

A $dd(n)$ FÜGGVÉNY ELOSZLÁSÁRÓL

Írta: KÁTAI IMRE

1.

Legyen $d(n)$ az n természetes szám pozitív osztóinak száma és $dd(n)$ jelentse a számelméleti függvény iteráltját. E dolgozatban megvizsgáljuk a $dd(n)$ függvény értékeloszlását.

Bevezetve a

$$N(x, \alpha) = \sum_{\substack{n \leq x \\ dd(n) < \alpha \log \log n}} 1$$

jelölést, könnyű megmutatni, hogy $N(x, \alpha)/x$ egy lépcsős eloszlásfüggvényhez tart, amelynek ugrásai csak egész α helyeken lehetnek. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy milyen $N(x, \alpha)$ viselkedése, ha x végtelenhez való tartása mellett egyidejűleg egy egész számhoz közeledünk α -val. Erre ad választ tételünk. A kapott határ-eloszlásfüggvény — ami, kissé pongyolán mondva, különböző paraméterű normális eloszlásfüggvények keveréke — szokatlan a számelméletben, s ez adhat bizonyos érdekességet a dolgozatnak.

Tételünk bizonyításában lényegesen felhasználjuk RÉNYI ALFRÉD és TURÁN PÁL eredményét a prímosztók számának eloszlásával kapcsolatban.

Mielőtt tételünket pontosan megfogalmaznánk, bevezetünk néhány jelölést.

Legyen $U(m)$, illetve $V(m)$ az m természetes szám különböző, illetve összes (multiplicitással számolt) prímosztói száma és legyen $\lambda(m) = (-1)^{V(m)}$, a *Liouville*-függvény. A továbbiakban $p, p_1, p_2, \dots, q$ mindig prímszámokat jelölnek.

Jelölje $\mathfrak{A}$ azoknak a K természetes számoknak a halmazát, amelyek minden prímosztójukat legalább a második hatványon tartalmazzák.

Jelölje $\mathcal{B}_K$ azoknak az n természetes számoknak a halmazát, amelyek

$$(1.1) \quad n = Km$$

alakba írhatók, ahol m négyzetmentes szám, K és m relatív prímek. Világos, hogy minden természetes szám pontosan egy $\mathcal{B}_K$ halmaz eleme.

Legyen

$$d(K) = k; \quad k = 2^\beta k_1,$$

ahol k_1 páratlan szám.

Így, ha $n \in \mathcal{B}_K$, akkor

$$d(n) = k_1 \cdot 2^{U(m) + \beta},$$

és

$$dd(n) = d(k_1)(U(m) + \beta + 1) = d(k_1)(\beta + 1) + d(k_1)U(m).$$

A továbbiakban a $k_2 = d(k_1)$ jelölést használjuk. Így

$$(1.2) \quad dd(n) = k_2(\beta + 1 + U(m)).$$

Legyen

$$(1.3) \quad A_K = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|K} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

$$(1.4) \quad e_l = \sum_{\substack{K \in \mathfrak{M} \\ k_2 = l}} \frac{A_K}{K},$$

$$(1.5) \quad C_K = \prod_{p|K} \left(1 + \frac{1}{p^2 + 1}\right).$$

Legyen továbbá

$$(1.6) \quad z = \log \log x.$$

Jelölje $N(X, \alpha)$ a

$$(1.7) \quad dd(n) < \alpha z, \quad n \leq x$$

egyenlőtlenség megoldásszámát.

Jelölje — szokás szerint — $[\alpha]$, illetve $\{\alpha\}$ az α egész-, illetve törtrészét.

TÉTEL.

$$N(x, \alpha) = x \left\{ \sum_{l \leq [\alpha] - 1} e_l + e_{[\alpha]} \Phi \left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2} \right) + e_{[\alpha] + 1} \Phi \left(\frac{\{\alpha\} - 1}{[\alpha] + 1} z^{1/2} \right) + O \left(\frac{x}{z^{3/4}} \right) + R(x, \alpha), \right.$$

ahol

$$R(x, \alpha) = \begin{cases} O \left(\frac{x}{z^{1/2}} \right), & \text{ha } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ O \left(\frac{x}{z^{1/2}} \alpha^{-M} \right), & \text{ha } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

$$M \text{ tetszőleges pozitív állandó, } \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt.$$

2. Segéd tételek

Jelölje D_K azon v természetes számok összességét, amelyek prímosztói osztói K -nak.

