

TÖMEGKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁKRÓL, II.

Írta: TOMKÓ JÓZSEF

Bevezetés

Az előző [1] dolgozatban egy egysatornás kiszolgáló rendszerrel kapcsolatos kérdéseket vizsgáltunk. Feltételeztük, hogy a kiszolgálást végző készülék csak általában bizonyos véletlen hosszúságú időszakok folyamán munkaképes. A készülék meghibásodása után felújításra kerül, melynek befejeztével teljesen visszanyeri munkavégzőképességét. Aszerint, hogy a készülék meghibásodása, vagy foglaltsága mellett a rendszerbe érkezett igények milyen esetben vesznek el, két típust különböztettünk meg. Mindkettőnél kikötöttük, hogy a készülék meghibásodási pillanatában a rendszerben tartózkodó igények, majd még azok is, amelyek a javítási idő alatt érkeztek be, elvesznek, kiszolgálási követelményük kielégítése nélkül távoznak a rendszerből. Az alkalmazások körében viszont előfordulnak olyan szké-mák is, amelyeknél a beérkezett igények csak a kiszolgálásuk teljes kielégítése után hagyják el a rendszert. Példaként megemlíthetjük az egyszemélyes információ szol-gálatot, amelynél mind személyesen, mind telefonon keresztül nyerhetünk fel-világosítást. A telefonhívásoknak elsőbbséget adva (ezek beérkezési pillanatait te-kintjük a készülék meghibásodásainak) és még néhány egyszerű, a valóságban tény-leg meglevő feltételezés mellett az említett rendszer egy reális modelljét kapjuk.

a) Mielőtt a vizsgálandó rendszerünket pontosabban körülírnánk, felsoroljuk azokat a feltevéseket és jelöléseket, amelyeket [1] bevezetésében a készülék meg-hibásodásával kapcsolatban használtunk. Szükségünk lesz a készülék üzembiz-tontsági tartalékának fogalmára (ü. b. tart.), amelyen értjük azt az általában vé-leetlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő anyagi tényezőt, amely-nek kellő mértékű hiánya a készülék meghibásodását idézi elő. Feltételezzük, hogy a készülék ü. b. tart.-a mind a szabad, mind a munkaperiódusok folyamán az idővel arányosan $C=1$, ill. $C>1$ arányossági tényezővel csökken. A készülék javítása közvetlenül a meghibásodási pillanat után kezdődik s véletlen időtartamú. A készü-lék t pillanatbeli ü. b. tartalékát $\omega(t)$ -vel fogjuk jelölni. Ha a t pillanatban a készülék javítás alatt van, akkor definíciószerűleg $\omega(t)$ -t zérusnak vesszük. Az i -edik javítás kezdőpillanatát $\bar{r}_i$ -sal, befejeződési pillanatát r_i -vel jelöljük. $i=0$ esetén ezek értel-mezettek és $\bar{r}_0=0$, $r_0>0$, ha a $t=0$ pillanatban a készülék javítás alatt van. Legyenek most $\delta_i = r_i - \bar{r}_i$ ($i \geq 0$) (javítási idők), $\eta_i = \omega(r_i+0)$ ($i \geq 0$) ha r_0 értelmezett, míg más esetben $\eta_0 = \omega(0)$ (η_i interpretálható úgy, mint az i -edik javítás során a készü-lékbe oltott ü. b. tartalék). Feltételezni fogjuk, hogy mind a δ_i -k, mind az η_i -k összes-ségükben egymástól független valószínűségi változók s $i \geq 1$ mellett $P\{\delta_i \leq x\} = G(x)$ és $P\{\eta_i \leq x\} = H(x)$.

b) Mármost ezen dolgozatban a következő egysatornás kiszolgáló rendszert fogjuk vizsgálni. A készülék meghibásodásai s az ebből kifolyó javításai az előbb

leírtak szerint mennek végbe. A rendszerbe az igények λ -paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Az i -edik személy kiszolgálási idejét ξ_i -vel jelöljük, s feltételezzük, hogy ezek egymásközt, továbbá az érkezések, a javítások és a készülék ü. b. tartalékának folyamataitól is független $P\{\xi_i \leq x\} = F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók. Eltérően az [1] dolgozatban tárgyaltaktól, most az igények a kiszolgálásuk teljes befejezéséig minden körülmények mellett a rendszerben maradnak. A kiszolgálási sorrenddel kapcsolatosan csupán annyit teszünk fel, hogy egy javítás befejezése után azon kiszolgálás folytatására kerül sor, amely éppen a javítást kiváltó meghibásodás következtében szakadt félbe. Erre a megállapodásra csak akkor lesz szükségünk, amikor egy ilyen igénynek az ismételt kiszolgálási folyamatban való részvétele a megszakadt kiszolgálásnak mintegy folytatásaként megy végbe. A 3. §-ban egy útkeresztelési problémával kapcsolatosan olyan esettel lesz dolgunk, amikor az ismételt kiszolgálásban való részvétel a tényleges kiszolgálási időnek előről való kezdése. Ez esetben a vizsgálandó karakterisztikánk szempontjából közömbös, hogy milyen a kiszolgálás sorrendje.

c) A dolgozat 1. §-ában a készülék meghibásodására vonatkozólag meglehetősen erősen mesterkelt feltételezéseket engedünk meg. Pontosabban azzal a kikötéssel fogunk élni, hogy a készülék a foglaltsági periódusok alatt nem romolhat el. A gyakorlatban ilyen követelményeknek megfelelő reális modellel nem igen találkozunk. Az ilyen rendszerek vizsgálatát lényegében az indokolja, hogy az általánosabb modell könnyen visszavezethető erre az egyszerűbbre.

A feltételeknek egy további megszorítására lesz még szükségünk, éspedig arra, hogy a készülék ü. b. tartalékát exponenciális eloszlásúnak kell tekintenünk. Ezáltal lényegében az [1] dolgozat bevezetésében említett illuzórikus kikötések feltételezésére szorítkozunk. Sajnos, más esetben csupán még bizonyos ergodicitási tulajdonságok igazolása is igen nehézkes.

