nyereg alakú oldalnyomásmentes HP-héjak stabilitási viselkedése elméleti tisztázásához a nem lineáris



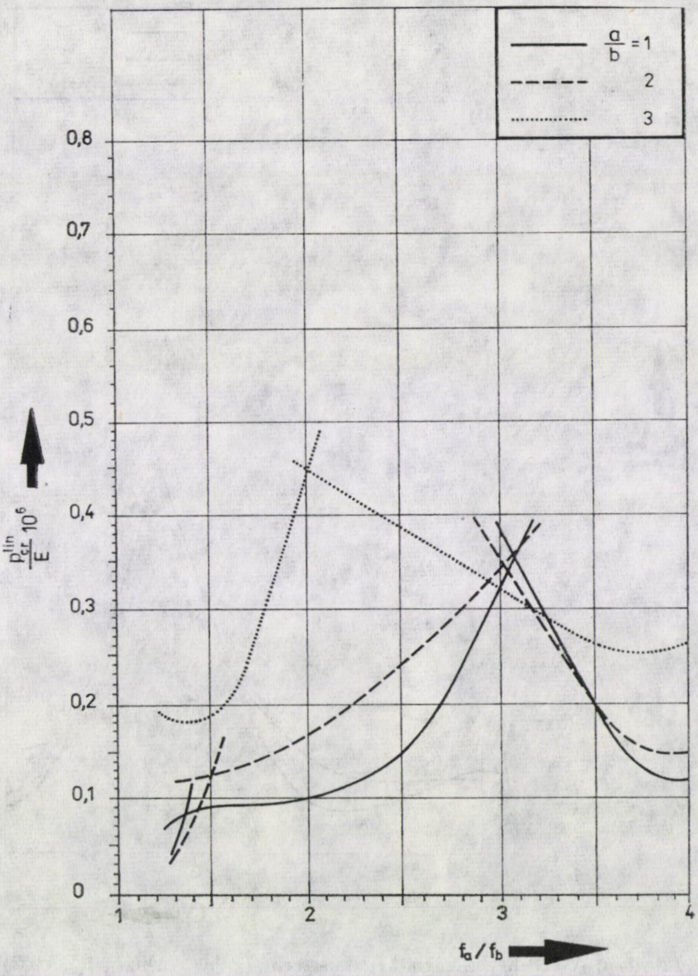
10. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_b/b = 0{,}3$)

elmélettel meghatározható egyensúlyi út főbb jellegzetességeinek ismerete is kívánatos. Ezzel külön tanulmányban foglalkozunk [11].

6. Összefoglalás

Jelen dolgozatban az egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, lapos, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak deformálatlan alaphelyzetből történő *elágazási jelenségével* foglalkoztunk.

Alapvetően támaszkodtunk egy korábbi munkánkra [10], melyben



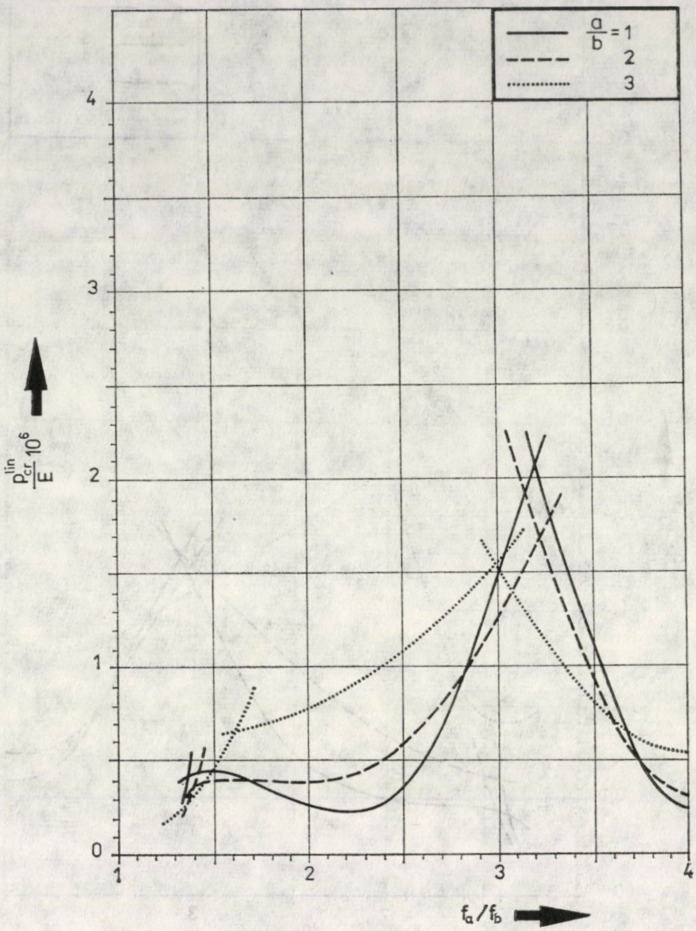
11. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 200$, $f_b/b = 0{,}1$)

