AZ EGYSÉGGÖMBÖT KITÖLTŐ KÖRRENDSZEREK KERÜLET- ÉS SUGÁRÖSSZEGÉNEK VIZSGÁLATA

Írta: LÁSZLÓ ZOLTÁN

A diszkrét geometria egyik alapvető kutatási területe a síkot kitöltő, vagy lefedő alakzatok extremális tulajdonságainak vizsgálata. Ezen belül viszonylag nagy területet ölelnek fel az euklideszi síkot kitöltő, illetve lefedő körrendszerekkel kapcsolatos vizsgálatok. Említsünk meg ezek közül egy, a továbbiak szempontjából fontos problémát. Legyen adva az euklideszi síkban egy véges zárt T tartomány. Mit tudunk mondani a tartományt kitöltő körök sugárösszegéről, és a maximális sugárösszeget adó körelhelyezésekről? FEJES TÓTH L. bebizonyította [1], hogy ha egy S területű konvex hatszögben elhelyezünk n egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kört, akkor

$$r_1 + \ldots + r_n \leqq \sqrt{\frac{nS}{\sqrt{12}}}.$$

A fenti egyenlőtlenség általában nem pontos, azonban kimutatható, hogy nagyszámú kör esetén, tetszőleges T tartományra is aszimptotikusan pontos. Ehhez csak THUE tételének [2] azon következményét kell ismerni: hogy ha d_n jelenti egy T területű végesben fekvő zárt tartomány n pontja közt fellépő minimális távolság maximumát, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, d_n = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Durván kifejezve ez azt jelenti, hogy nagy pontszám esetén a pontokat egy szabályos háromszögrács rácspontjaiba kell elhelyezni, hogy a minimális távolság maximális legyen.

A fenti két tételből még az is következik, hogy nagyszámú kör esetén egy véges T zárt tartományt kitöltő maximális sugárösszegű körrendszer „jól helyettesíthető" a T tartományt legsűrűbben kitöltő, ugyanazon számú kongruens körből álló körrendszerrel.

Ez a probléma az euklideszi síkban több irányban általánosítható [3], mi azonban az alapprobléma gömbi megfelelőjével fogunk foglalkozni, azzal a bővítéssel, hogy a sugárösszeg mellett a kerületösszeget is vizsgálni fogjuk. Természetesen ez utóbbi probléma az euklideszi síkban is felvethető, azonban a sugár és a kerület közötti egyenes arányosság miatt nem igényel önálló tárgyalást.

FEJES TÓTH L. még régebben bebizonyította a következő két tételt [4]:

Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló kongruens kör egy rendszere. Legyen egy kör kerülete k és a sugara r, akkor:

$$\text{(I)}\qquad k \leqq 2\pi \sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

illetve

$$\text{(II)}\qquad r \leqq \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}},$$

mely kifejezésekben egyenlőség csak $n=3, 4, 6, 12$ esetekben áll fenn.

Ugyancsak FEJES TÓTH L. vetette fel a következő problémát: milyen becslés érvényes a kerület-, és a sugárösszegre, ha a körök nem feltétlenül kongruensek? Pontosabban, kimondta a következő sejtést: az egységgömböt kitöltő tetszőleges sugarú körök kerület és sugárátlaga nem haladhatja meg az (I), illetve a (II) korlátot. Ez az első pillanatra meglepő sejtés lényegében azt mondja ki, hogy 3, 4, 6, 12 kör esetén kongruens körök a „legjobbak"; egyéb esetekben pedig a körök sugarainak megváltoztatásával nem javítható „túlságosan" a kerület- és a sugárösszeg.

A továbbiakban bebizonyítjuk a kerületösszegre vonatkozó sejtést, majd néhány megszorítás mellett foglalkozunk a sugárösszeg becslésével is. Bár vizsgálatainkat az egységsugarú gömbön végezzük, természetesen a kapott eredmények könnyen átvihetők tetszőleges sugarú gömbre is.

I. Az egységgömböt kitöltő körök kerületösszegének vizsgálata

1. TÉTEL: *Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló $k_1, \ldots, k_n$ kerületű kör, akkor*

$$\text{(1)}\qquad k_1+\ldots+k_n \leqq 2n\pi \sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

mely kifejezésben egyenlőség csak az $n=3, 4, 6, 12$ esetekben áll fenn.