A 2. §-ban az a) és b) pontok feltételeinek megfelelő egysatornás rendszert vizsgálunk. Az egyszerűbb c) pontbeli esetre való visszavezetéssel meghatározzuk a rendszerben tartózkodó személyek számának a stacionárius rezsimre vonatkozó generátorfüggvényét. A 3. §-ban alkalmazásképpen egy útkeresztelési problémát tárgyalunk.

1. §. Teljes üzembiztonság a foglaltsági periódusok alatt

1. A STACIONÁRIUS REZSIM LÉTEZÉSÉNEK FELTÉTELE. Tekintsük az a), b) és c) pontokban szereplő feltételeknek eleget tevő kiszolgáló rendszert. Az a) és c) követelmények együttes teljesülése azt eredményezi, hogy a kiszolgáló készülék csak szabad periódus alatt hibásodhat meg, s ha egy kiszolgálás elkezdődött, akkor az zavartalanul folyik le bármilyen legyen is az időtartama. Éppen emiatt a kiszolgálás sorrendje tetszőleges lehet. A $H(x)$ függvényt, amely most annak a valószínűsége, hogy ha a t pillanatban befejeződött egy foglaltsági periódus és a $t+x$ időpillanatig újabb igények nem érkeztek, akkor az utóbbi pillanatig a készülék meghibásodik, most $1 - e^{-\alpha x}$ -nek vesszük. Feltesszük még, hogy a javítási és kiszolgálási időtartamok véges β , ill. μ várható értékekkel rendelkeznek.

Jelölje $R_k(t)$, ($k \geq 0$) annak a valószínűségét, hogy a t pillanatban pontosan k igény tartózkodik a rendszerben. E pontban megvizsgáljuk, hogy milyen további fel-

tételek mellett léteznek az

$$(1) \quad R_k = \lim_{t \rightarrow \infty} R_k(t)$$

határvalószínűségek.

E célból tekintsük a

$$\gamma(t) = \{e(t), \mu(t), \xi(t)\}$$

sajátos módon felépített sztochasztikus folyamatot. Az első komponens két értéket vehet fel; $e(t) = 0$ ha a t pillanatban a készülék javítás alatt van, s minden más esetben $e(t) = 1$. $\mu(t)$ a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát jelenti. A harmadik komponens értelme az $e(t)$ értékétől függően esetenként más és más. $e(t) = 0$ mellett $\xi(t)$ a folyamatban levő javítás t időpillanatig eltelt részét jelenti. $e(t) = 1$ esetben 0, ha a készülék szabad, míg ha a készülék foglalt, akkor a soron levő kiszolgálásnak a t időpillanatig vett részét adja meg.

Könnyen észrevehető, hogy az így értelmezett $\gamma(t)$ folyamat rekurrens sztochasztikus folyamat, melynek regenerációs pontjaiként tekinthetők azok a kiszolgálás és javítás-befejeződési pillanatok, amelyeknél a kiszolgáló készülék szabadabbá válik. Legyen α_{i+1} , α_i két ilyen szomszédos pont. Továbbá, ε_α jelentse a készülék egy üzembiztonsági tartálékát, mely most számértékben megegyezik a készülék szabad periódusra vonatkozó élettartamával. Két igény egymásutáni érkezése közti időközöt jelöljük ε_λ -val, majd $\zeta^{(n)}$ jelentse a készüléknek egy olyan foglaltsági periódusát, amelynek kezdeti pillanatában pontosan n igény tartózkodott a rendszerben. Feltevézéseink következtében ε_α , ε_λ exponenciális eloszlásúak α , ill. λ paraméterekkel, $\zeta^{(n)}$ pedig interpretálható n darab $\zeta^{(1)}$ típusú független valószínűségi változó összege gyanánt.

Értelmezzük most az elemi eseménytér következő részhalmazait (eseményeit):

$$A \equiv \{\varepsilon_\alpha > \varepsilon_\lambda\}$$

$$B_0 \equiv \{\varepsilon_\alpha + \delta < \varepsilon_\lambda\}$$

.....

$$B_k \equiv \{\varepsilon_\alpha < \varepsilon_\lambda, \varepsilon_\alpha + \delta > \varepsilon_\lambda \text{ és a } \delta \text{ javítási idő alatt pontosan } k \text{ igény érkezett a rendszerbe}\}.$$

Mármint az $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ a következőképpen adható meg:

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_\lambda + \zeta^{(1)} & \text{az } A \text{ halmazon,} \\ \varepsilon_\alpha + \delta & \text{a } B \text{ halmazon,} \\ \varepsilon_\alpha + \delta + \zeta^{(n)} & \text{a } B_n \text{ halmazon } (n \geq 1). \end{cases}$$

Minthogy az $A, B_0, B_1, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak és

$$P(A) = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$$

$$P(B_k) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} dG(u) = q_k, \quad (k \geq 0)$$

ezért

$$M\{\alpha_{i+1} - \alpha_i\} = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} (1/\lambda + M\zeta^{(1)}) + \varrho_0(1/\alpha + \beta) + \sum_1^{\infty} \varrho_n(1/\alpha + \beta + nM\zeta^{(1)}).$$

Itt most $\sum_1^{\infty} n\varrho_n < \infty$, ezért $M\{\alpha_{i+1} - \alpha_i\} < \infty$ teljesüléséhez csupán $M\zeta^{(1)} < \infty$ szükséges. Ismeretes, hogy az utóbbi követelmény akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(2) \quad \lambda \int_0^{\infty} x dF(x) = \lambda\mu < 1.$$

