

VÉLETLEN IDŐKÖZÖNKÉNT MŰKÖDŐ KÉSZÜLÉK ÉLETTARTAMÁNAK HATÁRELOSZLÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF és TOMKÓ JÓZSEF

1. Bevezetés

A tömegkiszolgálás matematikai problémái vizsgálatokor fel szokták tételezni, hogy a kiszolgáló készülék ideálisan működik, sohasem romolhat el. A gyakorlatban azonban számolni kell az ellenkező lehetőséggel is, és vizsgálni kell ennek hatását a tömegkiszolgálás hatékonyságára. Ilyen problémák sztochasztikus modelljeivel többek között B. V. GNYEDENKO [8] és a szerzők egyike is foglalkozott ([7]).

Hasznos tudni például, hogy a kiszolgáló készülék hibátlan működési ideje milyen eloszlású és hogy a $(0, T)$ időszakasz hányadrészében hibátlan a készülék. A készülék üzemzavarait úgy szokták figyelembe venni, hogy bevezetik a kiszolgáló készülék üzembiztonsági tartalékának fogalmát. Ezen azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő anyagi tényezőt értjük, melynek kellő mértékű hiánya vezet a készülék üzemzavarára. Célszerű bevezetni a készülék pillanatnyi üzembiztonsági tartalékának a fogalmát is, mely lényegében t időparaméterű $\{\omega(t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot jelent.

Ha feltételezzük, hogy a készülék szabad állapotában üzembiztonsági tartalékának csökkenése nem véletlen intenzitású, hanem egyenlő szabad időtartamok alatt egyenlő értékekkel csökken, akkor az időegység megfelelő megválasztásával elérhető, hogy a csökkenést jellemző arányossági tényező 1 legyen. Ez esetben $\omega(t)$ értelmezhető úgy, mint a t pillanatot követő azon időtartam, melynek folyamán a készülék üzembiztos állapotban marad, hacsak nem kényszerül munkavégzésre (kiszolgálásra). Kézenfekvő feltételezni, hogy munkaállapotban a készülék üzembiztonsági tartalékának csökkenése lényegesen nagyobb intenzitású, mint a szabad periódusok folyamán. Ez azt jelenti, hogy a készülék élettartamát igen jelentősen befolyásolják az üzemeltetések gyakorisága és azok időtartamai. Ennek az élettartam-eloszlásnak a meghatározása sok esetben igen komoly nehézségekbe ütközik s ha meg is adható, fölötté bonyolult szerkezetű, melyet gyakorlatilag alig alkalmazhatunk. Lehetséges azonban ezt az eloszlástörvényt egyszerű, pl. normális eloszlással közelíteni. Növeli ennek az approximációnak az értékét az is, hogy feltételei a gyakorlati problémák többségében fenn is állanak.

Tekintsük már most közelebbről a vizsgálandó modellünket. Egy készüléket bizonyos (munka, kiszolgálási) funkciók elvégzésére állítunk be, amelyek általában véletlen időtartamúak. Legyen a készülék a $t=0$ pillanatban szabad, majd jelöljék $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ a szabad állapotban való tartózkodási időket, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ pedig az egymás utáni munkaperiódusok hosszait. Feltételezzük, hogy ezek az időtartamok összességükben egymástól függetlenek, $P\{\varepsilon_i \leq x\} = A(x)$, ill. $P\{\xi_i \leq x\} = B(x)$ eloszlásokkal. A készülék $t=0$ pillanatbeli üzembiztonsági tartaléka legyen $\omega(0) = \eta_T$, melynek az idő folyamán történő csökkenését az alábbiak szerint képzeljük el;

Ha a t pillanatban egy szabad periódus kezdődik el, mely ε_i ideig tart, akkor

$$\omega(t + \varepsilon_i) = \omega(t) - \varepsilon_i,$$

ha pedig a t pillanatban a készülék valamely ξ_i időtartamig foglalttá válik, akkor

$$\omega(t + \xi_i) = \omega(t) - \xi_i,$$

ahol a ξ_i ($i \geq 1$) azonos eloszlású valószínűségi változók csupán csak a megfelelő indexű ξ_i -ktől függenek s olyanok, hogy

$$M_{\xi_i} < M_{\xi_i}^2.$$

Ha pl. feltételezzük, hogy a munkaperiódusok alatt is az idővel arányosan csökken a készülék üzembiztonsági tartaléka $c > 1$ arányossági tényezővel, akkor $\xi_i = c\varepsilon_i$. Egy másik lehetséges feltételezés, hogy $\xi_i = g(\varepsilon_i)$, ahol $g(t) \geq t$ szakaszonként folytonos monoton növekvő függvény. Ilyen feltételezések mellett, amint látni fogjuk, explicite jellemezhető a készülék üzembiztonsági periódusa az ε_i , ξ_i ($i \geq 1$) változókkal. Módszerünk azonban nem feltétlen igényli ezt az explicit előállítási lehetőséget, ezért a ξ_i és a ε_i változók közötti függés tetszőleges lehet.