Legyen

$$(2.1) \quad P(x, K, r) = \sum_{\substack{m \leq x \\ (m, K) = 1 \\ U(m) = r}} |\mu(m)|,$$

$$(2.2) \quad P(x, 1, r) = P(x, r).$$

1. LEMMA:

$$(2.3) \quad P(x, K, r) = \sum_{v \in D_K} \lambda(v) P \left(\frac{x}{v}, r - V(v) \right).$$

Bizonyítás. (2. 3) legegyszerűbben talán a következő módon látható be.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, K)=1}}^{\infty} \frac{w^{U(m)} |\mu(m)|}{m^s} &= \prod_{p+K} \left\{ 1 + \frac{w}{p^s} \right\} = \prod_p \left\{ 1 + \frac{w}{p^s} \right\} \prod_{p|K} \left\{ 1 + \frac{w}{p^s} \right\}^{-1} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^{U(m)} |\mu(m)|}{m^s} \cdot \sum_{v \in D_K} \lambda(v) \frac{w^{V(v)}}{v^s}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló két sort összeszorozva, majd w^r együtthatóit összehasonlítva

$$\sum_{\substack{(m, K)=1 \\ U(m)=r}} \frac{|\mu(m)|}{m^s} = \sum_{v \in D_K} \left\{ \frac{\lambda(v)}{v^s} \sum_{U(m)=r-V(v)} \frac{|\mu(m)|}{m^s} \right\},$$

ahonnan már rögtön következik (2. 3).

Legyen

$$(2. 4) \quad S(x, r) = \sum_{\substack{U(m)=r \\ m \leq x}} 1$$

2. LEMMA:

$$(2. 5) \quad P(x, r) = \sum_{\delta^2 \leq x} \mu(\delta) S\left(\frac{x}{\delta^2}, r - V(\delta^2)\right).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} P(x, r) &= \sum_{\substack{V(m)=r \\ m \leq x}} |\mu(m)| = \sum_{\substack{V(m)=r \\ m \leq x}} \sum_{\delta^2 | m} \mu(\delta) = \sum_{\delta^2 \leq x} \mu(\delta) \sum_{\substack{V(n)=r-V(\delta^2) \\ n \leq \frac{x}{\delta^2}}} 1 = \\ &= \sum_{\delta^2 \leq x} \mu(\delta) S\left(\frac{x}{\delta^2}, r - V(\delta^2)\right). \end{aligned}$$

Legyen

$$(2. 6) \quad J_K(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathcal{B}_K}} 1.$$

3. LEMMA:

$$(2. 7) \quad J_K(x) = \frac{A_K}{K} x + O\left(k \cdot \frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} J_K(x) &= \sum_{\substack{m \leq x/K \\ (m, K)=1}} |\mu(m)| = \sum_{m \leq \frac{x}{K}} \left\{ \sum_{\delta | (K, m)} \mu(\delta) \right\} \left\{ \sum_{\substack{d^2 | m \\ (d, K)=1}} \mu(d) \right\} = \\ &= \sum_{\substack{\delta | K \\ \delta d^2 K \leq x}} \sum_{(d, K)=1} \mu(\delta d) \left[\frac{x}{K d^2 \delta} \right] = \frac{x}{K} \sum_{\delta | K} \sum_{(d, K)=1} \frac{\mu(\delta) \mu(d)}{\delta d^2} + O\left(\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}} \cdot d(K)\right) = \\ &= \frac{A_K}{K} x + O\left(k \cdot \frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

A következőkben szükségünk lesz TURÁN PÁL következő tételére [1].

4. LEMMA:

$$(2.8) \quad \sum_{m \leq x} (U(m) - z)^2 = O(xz).$$

Legfontosabb segédteételünk a következő, RÉNYI ALFRÉDTÓL és TURÁN PÁLTÓL származó tétel [2].

5. LEMMA: Az

$$(2.9) \quad U(m) < z + yz^{1/2}, \quad m \leq x$$

egyenlőtlenséget kielégítő egészek száma

$$x\Phi(y) + O(xz^{-1/2})$$

egyenletesen y -ban, ahol

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

A 2. és az 5. lemmából egyszerűen következik, hogy a

$$(2.10) \quad M(x, y) = \sum_{r < z + yz^{1/2}} P(x, r)$$

összegre a

$$(2.11) \quad M(x, y) = \frac{6}{\pi^2} x\Phi(y) + O(xz^{-1/2})$$

állítás y -ban egyenletesen fennáll.