Tekintsük ezekután az alábbi valószínűségeket:

$$Q_k(y; t) = P\{e(t) = 0, \mu(t) = k, \xi(t) \leq y\}, \quad (k \geq 0)$$

$$P_0(t) = P\{e(t) = 1, \mu(t) = 0\}$$

$$P_k(x; t) = P\{e(t) = 1, \mu(t) = k, \xi(t) \leq x\} \quad (k \geq 1).$$

Ugyanazokkal a megfontolásokkal, amelyeket az [1] dolgozat 1. §-ának 4. pontjában alkalmaztunk, verifikálható, hogy az $M\zeta^{(1)} < \infty$ feltétel mellett a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus. Ennek értelmében a $\gamma(0)$ tetszőleges eloszlása mellett, azaz a $Q_k(y; 0)$, $P_0(0)$ és a $P_k(x; 0)$ függvények bármely, a pozitivitás és a monotonitás követelményének, továbbá a $P_0(0) + Q_0(\infty; 0) + \sum_1^{\infty} [Q_k(\infty; 0) + P_k(\infty; 0)] = 1$ normálási feltételnek eleget tevő választása mellett léteznek a

$$Q_k(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_k(y; t),$$

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t),$$

$$P_k(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(x; t)$$

határvalószínűségek. Eredményünket a következőképpen foglalhatjuk össze:

1. TÉTEL. A (2) feltétel mellett a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus, azaz léteznek a (3) alatti, s ebből kifolyólag az (1) határvalószínűségek.

2. Az R_k valószínűségek meghatározása. A következőkben feltételezzük, hogy a $\gamma(t)$ folyamat ergodikus eloszlása bizonyos „simasági” tulajdonságokkal rendelkezik. Ezen azt értjük, hogy léteznek a

$$(4) \quad \begin{cases} q_k(x) = \frac{\partial Q_k(x)}{\partial x}, & (k \geq 0) \\ p_k(x) = \frac{\partial P_k(x)}{\partial x} & (k \geq 1) \end{cases}$$

deriváltak. Az [1] dolgozat 1. §-ában szereplő megfontolásoknak a jelen esetünkre való megismétlésével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az előbbi feltétel nem jelenti az általánosság további megszorítását.

Szokásos módon, ahogyan ezt az [1] 1. §-ában tettük, megkeresve azon átmenetek valószínűségeit, amelyek a $\gamma(t)$ folyamatban kis Δ időtartam alatt végbemehetnek, a (3) alatti P_0 és a (4) sűrűségfüggvényekre az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$P_0 = P_0[1 - (\lambda + \alpha)\Delta] + \int_0^\infty q_0(y)\Delta \frac{dG(y)}{1-G(y)} + \int_0^\infty p_1(x)\Delta \frac{dF(x)}{1-F(x)} + o(\Delta),$$

$$q_0(y+\Delta) = q_0(y)(1-\lambda\Delta) \frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)} + o(\Delta)$$

($k \geq 1$)-re:

$$q_k(y+\Delta) = q_k(y)(1-\lambda\Delta) \frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)} + \lambda\Delta q_{k-1}(y) \frac{1-G(y+\Delta)}{1-G(y)} + o(\Delta)$$

$$p_1(x+\Delta) = p_1(x)(1-\lambda\Delta) \frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)} + o(\Delta).$$

$k \geq 2$ -re:

$$p_k(x+\Delta) = p_k(x)(1-\lambda\Delta) \frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)} + \lambda\Delta p_{k-1}(x) \frac{1-F(x+\Delta)}{1-F(x)} + o(\Delta).$$

$$q_0(0)\Delta = P_0\alpha\Delta + o(\Delta); \quad q_k(0) \equiv 0 \quad (k \geq 1)$$

$$p_1(0)\Delta = \lambda\Delta P_0 + \int_0^\infty p_2(x)\Delta \frac{dF(x)}{1-F(x)} + \int_0^\infty q_1(x)\Delta \frac{dG(x)}{1-G(x)} + o(\Delta).$$

$k \geq 2$ -re

$$p_k(0)\Delta = \int_0^\infty q_k(y)\Delta \frac{dG(y)}{1-G(y)} + \int_0^\infty p_{k+1}(x)\Delta \frac{dF(x)}{1-F(x)} + o(\Delta).$$

Innen a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenet elvégzése után a

$$q_k^*(y) = \frac{q_k(y)}{1-G(y)} \quad (k \geq 0), \quad p_k^*(x) = \frac{p_k(x)}{1-F(x)} \quad (k \geq 1)$$

normált mennyiségekre a következő differenciál-egyenletrendszert nyerjük:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial q_0^*}{\partial y} = \lambda q_0^* = 0 \\ \frac{\partial q_k^*}{\partial y} + \lambda(q_k^* - q_{k-1}^*) = 0 \end{cases} \quad (k \geq 1)$$

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} = \lambda p_1^* = 0 \\ \frac{\partial p_k^*}{\partial x} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0 \end{cases} \quad (k \geq 2).$$

A peremfeltételeket az alábbi egyenletek írják le:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{1}{\alpha + \lambda} \left\{ \int_0^{\infty} q_0^*(y) dG(y) + \int_0^{\infty} p_1^*(x) dF(x) \right\} \\ q_0^*(0) = \alpha P_0, \quad q_k^*(0) \equiv 0 \quad (k \geq 1) \\ p_1^*(0) = \lambda P_0 + \int_0^{\infty} p_2^*(x) dF(x) + \int_0^{\infty} q_1^*(y) dG(y). \\ k \geq 2\text{-re:} \\ p_k^*(0) = \int_0^{\infty} q_k^*(y) dG(y) + \int_0^{\infty} p_{k+1}^*(x) dF(x). \end{array} \right.$$

Vezessük most be a

$$Q(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k^*(y) z^k, \quad P(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(x) z^k$$

generátorfüggvényeket. (5) és (6) alapján

$$\frac{\partial Q}{\partial y} + \lambda(1-z)Q = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda(1-z)P = 0,$$

következésképpen

$$(8) \quad Q(y, z) = Q(0, z)e^{-\lambda(1-z)y}, \quad P(x, z) = P(0, z)e^{-\lambda(1-z)x}.$$