Ha figyelembe vesszük a készülék gyártási eljárásánál fellépő véletlen tényezőket, akkor kézenfekvővé válik, hogy az üzembiztonsági tartalékot nem valamilyen konstans mennyiségnek, hanem valószínűségi változónak tekintjük. A gyakorlati problémák túlnyomó többségében ez a véletlen mennyiség igen nagy érték körül ingadozik. A bevezetett paraméterezéssel is erre a körülményre akarunk utalni, s a dolgozatunk alapját képező aszimptotikus relációt a $T \rightarrow \infty$ esetre vonatkozólag fogjuk tanulmányozni.

Jelöljük mármost a készülék élettartamát (üzembiztonsági periódusának hosszát) $\tau(\eta_T)$ -vel. Legyen $\delta_i = \varepsilon_i + \xi_i$ ($i \geq 1$), majd értelmezzük v_T -t mint azon legnagyobb „ n ” indexet, amelyre

$$\sum_1^n \delta_i \leq \eta_T.$$

$\delta_1 > \eta_T$ esetén v_T -t 0-nak vesszük. Innen nyomban világossá válik, hogy $\tau(\eta_T)$ kielégíti a

$$\sum_1^{v_T} (\varepsilon_i + \xi_i) \leq \tau(\eta_T) < \sum_1^{v_T+1} (\varepsilon_i + \xi_i)$$

egyenlőtlenséget. Ezáltal problémánk független valószínűségi változók véletlen tagszámú összege eloszlásának vizsgálatára vezethető vissza. Megemlítjük, hogy a ε_i és a ξ_i közti $\xi_i = g(\varepsilon_i)$ funkcionális függőség esetén $\tau(\eta_T)$ az alábbi módon fejezhető ki:

$$\tau(\eta_T) = \begin{cases} \sum_1^{v_T} (\varepsilon_i + \xi_i) + \left[\eta_T - \sum_1^{v_T} \delta_i \right], & \text{ha } \sum_1^{v_T} \delta_i + \varepsilon_{v_T+1} > \eta_T \\ \sum_1^{v_T} (\varepsilon_i + \xi_i) + \varepsilon_{v_T+1} + g^{-1} \left[\eta_T - \sum_1^{v_T} \delta_i - \varepsilon_{v_T+1} \right], & \text{ha } \sum_1^{v_T} \delta_i + \varepsilon_{v_T+1} \leq \eta_T. \end{cases}$$

Itt most $g^{-1}(t)$ annak a folytonos görbének az $y = t$ egyenesre vonatkozó tükörképét jelenti, amelyet a $g(t)$ függvény grafikonjából annak ugráshelyeinél meghúzott

megfelelő függőleges szakaszok hozzávételével kapunk. Az esetre, amikor $g(t) = ct$ ($c > 1$) a [7] dolgozatban igazolt, hogy

$$P\{\tau(\eta_T) \leq x\} = \int_0^x H_T(x + (c-1)z) d\Omega_z(x, z),$$

ahol

$$H_T(x) = P\{\eta_T \leq x\},$$

és

$$\Omega(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B^{*(n)}(x) [A^{*(n)}(z-x) - A^{*(n+1)}(z-x)].$$

($A^{*(n)}(x)$, $B^{*(n)}(x)$ az $A(x)$, $B(x)$ eloszlásfüggvények n -edik konvolúcióit jelölik). Ugyancsak a [7] dolgozatban a [10] cikkben tárgyalt módszer alkalmazásával a

$$(1.3) \quad \frac{D(\eta_T)}{T} \rightarrow 0, \quad \text{hacsak } T \rightarrow \infty,$$

reláció teljesülése esetén igazoltuk, hogy léteznek olyan a_T és b_T normáló mennyiségek, amelyek mellett

$$(1.4) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\tau(\eta_T) - a_T}{b_T} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Tekintettel a véletlen tagszámú független valószínűségi változók összegére vonatkozó újabb eredményekre (l. pl. [4], [5]) (1.4)-et általánosabb esetre is igazolhatjuk. (1.3) helyett csupán csak azt fogjuk kikötni, hogy η_T/T sztochasztikusan egy $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz tart, ha $T \rightarrow \infty$. Pontosabban megfogalmazva ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ -hoz megadható olyan $T_0 = T_0(\varepsilon, \delta)$ érték, hogy

$$(1.5) \quad P\left\{\left|\frac{\eta_T}{T} - \eta\right| > \varepsilon\right\} < \delta,$$

hacsak $T > T_0$. Könnyű észrevenni, hogy (1.3) (1.5)-nek azt a speciális esetét jelenti, amikor az η változó 1 valószínűséggel konstans. Ugyanis, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett (1.3)-ból kiindulva a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\eta_T}{T} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

relációhoz jutunk.

