# A KONSTRUKTÍV FÜGGVÉNYTAN EGY ÚJABB IRÁNYÁRÓL*

Írta: SZÜSZ PÉTER és TURÁN PÁL

A „lineáris"-nak nevezhető konstruktív függvénytan talán legáltalánosabb értelmes fogalmazása a következő. Legyen $R$ egy metrikus tér,

(1) $$\Phi: \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots$$

az $R$-en értelmezett pl. valós értékű függvények fix sorrendű sorozata, $A$ az $R$-en értelmezett $f(x)$ függvények egy osztálya. Legyenek „$n$-edfokú $\Phi$-polinomok" a

(2) $$\Pi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

alakú függvények, ahol a $c_\nu$-k valós állandók. Ekkor az $(R, A, \Phi)$-konstruktív függvénytan az $R$-en értelmezett $A$-osztályba tartozó függvénynek funkcionális tulajdonságait kapcsolja össze $\Phi$-polinomokkal való approximálhatósági tulajdonságokkal. Ha az $A$-osztály az $R$-en folytonos függvények osztálya, akkor a *Weierstrass—Stone* tétel igen általános $\Phi$-rendszerekre adja meg a kívánt kapcsolatot. Ezen túl azonban főleg azon eseteket vizsgálták, amikor $R$ egy véges $I$ intervallum vagy a $K$ egységkörvonal vagy az egységkörlap; mikoris a $\Phi$-rendszer $x$-hatványaiból, ill. a trigonometrikus rendszerből áll. Ezen elméletek főeredményei S. BERNSTEIN nevéhez fűződnek. Egy karakterisztikus tétele, mely egy $0<\alpha<1$-gyel a $K$-n Lip $\alpha$-feltételt kielégítő $f(\vartheta)$ függvények $\mathrm{Lip}_\alpha(K)$-osztályára vonatkozik, a következő.

Ha a fenti osztály függvényeit $0 \leqq \vartheta' < \vartheta'' < 2\pi$-re

(3) $$|f(\vartheta') - f(\vartheta'')| \leqq |\vartheta' - \vartheta''|^\alpha\text{-val}$$

normáljuk, akkor ezen funkcionális viselkedés — kissé pongyola fogalmazással — ekvivalens az

(4) $$\inf_{\tau_n} n^\alpha \max_{\vartheta} |f(\vartheta) - \tau_n(\vartheta)| \leqq c = c(\alpha)$$

approximálhatósági tulajdonsággal. Itt $\tau_n(\vartheta)$ az $n$-edrendű trigonometrikus polinomokat futja be.

A (3)$\to$(4)-típusú implikáció jelentősége a numerikus analízisre nyilvánvaló; jelentősége pl. a következő általános jellegű megjegyzéssel is illusztrálható. Ha az ismeretlen $f(\vartheta)$ függvény pl. egy „vad" differenciálegyenlettel van értelmezve, akkor

* Az 1965. március 25-i felolvasóülésen tartott előadás.

a benne szereplő együtthatófüggvényeket jól approximáló $m$-edfokú polinomokkal helyettesítve az

(5) $$A_m(f) = B_m(f)$$

alakba írható, ahol $B_m(f)$-ben az ismeretlen függvény deriváltjai csak kis abszolútértékű faktorokkal vannak szorozva és $A_m(f)$-ben csak $m$-edfokú polinomegyütthatók lépnek fel. Ekkor (5)-öt $n=1, 2, \ldots$-re az $A_{m_n}(f_n) = B_{m_n}(f_{n-1})$ ($f_0(x)$ „sima", az $m_n$-ek *alkalmas* egészek) iteráció-sorozattal helyettesítve a konvergencia-bizonyítás bizonyos esetekben keresztülvihető (ami (5)-re exisztenciabizonyítást jelent). A $(4) \to (3)$ implikáció jelentőségét a következőképpen illusztrálhatjuk. Ha egy függvényegyenlet egy megoldását pl. egy iterációs processzus után egy polinomsor alakjában kapjuk meg, melynek $n$-edik maradékösszege a sor alakból felülről becsülhető, akkor ebből a megoldó függvény simasági tulajdonságaira, pl. analiticitására következtethetünk. Mivel pl. differenciálegyenleteket *Banach*-terekben is kezdenek vizsgálni, általánosabb terek konstruktív függvénytana is mind aktuálisabbá válik.