Legyen

$$N\left(\frac{x}{K}, K, y\right) = \sum_{r < z + yz^{1/2}} P\left(\frac{x}{K}, K, r\right).$$

6. LEMMA. $K < x^{1/4}$ esetén

$$(2.12) \quad N\left(\frac{x}{K}, K, y\right) = c_K \frac{x}{K} \Phi(y) + O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right) + O\left(\frac{x|y|\{k + \log K \cdot \log \log K\}}{Kz \log x}\right).$$

Bizonyítás. Az 1. lemmából

$$N\left(\frac{x}{K}, K, y\right) = \sum_{v \in D_K} \lambda(v) \sum_{r < z + yz^{1/2} - v(v)} P\left(\frac{x}{Kv}, r\right) = \sum_{v \leq \Delta} + \sum_{v > \Delta} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Mivel $\Delta > 1$ -re

$$\sum_{\substack{v > \Delta \\ v \in D_K}} \frac{1}{v} < \sum_{v \in D_K} \frac{1}{v} \left(\frac{v}{\Delta}\right)^{1/2} < \frac{1}{\Delta^{1/2}} \prod_{p|K} \left(1 + \frac{1}{p^{1/2}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{3/2}} + \dots\right) \ll \frac{k}{\Delta^{1/2}}$$

és

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(x, r) \ll x,$$

így

$$\Sigma_2 \ll \frac{x}{K} \sum_{\substack{v \in D_K \\ v > \Delta}} \frac{1}{v} \ll \frac{xk}{K\Delta^{1/2}}.$$

Másrészt

$$|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| \leq |y_1 - y_2|.$$

Legyen y' a

$$z + yz^{1/2} - V(v) = \log \log \frac{x}{Kv} + y' \left(\log \log \frac{x}{Kv} \right)^{1/2}$$

egyenlet megoldása. Könnyen látható, hogy

$$|y - y'| \ll \frac{|y| \log Kv}{z \log x} + O \left(\frac{V(v) + 1}{z^{1/2}} \right).$$

Innen

$$\sum_1 = \frac{1}{\zeta(2)} \frac{x}{K} \Phi(y) \sum_{\substack{v < A \\ v \in D_K}} \frac{\lambda(v)}{v} + O \left(\frac{x}{Kz^{1/2}} \sum_{v \in D_K} \frac{V(v) + 1}{v} \right) + O \left(\frac{x|y|}{Kz \log z} \sum_{v \in D_K} \frac{\log Kv}{v} \right).$$

Mivel

$$\sum_{v \in D_K} \frac{V(v) + 1}{v} \ll \sum_{v \in D_K} \frac{\log v}{v} \ll \sum_{v \in D_K} \frac{1}{v^{1-\varepsilon}} \ll k,$$

és

$$\sum_{v \in D_K} \frac{1}{v} \ll \prod_{p|K} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots \right) \ll \log \log K,$$

így $A = z$ választással

$$\sum_1 = c_K \frac{x}{K} \Phi(y) + O \left(\frac{xk}{Kz^{1/2}} \right) + O \left(\frac{x|y|(k + \log K \cdot \log \log K)}{Kz \log x} \right),$$

és innen következik a lemma.

Legyen

$$(2.13) \quad T(x, K, \alpha) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathcal{B}_K \\ d_2(n) < \alpha z}} 1.$$

7. LEMMA. Legyen $1 \leq \alpha \leq z^{3/4}$, $K \leq z^A$. Ekkor

$$(2.14) \quad T(x, K, \alpha) = \frac{A_K}{K} x + O \left(k \frac{x^{1/2}}{K^{1/2}} \right) + O \left(\left(\frac{k_2}{\alpha - k_2} \right)^2 \frac{x}{Kz} \right)$$

ha $k_2 \leq [\alpha] - 1$,

$$(2.15) \quad T(x, K, \alpha) = O \left(k \frac{x^{1/2}}{K^{1/2}} \right) + O \left(\left(\frac{\alpha - k_2}{k_2} \right)^2 \frac{x}{Kz} \right),$$