2. Segédtelemek

Mielőtt rátérnénk dolgozatunk központi tételére, előre bocsátunk néhány segédtelet. Szükségünk lesz az alábbi két lemmára, melyek közül az elsőnek a bizonyítása megtalálható az [1] könyv 254. oldalán, a második állítása pedig annyira egyszerű, hogy bizonyításra nem is szorul.

1. LEMMA. Legyenek $\chi(t)$, $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$ ($t \geq 0$) sztochasztikus folyamatok, amelyek közül $\chi(t)$ rendelkezik $t \rightarrow \infty$ mellett aszimptotikus eloszlással, az $\varepsilon(t)$ és $\delta(t)$ folyamatok pedig kielégítik az alábbi feltételeket:
tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$P\{|\varepsilon(t) - 1| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{hacsak} \quad t \rightarrow \infty$$

és

$$P\{|\delta(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{hacsak} \quad t \rightarrow \infty.$$

Ekkor a $\chi(t)\varepsilon(t) + \delta(t)$ folyamat is rendelkezik $t \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikus eloszlással, mely megegyezik a $\chi(t)$ megfelelő határeloszlásával.

2. LEMMA. Legyenek $\chi_1(t)$, $\chi(t)$, $\chi_2(t)$ ($t \geq 0$) sztochasztikus folyamatok, melyekre minden $t > 0$ mellett fennáll az alábbi

$$\chi_1(t) \leq \chi(t) \leq \chi_2(t)$$

egyenlőtlenség. Ekkor ha $\chi_1(t)$ és $\chi_2(t)$ $t \rightarrow \infty$ esetén rendelkeznek közös aszimptotikus eloszlással, akkor ugyanezzel a határeloszlással rendelkezik a $\chi(t)$ folyamat is $t \rightarrow \infty$ mellett.

A továbbiakban egy, a rekurrens folyamatokra vonatkozó ismert tételt általánosítunk. Tekintsük e célból a $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ pontsorozatot, ahol a $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i \geq 1$) sorozat tagjai független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Értelmezzük v_T^* -ot mint a $(0, T)$ intervallumba eső τ_i pontok számát. Ismeretes, hogy ha $0 < D(\delta_i) < \infty$, akkor

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{v_T^* - \frac{1}{m} T}{D(\delta_i) \sqrt{T}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Az alábbi tételünkben ezt az állítást igazoljuk arra az esetre, amikor v_T^* valamely véletlen hosszúságú intervallumba eső τ_i pontok számát jelenti.

1. TÉTEL. Legyen $\{\eta_T; T > 0\}$ pozitív értékű sztochasztikus folyamat és tegyük fel, hogy η_T/T , $T \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan valamely $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Jelentse most v_T az előbb említett pontsorozatnak a $(0, \eta_T)$ véletlen intervallumba eső pontjainak számát. Más szóval, v_T az a legnagyobb „n” index, amelyre $\tau_n \leq \eta_T$ még teljesül. Az $m = M\delta_i > 0$, $D^2 = D^2(\delta_i) > 0$ létezése esetén

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{v_T - \frac{\eta_T}{m}}{D \sqrt{\frac{\eta_T}{m^2}}} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Bizonyítás. Ha $T > 0$ és $n > 0$, ahol n egész, akkor

$$(2.1) \quad P\{v_T < n\} = P\{\tau_n \leq \eta_T\}.$$

Legyen

$$n = \left\lfloor \frac{\eta_T}{m} + x \sqrt{\frac{D^2 \eta_T}{m^3}} \right\rfloor,$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti. Minthogy

$$P\{v_T < n\} = P\left\{\frac{v_T - \eta_T/T}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}} < \frac{n - \eta_T/m}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}}\right\},$$

és η_T sztochasztikusan $+\infty$ -hez konvergál, ezért

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\eta - \eta_T/m}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}} - x\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Alkalmazzuk most az 1. lemmát a

$$\chi(T) = \frac{v_T - \eta_T/m}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}}, \quad \varepsilon(T) \equiv 1, \quad \delta(T) = -\frac{n - \eta_T/m}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}} + x$$

folyamatokra. Ily módon, a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{v_T < n\} = \lim_{T \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v_T - \eta_T/m}{\sqrt{D^2 \eta_T/m^3}} < x\right\}$$

egyenlőséghez jutunk, hacsak létezik a bal oldali határérték. Másrésről

$$P(\tau_n \geq \eta_T) = P\left\{\frac{\tau_n - n \cdot m}{\sqrt{n D^2}} \geq \frac{\eta_T - n \cdot m}{\sqrt{n D^2}}\right\}.$$