Hogy még e legjobban kianalizált konstruktív függvénytanokban is milyen alapfeladatok tisztázatlanok még, mutatja pl. a sorrend-probléma. Ez röviden azt kérdezi, hogy egy adott $A$-függvényosztályra nézve az

(6) $$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

sorozat sorrendje „a természetes"-e? Egy fokkal világosabban, ha a (6) sorrend helyett az

(7) $$1 \equiv x^{k_0}, x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots$$

sorrendet vesszük, tehát „$n$-edfokú polinom" alatt *pillanatnyilag* nem a

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$$

kifejezést, hanem a

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{k_\nu}$$

formulát értve, igaz-e *a*) egy fix $n$-re, *b*) minden $n \geqq 1$-re

(8) $$\sup_{f \in A} \min_{a_\nu} \max_{[-1,+1]} \left| f - \sum_{0}^{n} a_\nu x^\nu \right| < \sup_{f \in A} \min_{a_\nu} \max_{[-1,+1]} \left| f - \sum_{0}^{n} a_\nu x^{k_\nu} \right|.$$

Ha $A$ pl. a $[-1, +1]$-ben *páros* folytonos függvények osztálya, akkor (6) helyett az

$$(1, x^2, x^4, x^6, \ldots)$$

sorozatot véve és ebben az $x^{2\nu-1}$ tagokat „ritkán" elhelyezve (8) nem áll. Valószínű azonban, hogy az $A$-függvényosztály megfelelő értelmezése mellett a (6) sorrend „a természetes". Ezek, amennyire tudjuk, újszerű kérdések a klasszikus konstruktív függvénytanban is.

Bár a végtelen intervallumra vonatkozólag a polinomapproximáció elmélete lényegileg a *Weierstrass*-tétel súlyfüggvényes kiterjesztésénél tart csak, a 0-hoz tartó súlyfüggvény nyilván elengedhetetlen. Kézenfekvő gondolat volt a véges és végtelen köz esetei közötti különbséget azzal elmosni, hogy polinomapproximáció helyett racionális törtfüggvényekkel való approximációt tekintünk. Valóban régóta ismert tény, hogy akár véges, akár végtelen közön adott folytonos $f(x)$ (végtelen köz esetén $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$ megszorítással) törtfüggvénnyel egyenletesen approximálható. A racionális függvényre vonatkozó konstruktív függvénytan a polinomokéhoz képest további figyelemre méltó különbségeket mutat. Ha $p_n(x)$, $q_m(x)$ valóban $n$-ed, ill. $m$-edfokú polinomokat jelentenek, értelmezzük az $r(x)$ racionális törtfüggvény fokát, midőn $(p_n(x), q_m(x))=1$ és

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \tag{9}$$

természetszerűleg a

$$\operatorname{gr} r = \max(m, n) \tag{10}$$

által. Mármost, míg a $\Phi$-polinomok általános esetében fennáll a

$$\operatorname{gr}(\Pi_1+\Pi_2) \leqq \max(\operatorname{gr}\Pi_1, \operatorname{gr}\Pi_2)$$

egyenlőtlenség, addig ez racionális törtfüggvény esetén nem igaz, mint pl. azt az

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+2}$$

törtfüggvény mutatja. Továbbá a racionális törtfüggvények ugyan lényegileg előállíthatók volnának az

$$\frac{x^k}{a_0+a_1x+\ldots+a_lx^l} \qquad (k, l \geqq 0 \text{ egész})$$

alakú bázissorozat lineár-kombinációiként, ahol az $a_\nu$ együtthatók akárcsak racionális számok volnának, de ezek minden bizonnyal semmilyen olyan ésszerű sorrendbe nem foglalhatók, amelytől remélni lehetne, hogy egy értelmes függvényosztály függvényeinek approximálhatósága az első $n$ darab által jobb lesz a közönséges sorrendű polinom-approximálhatóságnál. Ezek és továbbiak miatt a racionális törtfüggvények szolgáltatják a legegyszerűbb példáját a nemlineárisnak nevezett konstruktív függvénytannak. Így tehát a törtfüggvények konstruktív függvénytanának mind gyakorlati, mind elméleti érdekessége is van; előbbit aláhúzza az a tény is, hogy a törtfüggvények értékkiszámítási problémái a polinomokéival azonosak. Ez lesz a címben említett új irány.