Helyezzünk el ugyanis az egységsugarú gömbön n egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kört. Alkossuk meg a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét. Legyen az r_i sugarú kör cellájának területe T_i és oldalszáma p_i. Akkor az r_i sugarú kör köré írható p_i oldalú szabályos sokszög területe nyilván nem nagyobb T_i-nél, azaz:

$$T_i \geqq 2\pi - 2p_i \arcsin\left(\cos r_i \sin\frac{\pi}{p_i}\right).$$

Felhasználva a $k_i = 2\pi \sin r_i$ összefüggést, megfelelő átalakítással az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\text{(2)}\qquad T_i \geqq 2\pi\left[1-\frac{p_i}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{1-\left(\frac{k_i}{2\pi}\right)^2}\,\sin\frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

Bevezetve a $\frac{k_i}{2\pi} = x$, $\frac{\pi}{p_i} = y$ jelölést bebizonyítjuk, hogy a

$$T(x, y) = 1 - \frac{1}{y} \arcsin\left(\sqrt{1-x^2} \sin y\right)$$

függvény a

$$0 < y \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leqq x \leqq 1$$

tartományban konvex.

Számítsuk ki ehhez a szükséges parciális deriváltakat:

$$T_{xx} = \frac{1}{y} \sin y \frac{\cos^2 y + x^4 \sin^2 y}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}$$

$$T_{xy} = \frac{x(1-x^2)(\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}$$

$$T_{yy} = \frac{x^2(1-x^2) y^3 \sin y}{\left[\sqrt{(1-x^2)(\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)}\right]^3}.$$

A konvexitás feltétele $T_{xx} > 0$ miatt

$$T_{xx} T_{yy} - T_{xy}^2 \geqq 0,$$

azaz

$$\frac{x^2(1-x^2)^2 y^2 \sin^2 y (\cos^2 y + x^4 \sin^2 y)}{(1-x^2)^3 (\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)^3} -$$

$$- \frac{x^2(1-x^2)^2 (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)^2}{(1-x^2)^3 (\cos^2 y + x^2 \sin^2 y)^3} \geqq 0.$$

A nemnegatív tényezőket kiemelve és elhagyva igazolandó, hogy

$$f(x, y) = y^2 \sin^2 y (\cos^2 y + x^4 \sin^2 y) - (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y)^2 \geqq 0.$$

Ezt két lépésben láthatjuk be:

A) $f(x, y)$ függvény x-ben növekvő.

Ennek feltétele:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^2 \sin^4 y - 4x (\sin y \cos^2 y - y \cos y + x^2 \sin^3 y) \sin^3 y \geqq 0.$$

A nemnegatív tényezőket kiemelve elég belátni az

$$x^2 y^2 \sin y - \sin y \cos^2 y + y \cos y - x^2 \sin^3 y \geqq 0,$$

illetve az

$$x^2 y^2 \sin y \left[1 - \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\right] + y \cos y \left(1 - \frac{\sin y}{y} \cos y\right) \geqq 0$$

egyenlőtlenséget, mely az egyes tagok nemnegatív volta miatt nyilván teljesedik.

B) $f(x, y)$ függvény $x=0$ helyen nemnegatív, azaz:

$$f(0, y) = y^2 \sin^2 y \cos^2 y - \cos^2 y(\sin y \cos y - y)^2 \geqq 0.$$

Függvényünket megfelelően átalakítva, az

$$(y \sin y - \sin y \cos y + y)(y \sin y + \sin y \cos y - y) \geqq 0,$$

illetve az

$$\left[y \sin y + y\left(1 - \frac{\sin y}{y} \cos y\right)\right] (y \sin y + \sin y \cos y - y) \geqq 0$$

szorzat előjele vizsgálandó.

Mivel az első tényező nyilván nemnegatív, elegendő igazolni a

$$g(y) = y \sin y + \sin y \cos y - y \geqq 0$$

egyenlőtlenséget.

A $g(y)$ függvény folytonossága, valamint

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$g'(0) = 0 \quad \text{és} \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

miatt egyenlőtlenségünk igazolásához elegendő belátnunk, hogy $g'(y)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum belsejében csak egy helyen zérus. Vizsgáljuk meg ezért $g'(y)$ zérushelyeit:

$$\sin y + y \cos y - 2 \sin^2 y = 0,$$

vagy ami ezzel ekvivalens, keressük meg az

$$y = (2 \sin y - 1) \operatorname{tg} y.$$

egyenlet megoldásait.

A jobb oldalon álló $h(y) = (2 \sin y - 1) \operatorname{tg} y$ függvény a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban konvex, ugyanis a számláló zárójelezését figyelembe véve könnyen belátható, hogy

$$h''(y) = \frac{\cos^4 y + (2 - \cos^2 y - \sin y)}{\cos^3 y} > 0.$$

Viszont egy konvex függvénynek egy egyenessel legfeljebb két metszéspontja lehet, amelyikből esetünkben az egyik az $y=0$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $g'(y)$ függvénynek valóban csak egy zérushelye lehet az $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum belsejében. Az A) és B)-ben foglaltak együttvéve az $f(x, y) \geqq 0$ egyenlőtlenség igazolását jelentik.