Ekkor η_T -nek a $T \rightarrow \infty$ melletti viselkedéséről tett feltevésünk értelmében

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\eta_T - n \cdot m}{\sqrt{n D^2}} + x\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Az 1. lemma ismételt alkalmazásával, megfelelően értelmezve a benne szereplő mennyiségeket, kapjuk a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{\tau_n \leq \eta_T\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\tau_n - nm}{\sqrt{n D^2}} \leq -x\right\}$$

egyenlőséget, feltéve, hogy létezik a bal oldal határértéke. A centrális határeloszlás-tétel szerint viszont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\tau_n - nm}{\sqrt{n D^2}} \leq -x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ezen két utóbbi reláció (2. 1)-re való tekintettel éppen állításunkat igazolja.

KOROLLÁRIUM. A v_T/T , $T \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan az η/m valószínűségi változóhoz konvergál.

A korollárium bizonyítása annyira egyszerű, hogy azt itt mellőzzük.

Szükségünk lesz ANSCOMBE [11] 1. tételének következő általánosítására, melynek bizonyítása a [4] cikkben megtalálható.

2. TÉTEL. Legyenek $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ független, azonos eloszlású, véges szórással rendelkező valószínűségi változók. Legyen $m = M(\delta_i)$, $D^2 = D^2(\delta_i)$. Legyen továbbá $\{v_k\}_{k=1,2,\dots}$ pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük

fel, hogy v_n/n sztochasztikusan valamely pozitív v valószínűségi változóhoz konvergál. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{v_n} (\delta_i - m)}{D \sqrt{v_n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Végül hivatkozni fogunk még a következő állításra:

3. LEMMA. Legyen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ azonos eloszlású független valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy a változók második momentuma létezik. Legyen továbbá $v_T, T > 0$ pozitív egész értékű valószínűségi változók serege olyan, hogy v_T/T a $v > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $T \rightarrow \infty$. Ekkor $\delta_{v_T}/\sqrt{v_T}$ $T \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan zérushoz konvergál.

Bizonyítás. Legyenek $0 < a < b$ olyan számok, hogy

$$P\{a \leq v < b\} > 1 - \delta$$

teljesüljön, ahol $\delta > 0$ tetszőleges rögzített szám. Minthogy $T \rightarrow \infty$ esetén

$$P \left\{ \left| \frac{v_T}{T} - v \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0,$$

azért létezik olyan t_1 , hogy $T \geq t_1$ mellett

$$P \left\{ \left| \frac{v_T}{T} - v \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \delta$$

teljesül. Legyen $N_1 = [T(a - \varepsilon)]$, $N_2 = [T(b + \varepsilon)]$ és jelölje $F(x)$ a δ_i változók közös eloszlásfüggvényét. Minthogy

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \frac{\delta_{v_T}}{\sqrt{v_T}} \right| > \varepsilon \right\} &\leq 2\delta + P \left\{ \left| \frac{\delta_{v_T}}{\sqrt{v_T}} \right| > \varepsilon, \quad a \leq v < b, \quad \left| \frac{v_T}{T} - v \right| < \varepsilon \right\} \\ &\leq 2\delta + P \left\{ \frac{\max_{N_1 \leq n \leq N_2} |\delta_n|}{\sqrt{N_1}} > \varepsilon \right\}, \end{aligned}$$

ily módon

$$P \left\{ \left| \frac{\delta_{v_T}}{\sqrt{v_T}} \right| > \varepsilon \right\} \leq (N_2 - N_1)(1 - F(\varepsilon \sqrt{N_1}) + F(-\varepsilon \sqrt{N_1})) + 2\delta.$$

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény második momentumának létezése biztosítja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(1 - F(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 F(-x) = 0.$$

Tekintettel arra, hogy $(N_2 - N_1)/N_1$ korlátos marad, ha $T \rightarrow \infty$ és a $\delta > 0$ számot tetszőlegesen kicsivé választhatjuk, ezért előbbi megjegyzésünk alapján adódik, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\delta_{v_T}}{\sqrt{v_T}} \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

bármilyen is az $\varepsilon > 0$ szám. Ezzel állításunkat igazoltuk.