ha $k_2 \geq [\alpha] + 1$,

$$(2.16) \quad T(x, K, \alpha) = \frac{c_K x}{K} \Phi \left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2} \right) + O \left(\frac{xk}{Kz^{1/2}} \right) + O \left(\frac{x \frac{\{\alpha\}}{\alpha} (k + \log K \cdot \log \log K)}{Kz^{1/2} \log x} \right)$$

ha $k_2 = [\alpha]$ és

(2. 17)

$$T(x, K, \alpha) = \frac{c_K x}{K} \Phi \left(\frac{\{\alpha\} - 1}{[\alpha] + 1} z^{1/2} \right) + O \left(\frac{xk}{Kz^{1/2}} \right) + O \left(\frac{x \frac{\{\alpha\}}{\alpha} (k + \log K \cdot \log \log K)}{Kz^{1/2} \log x} \right),$$

ha $k_2 = [\alpha] + 1$.

Bizonyítás. Foglalkozunk először a $k_2 \leq [\alpha] - 1$ esettel. Mivel $d_2(n) < \alpha z$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$U(m) - z \leq \left(\frac{\alpha}{k_2} - 1 \right) z - (\beta + 1),$$

továbbá $2^\beta \leq d(K) \ll K^\varepsilon$, így $\beta \ll o(\log K) = O(\log z)$ és $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{k_2} \leq \frac{1}{k_2} \leq \frac{1}{z^{1/4}}$.

Legyen

$$T(x, K, \alpha) = \sum_{\substack{n \in \mathcal{B}_K \\ n \leq x}} 1 - \sum_3.$$

Ekkor

$$\sum_3 \ll \sum_{m \leq \frac{x}{K}} \left(\frac{U(m) - z}{\alpha - k_2} \right)^2 \ll \left(\frac{k_2}{\alpha - k_2} \right)^2 \frac{x}{K} z^{-1}.$$

A 3. lemma miatt

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{B}_K \\ n \leq x}} 1 = \frac{A_K}{K} x + O \left(k \frac{x^{1/2}}{K^{1/2}} \right),$$

s innen rögtön következik a (2. 14) egyenlőtlenség. A (2. 15) formula hasonlóan látható be.

Legyen most $k_2 = [\alpha]$. A

$$dd(n) < \alpha z, \quad n \in \mathcal{B}_K, \quad n \leq x$$

feltétel ekvivalens a

$$U(m) < \left(1 + \frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} \right) z - (\beta + 1), \quad m \leq \frac{x}{K}, \quad (m, K) = 1, \quad \mu(m) \neq 0$$

feltétellel. Ennek megoldásszáma a 6. lemma miatt

$$\begin{aligned} T(x, K, \alpha) &= N \left(\frac{x}{K}, K, \frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2} - \frac{\beta + 1}{z^{1/2}} \right) = \frac{c_K x}{K} \Phi \left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2} \right) + \\ &+ O \left(\frac{xk}{Kz^{1/2}} \right) + O \left(\frac{x \frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} (k + \log K \cdot \log \log K)}{Kz^{1/2} \log x} \right). \end{aligned}$$

(2. 17) bizonyítása hasonló.

3. A tétel bizonyítása

$$N(x, \alpha) = \sum_{K \in \mathfrak{U}} T(x, K, \alpha) = \sum_{\substack{K \leq z^A \\ K \in \mathfrak{U}}} + \sum_{\substack{K > z^A \\ K \in \mathfrak{U}}} = \Sigma_4 + \Sigma_5.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\Sigma_5 \leq x \sum_{\substack{K \in \mathfrak{U} \\ K > z^A}} \frac{1}{K} \ll \frac{x}{z^{A/2}}.$$