Ezzel bebizonyítottuk a $T(x, y)$ függvény konvexitását a megadott intervallumban.

Térjünk vissza most a (2) egyenlőtlenség vizsgálatára. Összegezve azt $i=1, 2, \ldots, n$ esetén kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 4\pi \geqq 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{p_i}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{1-\left(\frac{k_i}{2\pi}\right)^2} \sin\frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

A jobb oldalt nyilván nem növeljük, ha alkalmazzuk rá a $T(x, y)$ függvény konvexitása miatt a *Jensen*-féle egyenlőtlenséget, azaz:

$$4\pi \geqq 2\pi n \left[1 - \frac{\bar{p}}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{1-\left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2} \sin\frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} \quad \text{és} \quad \bar{k} = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}.$$

Mivel a fenti kifejezés $\bar{p}$-ban csökkenő, így az ismert

$$\bar{p} \leqq 6 - \frac{12}{n}$$

Euler-féle egyenlőtlenséget alkalmazva

$$4\pi \geqq 2\pi n \left[1 - \frac{6(n-2)}{\pi n} \arcsin\left(\sqrt{1-\left(\frac{\bar{k}}{2\pi}\right)^2} \sin\frac{\pi n}{6(n-2)}\right)\right]$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ez pedig, amint arról elemi átalakításokkal könnyen meggyőződhetünk, ekvivalens a bizonyítandó (1) egyenlőtlenséggel. Pontosabban a $T(x, y)$ függvény konvexitási tartománya miatt egyelőre csak $r_i \leqq \frac{\pi}{2}$ kikötés mellett. Könnyen belátható azonban, hogy $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb sugarú kör esetén is érvényes a becslésünk, hiszen ilyen körrendszer esetén a kerületösszeg nyilván nő, ha a kérdéses kör sugarát $\frac{\pi}{2}$-re összehúzzuk.

Az (1) kifejezés nyitván csak akkor pontos korlát, ha a ΣT_i összeg becslésénél valamennyi lépésben egyenlőség áll fenn. Ez pedig csak akkor lehetséges, ha valamennyi cella egybevágó szabályos sokszög és valamennyi kör ezeket belülről érinti. Az *Euler*-féle egyenlőtlenséget is figyelembe véve ez csak $n=3, 4, 6, 12$ értékek esetén lehetséges. Mégpedig az első esetben három $\frac{\pi}{3}$ sugarú kört kell elhelyeznünk, a továbbiakban pedig az egységgömbbe írt szabályos tetraéder, oktaéder és ikozaéder csúcspontjaiba elhelyezett megfelelő sugarú körök esetén kapunk egyenlőséget.

Célszerű még megvizsgálni nagyszámú kör esetén a kerületösszeg aszimptotikus viselkedését. Az (1) egyenlőtlenség megfelelő átalakítása után egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ez a már idézett THUE tétel értelmében azt jelenti, hogy nagyszámú kör esetén a gömbön is nagyjából egyenlő sugarú és szabályos háromszögrács-jellegű körrendszerek adják a maximális kerületösszeget. Ez az önmagában is érdekes tény egyúttal megvilágítja FEJES TÓTH L. (I) és az általunk bebizonyított (1) egyenlőtlenség közötti hasonlóság mélyebb okát is.

Érdekes lenne megvizsgálni ezek után, hogy bizonyos meghatározott számú kör esetén, mely elrendezés adja a maximális kerületösszeget. Az eddigiek alapján a triviális $n=1, 2$ esetek mellett $n=3, 4, 6, 12$ és aszimptotikusan $n=\infty$ esetekben tudunk erre válaszolni. Nyitott probléma a maximális konfiguráció megkeresése $n=5, 7, \ldots$ számú kör esetén. Ez a vizsgálat azonban már egyenlő sugarú körök elhelyezése mellett is igen bonyolult és így túlnő e dolgozat keretein.

II. Egységgömböt kitöltő körök sugárösszegének vizsgálata

Bár a sugárösszeg vizsgálata egyszerűbb problémának látszik, gyakorlati szempontból is jobban hasznosíthatók a vele kapcsolatos eredmények, mégis meg kell elégednünk az előzőeknél valamivel kevesebbet mondó eredménnyel. Ennek fő oka az, hogy a módszerünkben lényeges szerepet játszó kétváltozós konvex függvény konvexitási tartománya a sugárösszeg esetében valamivel szűkebb.