3. $\tau(\eta_T)$ határelloszlása

Az 1 pontban említettek szerint legyen $\omega(0) = \eta_T$ és tegyük fel, hogy $T \rightarrow +\infty$ esetén η_T/T sztochasztikusan a pozitív η valószínűségi változóhoz konvergál. Felteesszük azt is, hogy $D(\varepsilon_i) < +\infty$, $D(\xi_i) < +\infty$ és $D(\xi_i) < +\infty$. Legyen $v_T = 0$, ha $\eta_T \leq \varepsilon_1 + \xi_1$ és $v_T = n$, ha

$$\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \xi_i) \leq \eta_T < \sum_{i=1}^{n+1} (\varepsilon_i + \xi_i).$$

Az 1. tétel korolláriumát alkalmazva a

$$\tau_n = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \xi_i)$$

valószínűségi változó sorozatra, belátható, hogy v_T/T sztochasztikusan az η/m_2 valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $T \rightarrow +\infty$, ahol $m_2 = M(\varepsilon_i + \xi_i)$. Amint láttuk, a $\tau(\eta_T)$ valószínűségi változó eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{v_T} (\varepsilon_i + \xi_i) \leq \tau(\eta_T) < \sum_{i=1}^{v_T+1} (\varepsilon_i + \xi_i)$$

egyenlőtlenségnek. Vezessük be a $\tau^*(\eta_T)$ jelölést a

$$\sum_{i=1}^{v_T} (\varepsilon_i + \xi_i)$$

összegre. Bebizonyítjuk a következő tételt.

3. TÉTEL. Ha η_T/T sztochasztikusan az $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál, akkor

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\tau(\eta_T) - a\eta_T}{\sqrt{b\eta_T}} < x \right) = \Phi(x).$$

E képletben

$$a = \frac{m_1}{m_2}, \quad m_1 = M(\varepsilon_1 + \xi_1), \quad m_2 = M(\varepsilon_1 + \xi_1),$$

$$b = \frac{D^2 \left(\varepsilon_1 + \xi_1 - \frac{m_1}{m_2} (\varepsilon_1 + \xi_1) \right)}{m_2} = \frac{D^2}{m_2}.$$

Bizonyítás. Nyilván

$$(3.1) \quad \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T}{D\sqrt{v_T}} \leq \frac{\tau(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T}{D\sqrt{v_T}} \leq \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T + \varepsilon_{v_T+1} + \xi_{v_T+1}}{D\sqrt{v_T}}.$$

Megmutatjuk, hogy ezen egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló sztochasztikus

folyamatok $T \rightarrow +\infty$ esetén vett határeloszlása létezik és standard normális eloszlású. Nyilvánvaló, hogy

$$(3.2) \quad \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{v_T+1} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D \sqrt{v_T}} \equiv \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T}{D \sqrt{v_T}} \equiv \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{v_T} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D \sqrt{v_T}},$$

továbbá, hogy

$$M \left(\varepsilon_i + \hat{\xi}_i - \frac{m_1}{m_2} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i) \right) = 0.$$

A v_T/T valószínűségi változó sztochasztikusan az η/m_2 valószínűségi változóhoz konvergál. Ezért a 2. tétel értelmében

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{v_T} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D \sqrt{v_T}} < x \right) = \Phi(x).$$

(3.2) bal oldalának határeloszlását a *Cramér*-féle 1. lemma alapján nyerjük; nevezetesen, ha bizonyítást nyer, hogy az

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \hat{\xi}_{v_T+1}}{D \sqrt{v_T}},$$

valószínűségi változó $T \rightarrow +\infty$ esetén sztochasztikusan zérushoz konvergál, akkor a *Cramér*-lemma alapján (3.2) bal oldalának is $\Phi(x)$ a határeloszlása. Most a 3. Lemma összes feltételei teljesülnek. Ily módon

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \hat{\xi}_{v_T+1}}{D \sqrt{v_T}}$$

sztochasztikusan zérushoz konvergál. Az 1. lemma értelmében pedig ekkor

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{v_T+1} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D \sqrt{v_T}} < x \right) = \Phi(x).$$

A 3. lemma feltételei teljesülnek az

$$\eta_n = \varepsilon_n + \hat{\xi}_n$$

valószínűségi változó sorozatra is, ezért $T \rightarrow \infty$ esetén

$$\frac{\eta_{v_T}}{D \sqrt{v_T}}$$

sztochasztikusan zérushoz konvergál. Figyelembe véve előbbi limeszrelációkat, az 1. és 2. lemma alapján mondható, hogy (3.1) középső tagjának határeloszlása is

normális. A *Cramér*-lemma alapján bizonyításunkat a következőképpen fejezhetjük be: minthogy v_T/T sztochasztikusan az η/m_2 változóhoz konvergál, azért

$$\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T}{D \sqrt{v_T}}$$

határeloszlása nem változik meg, ha v_T helyébe a

$$\frac{T\eta}{m_2}$$

valószínűségi változót írjuk és ugyancsak változatlan marad, ha ez utóbbi helyébe az η_T/m_2 változó kerül.