A $Q(0, z)$ és $P(0, z)$ mennyiségeket a (7) peremfeltételekből határozhatjuk meg. Az alábbi eredményre jutunk:

$$Q(0, z) = \alpha P_0,$$

$$P(0, z) = \sum_1^{\infty} p_k^*(0) z^k = \lambda P_0 z +$$

$$+ \sum_1^{\infty} z^k \int_0^{\infty} q_k^*(y) dG(y) + \sum_1^{\infty} z^k \int_0^{\infty} p_{k+1}^*(x) dF(x) =$$

$$= \lambda P_0 z + \int_0^{\infty} [Q(y, z) - q_0^*(y)] dG(y) +$$

$$+ \frac{1}{z} \int_0^{\infty} [P(x, z) - p_1^*(x) z] dF(x) =$$

$$= \lambda P_0 z + \int_0^{\infty} Q(y, z) dG(y) + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} P(x, z) dF(x) -$$

$$- \int_0^{\infty} q_0^*(y) dG(y) - \int_0^{\infty} p_1^*(x) dF(x).$$

Innen (7) és (8) szerint

$$P(0, z) = P_0[\lambda(1-z) - \alpha] + \alpha P_0 \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)y} dG(y) + P_0(0, z) \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)x} dF(x),$$

azaz

$$P(0, z) = \frac{P_0 \{ \lambda(z-1) - \alpha [1 - \chi(\lambda(1-z))] \}}{1 - \frac{1}{z} \Phi[\lambda(1-z)]},$$

ahol

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su} dG(u), \quad \Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u).$$

Mármost könnyű bebizonyítani az alábbi tételt:

2. TÉTEL. Legyen $\varrho = \lambda\mu = \lambda \int_0^\infty x dF(x) < 1$, továbbá legyen a stacionárius üzemi-
tetés mellett;

P_k — annak a valószínűsége, hogy a készülék üzemképes és a rendszerben k
igény tartózkodik

Q_k — annak a valószínűsége, hogy a készülék javítás alatt van és a rendszerben
 k igény halmozódott fel ($k \geq 0$); végül legyen

$$R_k = P_k + Q_k.$$

Ekkor

$$(9) \quad P_0 = \frac{1 - \varrho}{1 + \alpha\beta}$$

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = P_0 \frac{\lambda(1-z)^2 \Phi[\lambda(1-z)] + z\alpha \{1 - \chi[\lambda(1-z)]\} \{1 - \Phi[\lambda(1-z)]\}}{\lambda(1-z) \{ \Phi[\lambda(1-z)] - z \}}$$

$$(11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = \alpha P_0 \frac{1 - \chi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)}.$$

Következésképpen a stacionárius rezsim mellett a rendszerben tartózkodó igények
számának generátorfüggvénye

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} R_k z^k = P_0 \frac{\{ \lambda(1-z) + \alpha(1 - \chi[\lambda(1-z)]) \} \Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda \{ \Phi[\lambda(1-z)] - z \}}.$$

Bizonyítás: (8) első felének felhasználásával (11) közvetlenül adódik a

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k = \int_0^\infty Q(y, z) [1 - G(y)] dy$$

előállításból. Ugyancsak, figyelembe véve (8) második felét,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k &= \int_0^{\infty} P(x, z) [1 - F(x)] dx = P(0, z) \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} [1 - F(x)] dx = \\ &= P(0, z) \frac{1 - \Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)},\end{aligned}$$

s (9)-re való tekintettel egyszerű átalakítások után kapjuk (10)-et. (9) a $\sum_0^{\infty} R_k = 1$ normálási feltételből adódik.

(12) felhasználható a rendszerben tartózkodó igények száma átlagértékének a meghatározásánál. Feltételezve, hogy a

$$\beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dG(x) \quad \text{és} \quad \mu_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x)$$

második momentumok végesek, véve (12) mindkét oldalának z szerinti deriváltját, majd a $z \rightarrow 1$ határátmenet elvégzése után kapjuk, hogy az említett várható érték,

$$(13) \quad M\mu(t) = \varrho + \frac{\alpha\lambda\beta_2}{2(1+\alpha\beta)} + \frac{\lambda^2\mu_2}{2(1-\varrho)}.$$

3. VÁRAKOZÁSI IDŐ. Ha a kiszolgálás — előbb érkezett előbb rendel — elv szerint történik, akkor a t pillanatban érkező személy $W(t)$ várakozási idejével kapcsolatosan az alábbi tétel áll fenn (lásd I. N. KOVALENKO [6] 60. old.):

3. TÉTEL. Bármilyen legyen is a $\gamma(t)$ folyamat kezdő állapota, a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{W(t) \leq x\} = V(x)$$

határfüggvény mindig létezik. $\varrho \geq 1$ mellett $V(x) \equiv 0$, míg $\varrho < 1$ esetén $V(x)$ valódi eloszlásfüggvény, melynek Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$\bar{V}(s) = \frac{\alpha(1-\varrho)}{(s+\alpha)(1+\alpha\beta)} + \Phi_1(s),$$

ahol

$$\Phi_1(s) = \frac{(1-\varrho) \{ \lambda[1-\Phi(s)] + \alpha[1-\chi(s)] \}}{\{s - \lambda[1-\Phi(s)]\} (1+\alpha\beta)}.$$

2. §. Az általános, az ü. b. tartalék folytonos csökkenésének esete

1. A következőkben szükségünk lesz az alábbi lemmára:

LEMMA. Legyenek ξ , η_i , $\delta_i^{(1)}$ ($i \geq 1$) kölcsönösen független nemnegatív valószínűségi változók

$$P\{\xi \leq x\} = F(x), \quad P\{\eta_i \leq x\} = H(x)$$

és

$$P\{\delta_i^{(1)} \leq x\} = G_1(x)$$

eloszlásfüggvényekkel. Értelmezzük a N és ξ változókat az alábbi módon:

$$(14) \quad N = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi < \eta_1 \\ n, & \text{ha } \sum_1^n \eta_i \leq \xi < \sum_1^{n+1} \eta_i \end{cases}$$