2. TÉTEL: *Legyen adva az egységgömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kör.* Max $r_i \leqq 63{,}69°\ldots$ *esetén*

$$(1) \qquad r_1+\ldots+r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}},$$

mely kifejezésben egyenlőség csak $n=3, 4, 6, 12$ esetekben áll fenn.

Helyezzünk el ugyanis a gömbön n egymásba nem nyúló r_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sugarú kört és alkossuk meg ezen körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét. Legyen T_i az r_i sugarú kör cellájának területe és p_i ezen cella oldalszáma. T_i nyilvánvalóan nem kisebb, mint az r_i sugarú kör köré írható szabályos p_i oldalú sokszög területe, azaz:

$$(2) \qquad T_i \geqq 2\pi - 2p_i \arcsin\left(\cos r_i \sin\frac{\pi}{p_i}\right).$$

Kimutatjuk, hogy a

$$T(p, r) = 2\pi - 2p \arcsin\left(\cos r \sin\frac{\pi}{p}\right)$$

kétváltozós függvény a $p \geqq 3$, $r \leqq 63{,}69°\ldots$ tartományban konvex. A szükséges parciális deriváltakat kiszámítva kapjuk:

$$T_{pp} = \frac{\frac{2\pi^2}{p^3} \sin\frac{\pi}{p} \sin^2 r \cos r}{\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_{rr} = \frac{2p \sin\frac{\pi}{p} \cos^2\frac{\pi}{p} \cos r}{\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_{pr} = \frac{2 \sin r \left(\sin\frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{p} - \sin^3\frac{\pi}{p}\cos^2 r\right)}{\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{p}\cos^2 r\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mivel $T_{rr} > 0$, elegendő a konvexitáshoz a következő egyenlőtlenség teljesülése:

$$T_{pp}T_{rr} - T_{pr}^2 \geqq 0.$$

Azaz $\frac{\pi}{p} = u$, $0 < u \leqq \frac{\pi}{3}$ jelölést bevezetve igazolandó a

$$\frac{4u^2 \sin^2 u \cos^2 u \sin^2 r \cos^2 r}{(1 - \sin^2 u \cos^2 r)^3} - \frac{4 \sin^2 r (\sin u - u \cos u - \sin^3 u \cos^2 r)^2}{(1 - \sin^2 u \cos^2 r)^3} \geqq 0$$

egyenlőtlenség. A nemnegatív tényezőket kiemelve és elhagyva,

$$u^2 \sin^2 u \cos^2 u \cos^2 r - (\sin u - u \cos u - \sin^3 u \cos^2 r)^2 \geqq 0.$$

Azonos átalakítások elvégzésével kapjuk:

$$(u \sin u \cos u \cos r + \sin u - u \cos u - \sin^3 u \cos^2 u)\cdot$$
$$\cdot(u \sin u \cos u \cos r - \sin u + u \cos u + \sin^3 u \cos^2 u) \geqq 0$$
$$[-u \cos u(1 - \sin u \cos r) + \sin u(1 - \sin u \cos r)(1 + \sin u \cos r)]\cdot$$
$$\cdot[u \cos u(1 + \sin u \cos r) - \sin u(1 - \sin u \cos r)(1 + \sin u \cos r)] \geqq 0.$$

A pozitív tényezők kiemelése és elhagyása után marad:

$$(-u \cos u + \sin u + \sin^2 u \cos r)(u \cos u - \sin u + \sin^2 u \cos r) \geqq 0.$$

Az első tényező pozitív, ugyanis

$$-u \cos u + \sin u + \sin^2 u \cos r > -u \cos u + \sin u = \cos u(\operatorname{tg} u - u) > 0.$$

Marad még a második tényező vizsgálata:

$$u \cos u - \sin u + \sin u^2 \cos r \geqq 0,$$

vagy $\cos r$-re megoldva:

$$\cos r \geqq \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u}. \tag{3}$$

Először is lássuk be, hogy az

$$f(u) = \frac{\sin u - u \cos u}{\sin^2 u}$$

függvény a $0 < u \leqq \frac{\pi}{3}$ intervallumban növekvő.

Ennek feltétele:

$$f'(u) = \frac{u \sin^2 u - 3 \sin u \cos u + 2u \cos^2 u}{\sin^3 u} \geqq 0.$$

Ez pedig következik abból, hogy a

$$g(u) = u \sin^2 u - 3 \sin u \cos u + 2u \cos^2 u$$

függvényre

$$g(0) = 0$$

és

$$g'(u) = 3 \sin^2 u - 2u \sin u \cos u = 3 \sin u \cos u \left(\operatorname{tg} u - \frac{2}{3} u\right) \geqq 0.$$

Ezek szerint a (3) egyenlőtlenség, a jobb oldalon álló függvény növekvő volta miatt feltétlenül teljesedik, ha

$$\cos r \geqq \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = 0{,}4432\ldots,$$

vagyis $r \leqq 63{,}69°\ldots$, amit bizonyítani akartunk.