KOROLLÁRIUM. Ha az $\eta_T/T \Rightarrow \eta$ sztochasztikus konvergencia helyett az erősebb

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{\eta_T}{T} - \eta \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{T}} \right) = 0$$

feltételt rójuk ki, akkor teljesül a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\tau(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} T\eta}{D \sqrt{\frac{T\eta}{m_2}}} < x \right) = \Phi(x)$$

limeszreláció is. Valóban, vegyünk egy olyan $\delta > 0$ számot, hogy

$$P(\eta > \delta) > 1 - \varepsilon'$$

teljesüljön, ahol $\varepsilon' > 0$ tetszőleges előre adott szám. Ekkor

$$P \left(\left| \frac{\eta_T - T\eta}{\sqrt{T\eta}} \right| > \varepsilon \right) \leq \varepsilon' + P(|\eta_T - T\eta| > \sqrt{T\delta} \varepsilon) = \varepsilon' + P \left(\left| \frac{\eta_T}{T} - \eta \right| > \frac{\sqrt{\delta} \varepsilon}{\sqrt{T}} \right).$$

Minthogy az $\varepsilon' > 0$ számot tetszőleges kicsivé választhatjuk, azért ez utóbbi reláció a *Cramér*-lemma alapján állításunkat jelenti.

A korolláriumban kirótt feltétel teljesül, ha $M(\eta_T) = T$ és $D(\eta_T)/T \rightarrow 0$ ($T \rightarrow +\infty$). Ez esetben $P(\eta \equiv 1) = 1$ és

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{\tau(\eta_T) - aT}{\sqrt{b_T}} < x \right) = \Phi(x).$$

4. Néhány megjegyzés

A 3. tétel bizonyításakor az 1. tétel és a 2. tétel eredményeit használtuk fel. Azonban az 1. tételnél nem lényeges a δ_i változók szórásának létezése. Ezt mutatja a következő állítás.

4. TÉTEL. Legyen η_T pozitív értékű sztochasztikus folyamat és tegyük fel, hogy $T \rightarrow +\infty$ esetén η_T/T sztochasztikusan az $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Legyenek $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ valószínűségi változók és tegyük fel, hogy a $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$) valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak és közös $G(x)$ eloszlásfüggvényükre fennáll a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - G(x))x^\gamma = A$$

reláció, ahol $A > 0$ és $0 < \gamma < 2$ állandók. Jelölje v_T azt a legnagyobb n indexet, amelyre teljesül, hogy $\tau_n < \eta_T$. Ekkor, ha $1 < \gamma < 2$,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{v_T - \frac{\eta_T}{m}}{\left(\frac{A\eta_T}{m^{1+\gamma}} \right)^{1/\gamma}} < x \right) = 1 - F_\gamma(-x), \quad (-\infty < x < +\infty),$$

ahol m az $F_\gamma(x)$ eloszlásfüggvény várható értéke. Ha $0 < \gamma < 1$, akkor

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P \left(\frac{v_T}{\left(\frac{\eta_T}{A^{1/\gamma}} \right)^\gamma} < y \right) = 1 - F_\gamma \left(y^{-\frac{1}{\gamma}} \right), \quad (0 < y < +\infty).$$

E limeszrelációkban $F_\gamma(x)$ azt a stabilis eloszlásfüggvényt jelöli, amelynek karakterisztikus függvénye a

$$\varphi_\gamma(t) = \exp \left\{ -|t|^\gamma \left(\cos \frac{\pi\gamma}{2} - i \sin \frac{\pi\gamma}{2} \operatorname{sign} t \right) \Gamma(1-\gamma) \right\}$$

formula által van meghatározva. Ismeretes, hogy $\gamma < 1$ esetén $F_\gamma(x) = 0$, ha $x \leq 0$, míg $\gamma \geq 1$ esetén $F_\gamma(x) > 0$ minden x -re.

A 4. tétel bizonyítása az 1. tétel bizonyításához hasonló módon történik. A tételből következik, hogy $1 < \gamma < 2$ esetén a v_T/T valószínűségi változó $T \rightarrow +\infty$ esetén sztochasztikusan az η/m valószínűségi változóhoz konvergál.

Az 1. és 4. tételek FELLER [3] megfelelő eredményeinek általánosításai.