és

$$\xi = \begin{cases} \xi, & \text{ha } N=0 \\ (\eta_1 + \delta_1^{(1)}) + \dots + (\eta_n + \delta_n^{(1)}) + \left(\xi - \sum_1^n \eta_i \right) = \xi + \sum_1^n \delta_j^{(1)}, & \text{ha } N=n. \end{cases}$$

Ekkor

$$(15) \quad U(z) = P\{\xi \leq z\} = \int_0^z \sum_0^\infty P_n(x) G_1^{*(n)}(z-x) dF(x)$$

és $\operatorname{Re} p > \alpha > 0$ mellett

$$(16) \quad \int_0^\infty e^{-pz} dU(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s) \frac{1-\Psi(s)}{s[1-\Psi(s)\chi_1(s)]} ds,$$

ahol $P_n(x) = H^{*(n)} - H^{*(n+1)}(x)$, Φ , Ψ és χ_1 pedig megfelelően az F , H és G_1 eloszlások Laplace—Stieltjes-transzformáltjai.

Bizonyítás. (15) következik a

$$(17) \quad P\{N = n/\xi = x\} = \int_0^x [1 - H(x-y)] dH_{(y)}^{*(n)} = P_n(x)$$

és a

$$(18) \quad P\{\xi \leq z/\xi = x\} = \begin{cases} 0, & \text{ha } z < x \\ \sum_0^\infty P_n(x) P\left\{\sum_1^n \delta_j^{(1)} \leq z-x\right\} = \\ = \sum_0^\infty P_n(x) G_1^{*(n)}(z-x), & \text{ha } x \leq z \end{cases}$$

relációkból. Valóban, integrálva (18)-at $dF(x)$ szerint, kapjuk (15)-öt. (16) igazolásához tekintsük a

$$D_n(x) = \int_0^x P_n(u) dF(u) \quad \text{és} \quad \bar{D}_n(s) = \int_0^\infty e^{-su} dD_n(u)$$

mennyiségeket. Ekkor

$$\bar{D}_n(s) = \int_0^\infty e^{-su} P_n(u) dF(u),$$

majd a Laplace—Stieltjes-transzformáltakra vonatkozó ismert formula alapján nyerjük, hogy $\operatorname{Re} p > \alpha > 0$ mellett

$$\bar{D}_n(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Psi^n(s) - \Psi^{n+1}(s)}{s} \Phi(p-s) ds.$$

Minthogy pedig

$$\int_0^{\infty} e^{-pz} dU(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_1^n(p) \bar{D}_n(p),$$

ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pz} dU(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s) \frac{1-\psi(s)}{s} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(s) \chi_1^n(p) \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p-s) \frac{1-\psi(s)}{s[1-\psi(s)\chi_1(p)]} ds. \end{aligned}$$

Ezzel lemmánkat igazoltuk.

2. AZ ÁLTALÁNOS ESET VISSZAVEZETÉSE AZ ELŐBBI EGYSZERŰBBRE. Tekintsük most a bevezetésben szereplő a) és b) pontbeli feltételek által körülírt egycsatornás kiszolgáló rendszert. Most a kiszolgáló készülék ü. b. tartaléka a munkaperiódusok folyamán is csökken, s előfordulhat egy kiszolgálás alatt is a készülék meghibásodása. E pontban azt az esetet fogjuk tárgyalni, amikor egy ilyen meghibásodás következtében megszakadt kiszolgálás a javítási munka befejeződése után elsőbbséggel rendelkezve folytatódik. Továbbra is a rendszerben tartózkodó igények számának eloszlásával foglalkozunk. Az előző § eredményeinek felhasználásával könnyen meghatározható ez az eloszlás, csupán a kiszolgálási időt kell megfelelőképpen interpretálnunk. Éspedig, egy igény kiszolgálási idején azt az időtartamot kell értenünk, amelyet az igény a kiszolgálásának kezdetétől, annak teljes befejezéséig a rendszerben tölt. Tehát most a kiszolgálási időbe beszámítjuk azoknak a javításoknak az időtartamait is, amelyekre a szóban forgó igény kiszolgálása folyamán létrejött meghibásodások következtében volt szükség. Jelöljük most ezt az újabb értelemben vett kiszolgálási időt ζ -val. Világos, hogy

$$\zeta = \begin{cases} \xi, & \text{ha } N=0; \\ (\eta_1 + \delta_1^{(1)}) + \dots + (\eta_n + \delta_n^{(1)}) + \left(\xi - \sum_{j=1}^n \eta_j \right) = \xi + \sum_{j=1}^n \delta_j^{(1)}, & \text{ha } N=n, \end{cases}$$

ahol η_i -k a készülék foglaltsági periódusra vonatkozó élettartamai, $\delta_i^{(1)}$ -k a munka közben történt meghibásodások utáni javítási idők (megengedhető, hogy ezek és a szabad periódus alatt bekövetkező meghibásodások utáni javítási idők különböző eloszlással rendelkezzenek), N pedig az η_i -kkel és a közönséges értelemben vett ξ kiszolgálási idővel (13) alapján értelmezett nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Feltételezéseink, és az előző pontbeli lemma alapján

$$U(z) = P\{\zeta \leq z\} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} G_1^{*(n)}(z-x) \frac{(c\alpha x)^n}{n!} e^{-c\alpha x} dF(x)$$

és

$$(19) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sz} dU(z) = \Phi\{s + c\alpha[1 - \chi_1(s)]\},$$

ahol χ_1 a $\delta^{(1)}$ javítási idők közös G_1 eloszlásának Laplace—Stieltjes-transzformáltja. (19)-ből könnyen meghatározhatjuk az $M\zeta$ várható értékét. Véve a (19)-nek az $s=0$ helyhez tartozó deriváltját, kapjuk, hogy

$$(20) \quad M\zeta = -\varphi'(0) = -\Phi'(0)[1 - c\alpha\chi_1'(0)].$$

Mármost, ha az előző § mennyiségeit szükség szerint az új értelemben vett kiszolgálási időnek megfelelően módosítjuk, akkor a 2. tétel alapján a következő eredményre jutunk:

4. TÉTEL.

$$\varrho^* = -\lambda\Phi'(0)[1 - c\alpha\chi_1'(0)] = \varrho(1 + c\alpha\beta^{(1)}) < 1$$

mellett létezik a rendszerben tartózkodó igények számának stacionárius eloszlása, melynek generátorfüggvényét a

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^* z^k = \frac{1 - \varrho^*}{1 + \alpha\beta} \frac{\{\lambda(1-z) + \alpha(1 - \chi[\lambda(1-z)])\} \Phi[\lambda(1-z) + c\alpha(1 - \chi_1[\lambda(1-z)])]}{\lambda\{\Phi[\lambda(1-z) + c\alpha(1 - \chi_1[\lambda(1-z)])] - z\}}$$

formula szolgáltatja.

$$\text{A } \varrho^* < 1 \text{ és a } \beta_2 = \int_0^{\infty} x^2 dG(x), \mu_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x), \beta_2^{(1)} = \int_0^{\infty} x^2 dG_1(x) \text{ második}$$

momentumok létezése esetén meghatározható az R_k^* eloszlás várható értéke. Kapjuk, hogy

$$\sum_1^{\infty} nR_n^* = \varrho^* + \frac{\alpha\lambda\chi''(0)}{2(1 + \alpha\beta)} + \lambda^2 \frac{c\alpha\mu\beta_2^{(1)} + (1 + c\alpha\beta_1^{(1)})^2 \mu_2}{2(1 - \varrho^*)}.$$

A tárgyalt általános esetre vonatkozó várakozási idő eloszlása a 3. tétel alapján adható meg. Szükséges ugyan bizonyos mennyiségek módosítása, de az előzőkből világos, hogy milyeneknek is kell ezeknek lenniök.

3. §. Egy útkereszteződési probléma

Tekintsük két útvonal kereszteződését. Tételezzük fel, hogy az egyik útvonalon haladó járművek az útkereszteződésnél elsőbbséggel rendelkeznek a másik úton közlekedő járművek előtt. Ennélfogva a mellékútvonalon a kereszteződéshez érkező járművek sok esetben várakozni kénytelenek, s kialakul egy főútvonalon áthaladni óhajtó gépkocsik sora. Ha a főútvonalon kétirányú közlekedés van, és lehetséges a mellékútvonallról a főútvonal mindkét irányú forgalmába való bekapcsolódás, akkor a várakozó járműveket két sorba kell rendelnünk. Az egyikhez a jobb-, a másikhoz pedig a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek tartoznak. A főútvonalon csupán áthaladni szándékozó járműveket a balirányú forgalomra várakozókhoz sorolhatjuk. Mindvégig feltételezni fogjuk, hogy a mellékútvonalon csak egyirányú közlekedés van. Ellenkező esetben a probléma túlságosan bonyolódik. Célunk utalni arra, hogyan határozható meg az útkereszteződésnél kialakuló sor generátorfüggvénye. A további feltételezéseink a következők lesznek:

a) A főútvonalon haladó járművek karavánokat alkotnak. Az egyes karavánokban résztvevő gépkocsik számai v_i -k függetlenek s azonos $P\{v_i=k\}=p_k$ ($k \geq 1$) eloszlásúak. A járművek közti kötelező távolság b , következésképpen az i -edik karaván minden pillanatban $v_i b$ hosszú szakaszát foglalja le az útvonalnak. Az egyes karavánok közti hézagok η_i -k, független s azonos α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A járművek azonos sebességgel haladnak. Az általánosság megszorítása nélkül ezt a sebességet egységnyiinek választhatjuk. Ekkor az i -edik karaván az útkereszteződés előtt $v_i b$ idő alatt halad el.

b) A mellékútvonalon az útkereszteződéshez érkező járművek áramlatát λ paraméterű homogén Poisson-folyamattal közelítjük. Egy jármű a főútvonal jobb-irányú közlekedésébe a_1 idő alatt kapcsolódhat be, míg a balirányú beforduláshoz, avagy a főútvonal átszeléséhez a_2 idő szükséges.

Jelölje most megfelelően r_k és q_k annak a valószínűségét, hogy a jobb-, ill. a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek száma k . Feladatunk az $r(z) = \sum_1^{\infty} r_k z^k$ és a $q(z) = \sum_1^{\infty} q_k z^k$ generátorfüggvények meghatározása.

1. EGYIRÁNYÚ KÖZLEKEDÉS A FŐÚTVONALON. Ebben a pontban feltételezzük, hogy a főútvonalon csak egyirányú közlekedés van. A mellékútvonalról a kereszteződésen való áthaladás ideje többé-kevésbé megegyezik a főútvonal forgalmába való bekapcsolódás idejével. Ezért a továbbiakban mindig az utóbbitól fogunk beszélni. Feladatunk az $r(z)$ generátorfüggvény megkeresése, az előző §-ok eredményeinek felhasználásával oldható meg. Észrevehető ugyanis, hogy az útkereszteződés felfogható az általunk tárgyalt meghibásodható készülékű egycsatornás kiszolgáló rendszerként. A készülék meghibásodásaiként az útkereszteződésnek a főútvonalon haladó karavánok által történő elzárásait tekintjük. A javítási idők a karavánoknak a kereszteződésen való áthaladási idejei lesznek. A rendszerbe érkező igényeket a mellékútvonalról az útkereszteződéshez befutó járművek alkotják, s ezek kiszolgálási idői a főútvonalra való áttéréshez szükséges a_1 konstans időtartamok. Különbség az előző §-hoz képest csupán az, hogy most egy megszakadt kiszolgálás a megfelelő javítási idő lejárta után nem folytatódik, hanem előről kezdődik. Ugyanis, egy karavánnak az útkereszteződésen való áthaladása után csak az esetben fordulhat a főútvonalra egy jármű, ha a következő karaván a_1 -nél nagyobb idő múlva jelenik meg az útkereszteződésnél. Ha ez az idő viszont a_1 -nél kisebb, akkor a soronkövetkező várakozó jármű meg se kíséri a bekanyarodást. Meg kell változtatnunk tehát a 2. §-beli módosított kiszolgálási idő értelmét. Most a