Σ_4 -et vágjuk négy részre annak megfelelően, hogy $k_2 \leq [\alpha] - 1$, $k_2 = [\alpha]$, $k_2 = [\alpha] + 1$, $k_2 \geq [\alpha] + 2$:

$$\Sigma_4 = \Sigma_6 + \Sigma_7 + \Sigma_8 + \Sigma_9.$$

A 7. lemmából

$$\begin{aligned} \Sigma_6 &= x \sum_{\substack{K \in \mathfrak{U} \\ k_2 \leq [\alpha] - 1 \\ K \leq z^A}} \frac{A_K}{K} + O\left(x^{1/2} \sum_{\substack{K < x \\ K \in \mathfrak{U}}} \frac{k}{K^{1/2}}\right) + O\left(\frac{x}{z} \sum_{K < z^A} \frac{k_2^2}{K}\right) = \\ &= x \sum_{l \leq [\alpha] - 1} e_l + O\left(\frac{x}{z} (\log z)^3\right), \end{aligned}$$

ha $A \geq 2$, mivel $\sum_{K > z^A} \frac{A_K}{K} \ll z^{-A/2}$. Hasonlóan

$$\Sigma_9 \ll \frac{x}{z} (\log z)^3 \ll \frac{x}{z^{3/4}}.$$

Továbbá a (2. 16), (2. 17) egyenlőtlenségek alkalmazásával

$$\begin{aligned} \Sigma_7 &= e_{[\alpha]} x \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + O\left(\frac{x}{z^{1/2}} \sum_{k_2 = [\alpha]} \frac{k}{K}\right) + O\left(\frac{x}{z^{1/2} \log x} \frac{\{\alpha\}}{\alpha} \sum_{k_2 = l} \frac{k + \log K \cdot \log \log K}{K}\right) = \\ &= e_{[\alpha]} x \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + O\left(\frac{x}{z^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Mivel $K^e \leq k_1 \leq k_2 = l$, így

$$\sum_{k_2 = [\alpha]} \frac{k}{K} \ll \sum_{K > [\alpha]^{1/e}} \frac{k}{K}$$

és innen

$$\Sigma_7 = e_{[\alpha]} x \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + O\left(\frac{x}{z^{1/2}} [\alpha]^{-1/\varepsilon}\right),$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ állandóval.

Ugyanígy látható, hogy

$$\Sigma_8 = x e_{[\alpha] + 1} \Phi\left(\frac{\{\alpha\} - 1}{[\alpha] + 1} z^{1/2}\right) + O\left(\frac{x}{z^{1/2}} [\alpha]^{-1/\varepsilon}\right).$$

Innen következik, hogy

$$N(x, \alpha) = x \sum_{l \leq [\alpha] - 1} e_l + x e_{[\alpha]} \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + x e_{[\alpha] + 1} \Phi\left(\frac{1 - \{\alpha\}}{[\alpha] + 1} z^{1/2}\right) + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) + R(x, \alpha),$$

ha $\alpha \ll z^{3/4}$.

Az $\alpha > z^{3/4}$ eset vizsgálata könnyű. Ekkor

$$N(x, \alpha) = x + O\left(x \sum_{n \leq x} \frac{dd(n)}{z^{7/4}}\right) = x + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) = x \sum_{l \leq [\alpha]-1} e_l + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right),$$

mivel

$$\sum_{n \leq x} dd(n) \ll xz$$

és

$$\sum_{l \geq z^{3/4}} e_l \ll z^{-5}.$$

Innen következik a tétel.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] P. TURÁN: Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936) 125—133.
 [2] A. RÉNYI and P. TURÁN: On a theorem of Erdős—Kac, *Acta Arithm.* **4** (1958) 71—74.

(Beérkezett: 1967. V. 4.)

ON THE DISTRIBUTION OF $dd(n)$

by

IMRE KÁTAI

Summary

Let $d(n)$ denote the number of divisors of n , and let $dd(n)$ the number of divisors of $d(n)$. Let $N(x, \alpha)$ denote the number of solutions of the inequality

$$dd(n) < \alpha z, \quad n \leq x,$$

where $z = \log \log x$.

We proved the following assertion

$$N(x, \alpha) = \left\{ \sum_{l \leq [\alpha]-1} e_l + e_{[\alpha]} \Phi\left(\frac{[\alpha]}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + e_{[\alpha]+1} \Phi\left(\frac{[\alpha]-1}{[\alpha]+1} z^{1/2}\right) \right\} + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) + R(x, \alpha),$$

where

$$R(x, \alpha) = \begin{cases} O\left(\frac{x}{z^{1/2}}\right), & \text{when } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ O\left(\frac{x}{z^{1/2}} \alpha^{-M}\right) & \text{when } \alpha \leq 1, \quad M \text{ arbitrary constant,} \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt,$$

further $e_l \geq 0$ for $l = 1, 2, \dots$, and $\sum_{l=1}^{\infty} e_l = 1$.