A 2. tétel is megfogalmazható általánosabban.

5. TÉTEL. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók sorozata és tegyük fel, hogy valamilyen $\{B_n\}$ ($B_n \rightarrow +\infty$, ha $n \rightarrow +\infty$) és $\{C_n\}$ számsorozatokra teljesül, hogy az

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n} - C_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

valószínűségi változóknak létezik a határeloszlása, mikor $n \rightarrow +\infty$. Feltesszük, hogy

$B_n = n^\alpha L(n)$ alakú, ahol $\alpha > 0$ és tetszőleges rögzített $c > 0$ esetén $L([cn])/L(n) \rightarrow 1$, mikor $n \rightarrow +\infty$. Ha v_n olyan pozitív egész értékű változók sorozata, hogy v_n/n sztochasztikusan valamely pozitív v valószínűségi változóhoz konvergál, akkor az η_{v_n} határeloszlása ugyanaz, mint az η_n sorozaté.

Ez utóbbi két állítás segítségével a $\tau(\eta_T)$ határeloszlására nézve a következő állítás érvényes:

6. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $m_1 = M(\varepsilon_1 + \xi_1)$ és $m_2 = M(\varepsilon_1 + \hat{\xi}_1)$ létezik és a $H(x) = P(\varepsilon_1 + \xi_1 < x)$, illetőleg a $G(x) = P\left(\varepsilon_1 + \xi_1 - \frac{m_1}{m_2}(\varepsilon_1 + \hat{\xi}_1) < x\right)$ eloszlásfüggvényekre teljesülnek a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - H(x))x^\gamma = A,$$

ill. a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - G(x))x^\alpha = Bc_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)|x|^\alpha = Bc_2$$

limeszrelációk, ahol $1 < \gamma < 2$, $1 < \alpha < 2$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$ és $A > 0$, $B > 0$ állandók. Ekkor, ha η_T pozitív értékű sztochasztikus folyamat, amelyre teljesül, hogy η_T/T sztochasztikusan a pozitív η változóhoz konvergál, fennáll a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\tau(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2}\eta_T}{\left(\frac{T\eta B}{m_2}\right)^{1/\alpha}} < x\right) = F_\alpha(x)$$

limeszreláció, ahol $F_\alpha(x)$ az α , c_1 , c_2 ($c_1 + c_2 > 0$) paraméterekhez tartozó stabilis eloszlásfüggvény.

A 6. tétel a stabilis határeloszlásokra vonatkozó ismert eredmények felhasználásával ugyanúgy bizonyítható, mint a 3. tétel. Egyedüli problémát az

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \xi_{v_T+1}}{v_T^{1/\alpha}},$$

ill. az

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \hat{\xi}_{v_T+1}}{v_T^{1/\alpha}}$$

valószínűségi változók sztochasztikus zérushoz való konvergenciája jelent.

Ezt bizonyítani a következő lemmák segítségével lehet.

4. LEMMA. ([6]) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók és legyen $k_n \leq m_n$ két pozitív egész számokból álló végtelenhez tartó sorozat. Jelöljön A_n tetszőleges, a $\{\xi_{k_n}, \dots, \xi_{m_n}\}$ valószínűségi változók által generált σ -algebrába tartozó eseményt. Ekkor, ha A tetszőleges rögzített esemény,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (P(A_n A) - P(A_n)P(A)) = 0.$$

5. LEMMA. Legyen $\eta_1, \eta_2, \dots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók sorozata és tegyük fel, hogy közös $F(x)$ eloszlásfüggvényükre teljesülnek a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - F(x))x^\alpha = Bc_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)|x|^\alpha = Bc_2$$

limeszrelációk, ahol $0 < \alpha < 2$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$ és $B > 0$ állandók. Legyen v_T pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy $T \rightarrow +\infty$ esetén v_T/T sztochasztikusan a $v > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Ekkor $\eta_{v_T}/(v_T)^{1/\alpha}$ sztochasztikusan zérushoz konvergál.

Bizonyítás. Legyenek $0 < a < b$ olyan számok, hogy

$$P(a \leq v < b) > 1 - \delta$$

teljesüljön, ahol $\delta > 0$ később meghatározandó rögzített szám. Létezik olyan T_1 szám, hogy $T \geq T_1$ esetén

$$P\left(\left|\frac{v_T}{T} - v\right| < \frac{a}{2}\right) \geq 1 - \delta.$$

Osszuk fel az $\left(\frac{a}{2}, b + \frac{a}{2}\right)$ intervallumot az a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$; $a_0 = \frac{a}{2}$, $a_k = b + \frac{a}{2}$) osztópontokkal, úgy, hogy teljesüljön az