kimutattuk, hogy mely geometriai arányok esetén jogos a héjak stabilitási vizsgálatát lineáris elmélettel elvégezni. Ez a tartomány közelítőleg az $f_a/f_b = (1{,}5 - 2) \div 4$ nyílmagasságarányokkal jellemezhető. Ezen esetekben a *membránhatás* mellett a hajlítási hajás elhanyagolhatóan kicsi.

Az elemzések során nagy súlyt helyeztünk a *nyúlásmentes* horpadási lehetőség vizsgálatára is.

A probléma sajátérték-egyenletét a Galerkin-módszer alkalmazásával állítottuk elő.

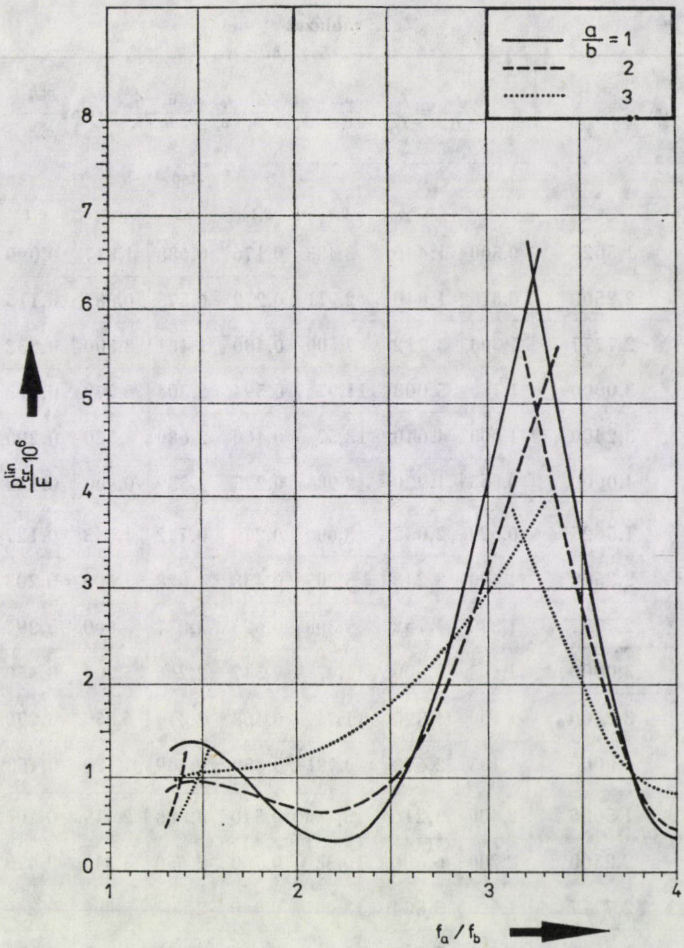
A numerikus vizsgálatok előtt a kapott mátrixok speciális szerkezete alapján megállapítottuk, hogy bármelyik horpadási alak csak a szimmetria



12. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe (a/h = 200, f_b/b = 0,2)

és az antimetria négyféle kombinációja egyikének megfelelő tagokból állhat. E tagok között vannak nyúlásmentes és nyúlásos komponensek is. A számszerű eredmények azt adták, hogy minden horpadási alakban található domináns tag.