Visszatérve a (2) egyenlőtlenségre összegezzük azt $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 4\pi \geqq \sum_{i=1}^{n} \left[2\pi - 2p_i \arcsin \left(\cos r_i \sin \frac{\pi}{p_i}\right)\right].$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalát nem növeljük, ha alkalmazzuk rá a $T(p, r)$ függvény konvexitási tartományában a *Jensen*-féle egyenlőtlenséget, azaz

$$4\pi \geqq n \left[2\pi - 2\bar{p} \arcsin \left(\cos \bar{r} \sin \frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} \quad \text{és} \quad \bar{r} = \frac{r_1 + \ldots + r_n}{n}.$$

Mivel a fenti kifejezés $\bar{p}$-ban csökkenő, így az ismert

$$\bar{p} \leqq 6 - \frac{12}{n}.$$

Az *Euler*-féle egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$4\pi \geqq 2n\pi - 12(n-2) \arcsin \left(\cos \frac{\pi}{r} \sin \frac{\pi n}{6(n-2)} \right),$$

mely kifejezést megfelelően rendezve a bizonyítandó (1) egyenlőséget nyerjük egyenlőre $p_i \geqq 3$ kikötéssel.

A $T(p, r)$ függvény konvexitási tartományán belül a fenti kifejezésben egyenlőség nyilván csak abban az esetben áll fenn, ha valamennyi cella egybevágó szabályos sokszög, és valamennyi kör ezeket belülről érinti. Ez csak $n = 4$, 6, 12 értékek esetén lehetséges, amikor is az egyenlő sugarú körök középpontjai egy tetraéder, oktaéder, illetve egy ikozaéder csúcspontjaiban helyezkednek el.

Bár $p = 2$ esetén a $T(p, r)$ függvény nem konvex, mégis könnyen beláthatjuk, hogy az (1) egyenlőtlenség érvényben marad. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy ha van kétoldalú cella, akkor valamennyi az. Két kör cellarendszere nyilván kétoldalú. Ha most egy harmadik kör középpontja rajta van az előző két kör középpontja által meghatározott főkörön, akkor e három kör cellarendszere is kétoldalú cellákból áll. Ellenkező esetben az új hatványvonalak valamennyi cellát határuk belső pontján fogják metszeni és így azok háromoldalúak lesznek. Ebből a gondolatmenetből már következik akárhány körre az állításunk.

Ha viszont van kétoldalú cella, azaz valamennyi kör középpontja egy főkörre esik, akkor a maximális sugárösszeg nyilván π. Ez $n = 3$ esetén éppen megegyezik az (1) által adott korláttal:

$$3 \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{3\pi}{6}} = 3 \arccos \frac{1}{2} = \pi,$$

$n > 3$ esetén viszont a sugárösszeg a korlát alatt marad. Ezzel tételünk valamennyi állítását bebizonyítottuk.

A kerületösszeg aszimptotikus tulajdonságának vizsgálatához hasonlóan itt is belátható, hogy nagyszámú kör esetén nagyjából egyenlősugarú szabályos háromszögrács-jellegű körrendszer adja a maximális sugárösszeget. Ez ismét THUE tételéből és a következő könnyen kiszámolható határértékből következik:

$$\lim_{n \to \infty} 2\sqrt{n} \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy nagyszámú kör esetén nem lehet a körök sugara túl nagy. Ezek után érthető az a törekvés, hogy az (1) egyenlőtlenség érvényességét, legalábbis bizonyos számú körtől kezdve $r_i > 63{,}69°\ldots$ sugarú körökre is kimutassuk. Az egységsugarú gömbön $r_i > 63{,}69°\ldots$ sugarú kört legfeljebb kettőt lehet elhelyezni. Foglalkozzunk először azzal az esettel, ha körrendszerünkben egy „nagy” kör van.