$$\frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i-1}} \leq \delta \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

egyenlőtlenség és jelölje N_i a $[Ta_i]$ egész számot. Ekkor nyilván

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{\eta_{v_T}}{v_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon\right) &\leq 2\delta + \sum_{i=1}^k P\left(\left|\frac{\eta_{v_T}}{v_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon, a_{i-1} \leq v < a_i, \left|\frac{v_T}{T} - v\right| < \frac{a}{2}\right) \leq \\ &\leq 2\delta + \sum_{i=1}^k P\left(\max_{N_{i-1} \leq n \leq N_i} |\eta_n| > \varepsilon N_i^{1/\alpha}, a_{i-1} \leq v < a_i\right), \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám.

A 4. lemmát alkalmazva az összeg egyes tagjaira, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} &\limsup_{T \rightarrow +\infty} P\left(\max_{N_{i-1} \leq n \leq N_i} |\eta_n| > \varepsilon N_i^{1/\alpha}, a_{i-1} \leq v < a_i\right) \leq \\ &\leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_i - N_{i-1}}{N_{i-1}} N_{i-1} ((1 - F(\varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha}) + F(-\varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha})) P(a_{i-1} \leq v < a_i) = \\ &= \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i-1}} \frac{c_1 B + c_2 B}{\varepsilon^\alpha} P(a_{i-1} \leq v < a_i), \end{aligned}$$

mivel az $F(x)$ eloszlásfüggvény az α kitevőjű, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$ állandókkal jellemzett stabilis eloszlás normális vonzási tartományába tartozik. Ily módon

$$P\left(\left|\frac{\eta_{v_T}}{v_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon\right) \leq 2\delta + \frac{\delta B(c_1 + c_2)}{\varepsilon^\alpha} \sum_{i=1}^k P(a_{i-1} \leq v < a_i) \leq 2\delta + \frac{\delta B(c_1 + c_2)}{\varepsilon^\alpha}.$$

Minthogy $\delta > 0$ tetszőleges kicsivé választható, azért az utóbbi egyenlőtlenség éppen állításunkat igazolja.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*, University Press, Princeton, 1946.
- [2] L. TAKÁCS: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 8 (1957) 169—191.
- [3] W. FELLER: Fluctuation theory of recurrent events, *Transactions of the American Mathematical Society*, 67 (1947) 98—119.
- [4] J. MOGYORÓDI: A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 7 (1962) 409—424.
- [5] J. MOGYORÓDI: On limiting distributions of some special sequences of random variables, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [6] J. R. BLUM, D. L. HANSON, J. I. ROSENBLATT: On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 1 (1963) 389—393.
- [7] Й. Томко: Некоторые задачи обслуживания ненадежным прибором. Кандидатская диссертация. Москва, 1964.
- [8] Б. В. Гнеденко: Об одной задаче массового обслуживания, *Transactions of the Second Prague conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*. 1959. Prague.
- [9] Томкó J.: Tömegkiszolgálási problémákról, I., II., III. MTA III. oszt. Közleményei 15 (1965), 16 (1966), 17 (1967).
- [10] A. RÉNYI: On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957).
- [11] F. J. ANSCOMBE: Large-sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 48 (1952) 600—607.

(Beérkezett: 1967. IV. 20.)

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ В ИСПРАВНОМ СОСТОЯНИИ ПРИБОРА, РАБОТАЮЩЕГО ПО СЛУЧАЙНЫМ ПРОМЕЖУТКАМ ВРЕМЕНИ

J. ТОМКÓ — J. MOGYORÓDI

Резюме

Рассмотрим некоторый прибор, имеющий случайный ресурс η_T в начальный момент его включения. Значит, прибор способен выполнять работу в течение времени конечной длительности. Предполагается, что убывание ресурса за время бездействия происходит пропорционально времени, а за проработанное время ξ убывает на $\hat{\xi}$ где $M\hat{\xi} > M\xi$. Проще говоря, износ прибора интенсивнее во время работы, чем когда он свободен. Вследствие этого, на длительность исправного периода прибора сильно влияет частота и длины рабочих времен. В работе изучается асимптотическое поведение распределения длительности жизни прибора. В допущениях, что при $T \rightarrow \infty$ η_T/T стремится стохастически к случайной величине $\eta > 0$ и, что как свободные ε_i , так и рабочие периоды ξ_i и величины $\hat{\xi}_i$ имеют конечную дисперсию, доказана асимптотическая нормальность упомянутого распределения. Далее этого, авторы дают достаточное условие для того, чтобы предельное распределение исправного периода прибора было устойчивым с параметрами α, c_1, c_2 ($c_1 + c_2 > 0$).