Ez a tag a szeminormális ($f_a/f_b = 1$), a háromnegyed normális ($f_a/f_b = 9/4$), valamint a normális ($f_a/f_b = 4$) típusú héjak esetében éppen e héjak *nyúlásmentes* lehajlási alakjával azonos. Egyéb héjak horpadási alakjának domináns tagja vagy a szeminormális, vagy a háromnegyed normális, vagy a normális típusú héjak horpadási alakjának — ezen esetekre már a középfelület *nyúlását* is kiváltó — dominánsl tagjával egyezik meg.



13. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 200$, $f_b/b = 0{,}3$)

A kapott csipkegörbék minimum pontja a lényegében nyúlásmentesen horpadó héjak f_a/f_b aránya közelében van. A lineáris kritikus terhek legnagyobb értékei az $f_a/f_b = 3$ paraméterhez közel eső arányokhoz tartoznak.

Vizsgálataink során a teljesség kedvéért meghatároztuk a szeminormál héj nyílmagasságarányához közel eső héjak fiktív lineáris kritikus terheit is. Ezen héjak a terheiket túlnyomórészt hajlítási erőkkel viselik, ezért stabilitási vizsgálatukat nemlineáris elmélettel kell elvégezni. Ezzel a kérdéssel külön tanulmányban foglalkozunk [11].

I. táblázat

$\frac{p_{cr}^{lin}}{E} 10^4$		$\frac{f_{a_1}}{f_{b_1}} = \frac{f_{a_2}}{f_{b_2}}$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_1 \cdot f_{b_1}}{h_1 \cdot b_1} = \frac{a_2 \cdot f_{b_2}}{h_2 \cdot b_2}$ esetén $\frac{p_{cr_2}^{lin}}{p_{cr_1}^{lin}} = \left(\frac{a_1/h_1}{a_2/h_2}\right)^4$								
$a/h =$		100			150			200		
$f_b/b =$		0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3
$\frac{a}{b}$ = 1	$\frac{f_a}{f_b}$ = 1,5625	0,500	1,440	3,483	0,176	0,688	1,817	0,090	0,425	1,258
	2,2500	0,876	1,840	2,911	0,272	0,575	0,881	0,115	0,242	0,372
	2,7777	1,300	3,712	7,500	0,480	1,481	3,800	0,232	0,880	2,450
	3,0000	1,130	5,008	11,97	0,594	2,364	6,279	0,313	1,480	4,136
	3,2400	1,000	4,640	13,57	0,460	2,680	8,320	0,290	1,900	6,303
	4,0000	0,865	1,920	2,984	0,275	0,589	0,900	0,120	0,250	0,386
2	1,5625	0,620	2,032	3,606	0,270	0,712	1,543	0,127	0,386	0,920
	2,2500	1,400	3,248	5,205	0,438	1,028	1,600	0,203	0,449	0,685
	2,7777	1,330	4,752	9,300	0,625	1,837	3,800	0,297	0,930	2,050
	3,0000	1,195	5,600	11,47	0,547	2,266	5,281	0,350	1,299	3,265
	3,2400	1,100	4,320	11,74	0,468	2,319	6,850	0,270	1,600	4,800
	4,0000	1,105	2,448	3,791	0,350	0,749	1,120	0,153	0,321	0,490
3	1,5625	2,400	3,216	5,483	0,510	1,083	2,319	0,201	0,590	1,025
	2,2500	2,200	6,608	10,38	0,760	2,050	3,340	0,413	0,924	1,446
	2,7777	1,920	5,584	13,20	0,640	2,607	5,000	0,349	1,340	2,500
	3,0000	1,880	5,168	11,70	0,610	2,311	5,690	0,323	1,473	3,061
	3,2400	1,860	4,624	9,690	0,590	1,914	4,870	0,289	1,180	3,320
	4,0000	2,000	4,224	6,440	0,610	1,272	1,998	0,264	0,550	0,850