1) Legyen $r_1 > 63{,}69°\ldots$, valamint $r_2, \ldots, r_n \leqq 63{,}69°\ldots$ sugarú kör. *Bebizonyítjuk, hogy* $n \geqq 9$ *esetén:*

$$r_1 + \ldots + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{4}$$

Készítsük el most is a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét, majd az $r_2, \ldots, r_n$ körök celláira vonatkozó egyenlőtlenségeket összegezzük a már ismertetett módon, akkor kapjuk, hogy

$$4\pi - T_1 \geqq 2(n-1)\left[\pi - \bar{p} \arccos\left(\cos \bar{r} \sin \frac{\pi}{\bar{p}}\right)\right],$$

ahol

$$\bar{p} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} p_i, \quad \text{illetve} \quad \bar{r} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} r_i.$$

Az *Euler*-féle összefüggésből számoljuk ki $\bar{p}$-t,

$$p_1 + (n-1)\bar{p} \leqq 6n - 12,$$

azaz

$$\bar{p} \leqq \frac{6n - 12 - p_1}{n-1}.$$

Ezt felhasználva és az így kapott egyenlőtlenséget rendezve,

$$\sum_{i=2}^{n} r_i \leqq (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n-3) + \dfrac{T_1}{2}}{6n - 12 - p_1}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n - 12 - p_1}}.$$

Vagyis bizonyítandó, hogy

$$r_1 + (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n-3) + \dfrac{T_1}{2}}{6n - 12 - p_1}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n - 12 - p_1}} \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \dfrac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{5}$$

A bal oldalt nyilván növeljük, ha az r_1 kör celláját körnek vesszük, és p_1 helyébe 3-mat írunk, azaz vizsgáljuk a továbbiakban $r_1 = r$ jelölést alkalmazva a

$$r + (n-1) \arccos \frac{\sin \dfrac{\pi(n - 2 - \cos r)}{6n - 15}}{\sin \dfrac{\pi(n-1)}{6n - 15}} \leqq n \arccos \frac{1}{2 \sin \dfrac{\pi n}{6(n-2)}} \tag{6}$$

egyenlőtlenséget.

A) Kimutatjuk, hogy $r \geqq 60$ és $n \geqq 9$ esetén a (6) egyenlőtlenség bal oldala r-nek monoton csökkenő függvénye.

Ehhez azt kell kimutatni, bevezetve az

$$\alpha = \frac{\pi(n-2-\cos r)}{6n-15},$$

$$\beta = \frac{\pi(n-1)}{6n-15}$$

jelöléseket, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}}\,\frac{\pi(n-1)}{6n-15}\sin r \geqq 1.$$

Felhasználva a

$$\sin^2\beta-\sin^2\alpha = \frac{\pi(1+\cos r)}{6n-15}\sin 2\xi$$

$$\alpha<\xi<\beta$$

összefüggést, egyenlőtlenségünk a következőképpen módosul:

$$\frac{\pi\cos\alpha}{\sqrt{\pi(1+\cos r)\sin 2\xi}}\,\frac{n-1}{\sqrt{6n-15}}\sin r \geqq 1.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \beta$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\alpha = \lim_{n\to\infty}\beta = \frac{\pi}{6}$$

monoton csökkenőleg, valamint

$$\frac{n-1}{\sqrt{6n-15}} \geqq 1$$

és monoton növekvő $n \geqq 4$ esetén.

Ezek figyelembevételével és az egyes tényezőket megfelelően becsülve következik állításunk.

B) Kimutatjuk, hogy $n \geqq 9$ és $r=\frac{\pi}{3}$ esetén az (5) egyenlőtlenség teljesedik, azaz

$$\text{(7)}\qquad \frac{\pi}{3}+(n-1)\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-1)}{6n-15}} \leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-1)}{6(n-2)}}.$$

Az egyenlőtlenséget megfelelően átrendezve

$$n\left(\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}-\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}}\right)\geqq\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}},$$

majd a bal oldalra a *Lagrange*-féle középértéktételt kétszer alkalmazva kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}\,\frac{\cos\xi_2}{\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}}\,\frac{\pi(n-4)n}{24(n-2)(n-2{,}5)}\geqq$$

$$\geqq\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-1}},$$

ahol

$$\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}<\xi_1<\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi(n-1)}{6n-15}},$$

illetve

$$\frac{\pi(n-1)}{6n-15}<\xi_2<\frac{\pi n}{6(n-2)}.$$

Egyenlőtlenségünk teljesedése elég nagy n esetén nyilvánvaló, mert a bal oldal első tényezőjének határértéke végtelen, míg a másik két tényező határértéke zérusnál nagyobb véges szám, a jobb oldal viszont korlátos. Becsüljük meg ezen n küszöbszám értékét azáltal, hogy egyenlőtlenségünket megfelelő irányú átalakításokkal egyszerűbb alakra hozzuk. Felhasználva a ξ_1 és ξ_2-re kapott korlátokat, valamint azt, hogy $n\geqq 10$ esetén

$$\frac{(n-4)n}{(n-2)(n-2,5)}\geqq 1,$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}}}\;\frac{\cos\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}{\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}\;\frac{\pi}{24}\geqq\frac{\pi}{3},$$

illetve rendezés után,

$$\frac{1}{\sqrt{4\sin^2\dfrac{\pi n}{6(n-2)}-1}}\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{6(n-2)}\geqq 4.$$