$$\zeta^* = \begin{cases} a_1, & \text{ha } N=0 \\ \sum_1^n (\eta_i + \delta_i) + a_1, & \text{ha } N=n \end{cases}$$

mennyiséget kell a kiszolgálási időnek venni, ahol N olyan, hogy

$$\{N=n\} = \{\eta_i < a_1; i=1, 2, \dots, n, \eta_{n+1} \geq a_1\}.$$

Szükségünk lesz a ζ^* Laplace—Stieltjes-transzformáltjára, amelyet a következőképpen határozhatunk meg:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad Me^{-s\zeta^*} &= \sum_{n=0}^{\infty} M\{e^{-s\zeta^*}/N=n\}P\{N=n\} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sa_1} \chi^n(s) \left(\int_0^{a_1} e^{-su} \frac{\alpha e^{-su}}{1-e^{-\alpha a_1}} du \right)^n (1-e^{-\alpha a_1})^n e^{-\alpha a_1} = \\
 &= e^{-\alpha(s+a_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{s+\alpha} \chi^n(s) [1-e^{-\alpha(s+a_1)}]^n = \frac{e^{-\alpha(s+a_1)}}{1 - \frac{\alpha}{s+\alpha} \chi(s) [1-e^{-\alpha(s+a_1)}]}.
 \end{aligned}$$

Innen a szokásos úton nyerjük az

$$M\zeta^* = \frac{(1-e^{-\alpha a_1}) \left(-a_1 e^{-\alpha a_1} - \chi'(0) e^{-\alpha a_1} + \frac{1}{\alpha} \right)}{e^{-2\alpha a_1}}$$

várható értéket. Minthogy esetünkben $\delta_i = v_i b$, ezért $-\chi'(0) = bMv_i$ s a stacionárius rezsim bekövetkezik, ha

$$\lambda M\zeta^* = \lambda(e^{\alpha a_1} - 1) \left(bMv_i - a_1 + \frac{e^{\alpha a_1}}{\alpha} \right) < 1.$$

Mármint, ha a (12)-es formulában a Φ transzformáltat (21)-gyel helyettesítjük, megkapjuk az útkereszteződésnél várakozó járművek stacionárius esetre vonatkozó generátorfüggvényét. A sorbanálló gépkocsik átlagértékének meghatározása (13) alapján történhet. Itt most q -t $\lambda M\zeta^*$ -gal, β, β_2 -t $\beta^* = b \sum_1^{\infty} k p_k$ ill. $\beta_2^* = b^2 \sum_1^{\infty} k^2 p_k$ -val,

míg μ_2 -t $M\zeta^{*2}$ -tel kell helyettesíteni, ahol az utóbbi $M\zeta^{*2}$ (21) kétszeri differenciálása után, vagy annak levezetésénél alkalmazott eljárással nyerhető. Végül megjegyezzük még, hogy egy jármű várakozási idejével kapcsolatos karakterisztikák a megfelelő helyettesítések elvégzése után a 3. tétel alapján határozhatók meg.

2. KÉTIRÁNYÚ FORGALOM A FŐÚTVONALON. Amint már erről említést tettünk, a főútvonal kétirányú közlekedése esetén a mellékútvonalon várakozó járművek közt két sort kell megkülönböztetnünk. A jobbirányú bekanyarodásra várakozók számával kapcsolatos karakterisztikák megadása az előző pontban tárgyaltak alapján lehetséges. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a balirányú forgalomba bekapcsolódni szándékozó járművekről van szó. A különbség csupán az, hogy a balrakanyarodás általában ritkábban és rövidebb időtartamok alatt lehetséges. Világos, hogy az utóbbi időtartamok, tehát azok, amelyek folyamán esetleg lehetséges balrakanyarodás, 2α paraméterű exponenciális eloszlásúak. Kicsit nehezebb meghatározni azoknak az időszakaszoknak az eloszlástörvényét, amelyek folyamán az útkereszteződésnél balrakanyarodás nem lehetséges. Lényegében a következő problémával találjuk magunkat szemben.

Legyenek $\eta_i, \eta_i^*, \delta_i, \delta_i^* (i \geq 1)$ kölcsönösen független nemnegatív valószínűségi változók sorozatai

$$P\{\eta_i \leq x\} = P\{\eta_i^* \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$$

és

$$P\{\delta_i \leq x\} = P\{\delta_i^* \leq x\} = G(x)$$

eloszlásfüggvényekkel. Tekintsük ezeketán az $\{\eta_i + \delta_i\}$ és az $\{\eta_i^* + \delta_i^*\}$ változókkal értelmezett I , ill. I^* felújítási folyamatokat. $U(t)$ és $U^*(t)$ legyenek megfelelően az I , ill. az I^* folyamatokban a t ideig történt felújítások várható értékei. Értelmezzük továbbá a következő változókat:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } I \text{ folyamatban a } t \text{ időpont az } \eta_i \text{ változók valamelyi-} \\ & \text{kével van lefedve;} \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Hasonlóan értelmezzük az I^* folyamatnak megfelelő $\varepsilon^*(t)$ mennyiséget, majd legyen