IRODALOM

1. Apeland, K.: A Note on the Stability Problem of Shallow Translational Shells. *Journal of Applied Mechanics.* Sept. (1960), 586—588
2. Beleş, A.—Soare, M.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin-Akademie-Verlag, Bukarest 1970
3. Bürgermeister, G.—Steup, H.—Kretzschmar, H.: Stabilitätstheorie II. Akademie-Verlag, Berlin 1957
4. Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K-G. Leipzig 1949
5. Dayaratnam, P.—Gerstle, K. H.: Buckling of Hyperbolic Paraboloids. *Proc. World Conference on Shell Structures, San Francisco* (1962), 289—296

6. DULÁCSKA, E.: Vibration and Stability of Anisotropic Shallow Shells. *Acta Techn. Hung.* 65 (1969), 225—260
7. DULÁCSKA, E.: Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloid Shells. *Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 123—130
8. FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 17 (1957), 23—46
9. GIONCU, V.—IVAN, M.: Instabilitatea Structurilor diu Placi Curbe Subţiri. Editura Ac. Rep. Socialiste România 1978
10. JANKÓ, L.: Egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, lapos, oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak membrán- és hajlítási elméletének összehasonlítása. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
11. JANKÓ, L.: Nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos, hiperbolikus paraboloidhéjak egyenletesen megoszló terhelés alatti egyensúlyi útjának nemlineáris vizsgálata. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
12. KOLLÁR, L.—DULÁCSKA, E.: Schalenbeulung. Werner, Düsseldorf—Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
13. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* 3 (1971), 19—38
14. KOLLÁR, L.: Schalenkonstruktionen. Sonderdruck aus dem Beton-Kalender 1974. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1974
15. LEET, K. M.: Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE*, 92 (1966), No. 1, 121—142
16. MIHAILESCU, M.: Despre stabilitatea invelitorilor subtiri in formă de paraboloizi hiperbolici. *Industria constructiilor şi a materialelor de Construcţii.* V. 2. (1954), 66—70
17. PFLÜGER, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttigen—Heilderberg—New York 1964
18. PONOMARJOV, Sz. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben. 1. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1963, 357—381
19. RALSTON, A.: On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Parabloidal Shell Loaded by its Own Weight. *Journ. Math. Phys.* 35 (1956), 53—59
20. RALSTON, A.: A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Company. New York—Toronto—London 1963
21. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Boston Society of Civil Engineers (1955), 100—133
22. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company, New York—Toronto—London 1961
23. TSUBOI, Y.: Parametric Study of Buckling of Shells with Reference to Gaussian Curvature. *IASS World Congress on Space Enclosures.* Building Research Centre. Concordia University Montreal (1976) July, 353—363
24. WILKINSON, J. H.—REINSCH, C.: Linear Algebra. Springer Verlag, Berlin 1971
25. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. VEB Berlin für Bauwesen, Berlin 1962

Untersuchung der Stabilität sattelförmiger, falcher, normalkraftfrei gelagerter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung. — Diese Abhandlung bildet den zweiten Teil einer dreiteiligen Artikel-Serie. In dem ersten Teil waren die theoretischen Fragen der Existenz und der Eindeutigkeit der Membranlösung, sowie der kinematischen Unbestimmtheit von genannten HP-Schalen beantwortet worden. Auf Grund dieser Ergebnisse setzte sich der vorliegende Artikel zum grundlegenden Ziel, die *Verzweigung* aus dem *unverformten* Grundzustand der an ihren Rändern normalkraftfreien, sattelförmigen HP-Schalen zu untersuchen. Im Laufe der Erörterungen wird auch darauf eingegangen, wie die Entwicklungsmöglichkeit der *dehnungslosen Verformungen* den Verlauf des Stabilitätsverlustes beeinflußt.

Stability of Saddle-Shaped Flat Hypar Shells Submitted to Uniformly Distributed Load without Lateral Thrust. — This paper is the second part of a series consisting of three parts, the first of which treated theoretical problems (that is, existence and uniqueness of the membrane solution, kinematic uncertainty) the response to which assures a suitable fundament for performing the present stability analyses. In this paper, the phenomenon of branching from the undeformed state of the saddle-shaped flat hypar shells without laternal thrust is dealt with. In this connection also the question of possibility of the development of an inextensional deformation is analysed in order to determine what influence it has on the process of losing stability.