Bevezetve a

$$v=\frac{\pi n}{6(n-2)}$$

jelölést és rendezve az egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{ctg} v}{\sqrt{4\sin^2 v-1}} \geqq 4,$$

azaz a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$64\sin^4 v-15\sin^2 v-1\leqq 0.$$

Ezt megoldva

$$v\leqq 32{,}49^\circ\ldots$$

azaz

$$n\geqq 27$$

adódik.

Ezután a még megmaradó véges számú

$$9\leqq n<27$$

értékekre numerikusan meggyőződhetünk a (7) egyenlőtlenség teljesedéséről. Az A) és B) rész együtt a (6) egyenlőtlenség igazolását, az pedig a (4)-ben foglaltak bizonyítását jelenti.

Végül vizsgáljuk meg két „nagy kör" esetén a helyzetet.

2. Legyen $r_1, r_2\geqq 63{,}69^\circ\ldots$ valamint $r_3, \ldots, r_n\leqq 63{,}69^\circ\ldots$ sugarú kör. *Bebizonyítjuk, hogy* $n\geqq 8$ *esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}. \tag{8}$$

Elkészítve a körök *Dirichlet*-féle cellarendszerét, majd az $r_3, \ldots, r_n$ körök celláira vonatkozó egyenlőtlenségeket összegezve, és az előzőekhez hasonló átalakításokat elvégezve bizonyítandó, hogy

$$r_1+r_2+(n-2)\arccos\frac{\sin\dfrac{\pi(n-4)+\dfrac{T_1}{2}+\dfrac{T_2}{2}}{6n-12-p_1-p_2}}{\sin\dfrac{\pi(n-2)}{6n-12-p_1-p_2}}\leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}},$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát nyilván növeljük, ha T_1 és T_2 cellát körnek tekintjük, illetve $p_1=p_2=3$ helyettesítést alkalmazzuk, azaz elegendő az alábbi állítást igazolni:

$$r_1+r_2+(n-2)\arccos\frac{\sin\dfrac{\pi(n-2-\cos r_1-\cos r_2)}{6(n-3)}}{\sin\dfrac{\pi(n-2)}{6(n-3)}}\leqq \tag{9}$$

$$\leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

A) Kimutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldala $r_1 \geqq 60°$ és $n \geqq 8$ esetén r_1-nek monoton csökkenő függvénye. (Természetesen akkor r_2-nek is.) A deriválást elvégezve és a *Lagrange*-féle középértéktételt alkalmazva igazolandó, hogy

$$\frac{\cos\alpha \sin r_1}{\sqrt{\pi(\cos r_1 + \cos r_2)\sin 2\xi}} \frac{(n-2)\pi}{\sqrt{6(n-3)}} \geqq 1,$$

ahol

$$\alpha = \frac{\pi(n-2-\cos r_1 - \cos r_2)}{6(n+3)}$$

és

$$\alpha \leqq \xi \leqq \frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}.$$

Felhasználva, hogy $n \geqq 6$ esetén

$$30° < \alpha \leqq 40°$$

valamint, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 30° \quad \text{monoton csökkenően,}$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{\sqrt{n-3}} = \infty \quad \text{monoton növekvően,}$$

az egyes tényezőket megfelelően becsülve egyszerű számítással adódik állításunk.

B) Igazoljuk, hogy $r_1 = r_2 = 60°$, valamint $n \geqq 8$ esetén teljesedik a (9) egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{2\pi}{3} + (n-2)\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}} \leqq n \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget megfelelően átrendezve igazolandó, hogy

$$n\left[\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-2)}} - \arccos\frac{1}{\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}}\right] \geqq \frac{2\pi}{3} - \arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}}.$$

A *Lagrange*-féle középértéktétel kétszeres alkalmazásával alakítsuk át a bal oldalt:

$$\frac{\cos\xi_2}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \frac{\pi}{6\sin\alpha\sin\beta} \frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)} \geqq \frac{2\pi}{3} - 2\arccos\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}},$$

ahol

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{6(n-3)}} < \xi_1 < \frac{1}{2\sin\frac{\pi n}{6(n-3)}}$$

$$\beta = \frac{\pi n}{6(n-2)} < \xi_2 < \frac{\pi(n-2)}{6(n-3)} = \alpha.$$

Egyenlőtlenségünk két oldalán megfelelő irányú átalakításokat elvégezve elegendő belátni, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\sin^2\alpha}}}\cdot\frac{1}{6\sin^2\alpha}\geqq\frac{2}{3}.$$

Ezt megoldva $\alpha\leqq 36{,}91°\ldots$, illetve $n\geqq 8$ adódik.