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) \cdot \varepsilon^*(t).$$

Az így értelmezett $\tilde{\varepsilon}(t)$ időszakasonként hol 1, hol 0 értéket vesz fel ($\tilde{\varepsilon}(0) = 1$), s jelöljük ezeket az időtartamokat megfelelően $\tilde{\eta}_i$, ill. $\tilde{\delta}_i$ -sal. Világos, minthogy az $\eta_i, \eta_i^* (i \geq 1)$ változók exponenciális eloszlásúak, ezért $\tilde{\eta}_i$ eloszlása is exponenciális (pontosabban $P\{\tilde{\eta}_i \leq x\} = 1 - e^{-2\alpha x}$). Problématis viszont a $\tilde{\delta}_i$ eloszlástörvényének a megkeresése. Ez a következőképpen lehetséges:¹ Az $\{\tilde{\eta}_i + \tilde{\delta}_i\}$ változók sorozatával értelmezzük az $\tilde{I}$ felújítási folyamatot, $\tilde{U}(t)$ -vel jelöljük az e folyamatban a t ideig történt felújítások számának várható értékét. Vezessük még be a következő valószínűségeket:

$$p(t) = P\{\varepsilon(t) = 1\}, \quad p^*(t) = P\{\varepsilon^*(t) = 1\}$$

$$\tilde{p}(t) = P\{\tilde{\varepsilon}(t) = 1\}.$$

Ismeretes, hogy ezek a valószínűségek a megfelelő $U(t)$, $U^*(t)$ ill. $\tilde{U}(t)$ függvényekkel az alábbi módon függnek össze:

Először is

$$p(t) = p^*(t) \quad \text{és} \quad U(t) = U^*(t),$$

továbbá

$$(22) \quad p(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-x)} dU(x)$$

és

$$(23) \quad \tilde{p}(t) = \int_0^t e^{-2\alpha(t-x)} d\tilde{U}(x).$$

Minthogy pedig az I és I^* felújítási folyamatok függetlenek, ezért

$$(24) \quad \tilde{p}(t) = p(t)p^*(t) = p^2(t).$$

¹ Az itt vázolt eljárásra A. D. SZALAVJOV hívta fel a szerző figyelmét.

Áttérve most a Laplace-, ill. a Laplace—Stieltjes-transzformáltakra, a (24) összefüggés az $Me^{-s\delta_i}$ meghatározásánál a következőképpen használható fel: Legyenek

$$\begin{aligned}\chi(s) &= Me^{-s\delta_i}, & \Lambda(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dU(t), \\ \pi(s) &= \int_0^\infty p(t)e^{-st} dt, & \tilde{\chi}(s) &= Me^{-s\tilde{\delta}_i}, \\ \tilde{\Lambda}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} d\tilde{U}(t), & \tilde{\pi}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \tilde{p}(t) dt.\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \frac{\alpha\chi(s)}{s + \alpha[1 - \chi(s)]}, \\ \tilde{\Lambda}(s) &= \frac{2\alpha\tilde{\chi}(s)}{s + 2\alpha[1 - \tilde{\chi}(s)]}.\end{aligned}$$

Innen (22) és (23)-ra való tekintettel

$$\begin{aligned}\pi(s) &= \frac{\alpha}{s + \alpha} \chi(s) \frac{1}{s + \alpha[1 - \chi(s)]}, \\ (25) \quad \tilde{\pi}(s) &= \frac{2\alpha}{s + 2\alpha} \tilde{\chi}(s) \frac{1}{s + 2\alpha[1 - \tilde{\chi}(s)]}.\end{aligned}$$

Viszont (24)-ből kifolyólag tetszőleges $\text{Re } s > c > 0$ mellett

$$\tilde{\pi}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \pi(s-\sigma) \pi(\sigma) d\sigma,$$

s gyakorlatilag ennek és (25)-nek alapján $\tilde{\chi}(s)$ meghatározható.

Visszatérve most az eredeti problémánkhoz, ha η_i -k a jobbirányú, η_i^* -ok a balirányú közlekedésben haladó karavánok közti hézagokat, δ_i -k, ill. a δ_i^* -ok pedig a megfelelő karavánok által lefoglalt útszakaszokat jelentik, akkor $\tilde{\eta}_i$ -ok a balirányú bekanyarodásra alkalmas időszakaszokat, $\tilde{\delta}_i$ -ok pedig azokat az időperiódusok hosszait jelentik, amelyek folyamán a balirányú forgalomba való bekapcsolódás lehetetlen. Ezekután világos, hogy a fentebb vázolt módon megkeresve a $\tilde{\delta}_i$ Laplace—Stieltjes-transzformáltját, a q_k ($k=1, 2, 3, \dots$) eloszlással kapcsolatos karakteristikák a megfelelő behelyettesítések után könnyen adódnak.

Rövid példaként tekintsük a $p_1=1$ esetet. Ekkor

$$\begin{aligned}\chi(s) &= e^{-bs}, \\ (26) \quad \tilde{\chi}(s) &= \frac{(s+2\alpha)^2 \tilde{\pi}(s)}{2\alpha[1 + (2\alpha+s)\tilde{\pi}(s)]},\end{aligned}$$

ahol

$$\tilde{\pi}(s) = \frac{\alpha e^{-bs}}{(1 + \alpha\beta)(s + \alpha)[s + \alpha(1 - e^{-bs})]} - \frac{\alpha e^{-bs}}{e^{bs}(s + 2\alpha)[s + 2\alpha - \alpha e^{-b(s+\alpha)}]}.$$

(26)-nak megfelelő számú deriválása után, a balirányú bekanyarodásra várakozó járművek átlagértékére vonatkozó formulában szereplő összes mennyiségek minden nehézség nélkül kiszámíthatók.

IRODALOM

- [1] Tomkó J.: Tömegkiszolgálási problémákról, I. *MTA III. Oszt. Közleményei* **15** (1965), 289—312.
- [2] Севастьянов В. А.: Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. *Теор. вер. и ее примен.* **2** (1957), 106—116.
- [3] SCHMITH W. L.: Regenerative stochastic processes. *Proc. Roy. Soc. ser. A* **232** (1955), 6—31.
- [4] TAKÁCS L.: *Introduction to the Theory of Queues*. New York, Oxford University Press 1962.
- [5] THIRUNENGADAM K.: Queing with breakdowns. *Oper. Research* **11** (1963), 62—71.
- [6] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.: *Лекции по теории массового обслуживания*, Киев, 1963.
- [7] Марьянович Т. П.: Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором. *Укр. матем. ж.* **14** (1962), 417—422.

(Beérkezett: 1965. VI. 20.)