Az A) és B) rész együtt a (8) állításunk teljesedését jelenti.

Figyelembe véve a (4) és (8)-ban bizonyítottakat, eredeti tételünk valamivel élesebb módosítását is kimondhatjuk:

3. TÉTEL: *Helyezzünk el az egységsugarú gömbön $n\geqq 9$ egymásba nem nyúló $r_1, \ldots, r_n$ sugarú kört, akkor*

$$r_1+\ldots+r_n\leqq n\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi n}{6(n-2)}}.$$

Bár majdnem biztos, hogy $n<9$ esetekben sem javíthat a sugárösszegen egy vagy két „nagy" kör, azért óvatosnak kell lennünk. A triviális $n=1, 2$ esetektől eltekitve $n=3$ esetben láttuk, hogy a maximális sugárösszeget három olyan érintkező kör adja, melynek középpontja egy főkörre esik, méghozzá a sugaruktól függetlenül. Így $n=3$ esetén valamelyik kör sugarának növelése nem ront szükségszerűen a sugárösszegen. Legbiztosabb módszer e kérdés eldöntésére természetesen az lenne, ha $n=4, 5, 6, 7, 8$ esetekben megtalálnánk a maximális sugárösszeget adó körelhelyezést. Ez $n=4$ és $n=6$ esetén várhatólag az előző fejezetben már szerepelt szabályos tetraéder, illetve oktaéder elrendezés lesz, $n=5$ esetén pedig bizonyos szimmetrikus elrendezések szélsőértékeit vizsgálva valószínűleg három $\frac{\pi}{3}$ és két $\frac{\pi}{6}$ sugarú körből álló körrendszer az optimális. Ezt a sejtést az is indokolja, hogy az így kapott 240°-os sugárösszeg igen jól közelíti az (1) egyenlőtlenségből származó 246,3°...-os korlátot. Végül szeretném még megjegyezni, hogy érdemes lenne a dolgozatban tárgyalt problémát gömbsüveg esetére is megvizsgálni. Ez az önmagában is érdekes probléma megoldása azért is hasznos lenne, mert főleg kisszámú kör esetén a még hiányzó esetek elintézését jelentené.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani FEJES TÓTH LÁSZLÓ professzor úrnak, akinek a témán kívül sok értékes tanácsot is köszönhetek, valamint RAPCSÁK ANDRÁS professzor úrnak, aki dolgozatom átnézésével és hasznos megjegyzéseivel nagyban segítette munkámat.

IRODALOM

[1] L. FEJES TÓTH, Some packing and covering theorems, *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12** A (1950), 65—67.

[2] A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352—353.

[3] ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ, Pontok elhelyezése egy tartományban, *MTA III. Oszt. Közl.* **2** (1956).

[4] L. FEJES TÓTH, *Langerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum,* Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

(Beérkezett: 1965. V. 30.)

UNTERSUCHUNG DER UMFANG- UND RADIUSSUMME BEZÜGLICH DER DIE EINHEITSKUGEL AUSFÜLLENDEN KREISE

Z. LÁSZLÓ

Zusammenfassung

Der Verfasser beweisst — als Verallgemeinerungen zwei Sätze von FEJES TÓTH — die folgenden Sätze:

SATZ **1.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 3$ nicht übereinandergreifende Kreise mit Umfangen: $k_i, \ldots, k_n$ gegeben, dann

$$k_1 + \ldots + k_n \leqq 2n\pi \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi n}{6(n-2)}}},$$

wo Gleichheit nur im Falle von $n = 3, 4, 6, 12$ gilt.

SATZ **2.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 3$ nicht übereinandergreifende Kreise mit Radien $r_1, \ldots, r_n$ gegeben. Wenn $\max r_i \leqq 63{,}69°$

$$r_1 + \ldots + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin \frac{\pi n}{6(n-2)}},$$

wo Gleichheit nur im Falle von $n = 3, 4, 6, 12$ gilt.

SATZ **3.** Es seien auf der Einheitskugel $n \geqq 9$ nicht übereinandergreifende Kreise, dann

$$r_1 + \ldots + r_n \leqq n \arccos \frac{1}{2\sin \frac{\pi n}{6(n-2)}}.$$