Mennyiben tekinthető ezen konstruktív függvénytan újnak? Hiszen már Csebisev foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy egy előírt, $[-1, +1]$-ben folytonos $f(x)$ és előírt nemnegatív egész $m$ és $n$ mellett mely

$$r_n^*(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

törtfüggvényre lesz

$$\max_{[-1,+1]} \left| f(x) - \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \right|$$

minimális. Megmutatta, hogy létezik lényegileg egyetlen $r_n^*(x)$, mely minimizál és ezt oszcilláció-tulajdonsággal karakterizálni tudta. De ezen alapon $r_n^*(x)$ explicit meghatározása még fix speciális függvényekre és m, n-értékekre is ritkán sikerül és függvény*osztályok*ra még a polinomok konstruktív függvénytanában sem igen használatos. De vajon vizsgálták-e más módszerekkel a törtfüggvényekkel való approximálhatóság kérdését egyes nevezetes függvényosztályokra? A felelet erre az, hogy ilyen vizsgálatok történtek, de negatív eredménnyel. Hogy egy karakterisztikus példát említsünk, tekintsük az $E=[-1, +1]$ szakaszon, egy rögzített $0<\alpha<1$-gyel azon $f(x)$ függvények halmazát, melyekre $-1 \leqq x' < x'' \leqq +1$-re az

$$|f(x'')-f(x')| \leqq (x''-x')^{\alpha} \tag{11}$$

egyenlőtlenség áll fenn; e függvényosztály, a „$\mathrm{Lip}_\alpha(E)$-osztály 1-konstanssal" próbaköve szokott lenni ilyen vizsgálatoknak. S. BERNSTEIN előbb említett tételéből könnyen következik, hogy ha $f(x)$ a $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$ osztályba esik, akkor $-1 \leqq x \leqq 1$-ben alkalmas $\pi_n^*(x)$ $n$-edfokú racionális polinommal

$$|f(x)-\pi_n^*(x)| \leqq \frac{c_1(\alpha)}{n^\alpha}; \tag{12}$$

a fordított tételről és az egésznek DZJADIKtól származó kiegészítéséről most nincs érkezésünk szólni. BERNSTEIN azt is megmutatta, hogy (12) nem javítható az $n$-edfokú polinomok körében; példájának kis módosításával igazolható, mint azt D. NEWMAN megjegyezte, hogy (12) lényegileg nem javítható még akkor sem, ha legjeljebb $n$-edfokú racionális törtfüggvénnyel approximálunk. Pontosabban az igazolható, hogy ha $T_m(x)$ az $m$-edik *Csebisev*-polinom, akkor az

$$f_0(x) = c_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!^\alpha} T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right) \tag{13}$$

alkalmas pozitív numerikus $c_2$-vel osztályunkhoz tartozik és minden legfeljebb $n$-edfokú $r_n(x)$ racionális törtfüggvényre $n > n_0$-ra

$$\max_{x\in E} |f_0(x)-r_n(x)| > \frac{1}{n^\alpha \log^3 n}. \tag{14}$$

Hogy $f_0(x)$ osztályunkhoz tartozik, vagyis

$$|f_0(x+h)-f_0(x)|$$

felső becsléséhez, elég azt

$$\left|\sum_{m\leqq k} + \sum_{m>k}\right|$$

alakba írni, ahol $k$ a

$$k! \leqq \frac{1}{h} < (k+1)!$$

egyenlőtlenséggel van egyértelműen értelmezve, és utóbbit

$$\left|T_m\left(\frac{1}{2}y\right)\right| \leqq 1, \qquad y\in E$$

által, előbbit

$$\left|T_m\left(\frac{1}{2}y_1\right)-T_m\left(\frac{1}{2}y_2\right)\right| \leqq c_3\, m\,|y_1-y_2|,$$

$$-1 \leqq y_1 < y_2 \leqq +1$$

által becsülni. (14) igazolására, ha az $l$-index

$$(l-2)! \leqq n < (l-1)!$$

által van definiálva, írjuk $(f_0(x)-r_n(x))$-et

$$\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m!^\alpha}T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right)-r_n(x)\right)+\frac{T_{l!}\left(\frac{1}{2}x\right)}{l!^\alpha}+\sum_{m=l+1}^{\infty} m!^{-\alpha}T_{m!}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

alakba. Az utolsó összeg $E$-ben abszolúte

$$\leqq \frac{2}{(l+1)!^\alpha}.$$

A zárójeles összeg racionális törtfüggvény, melynek foka

$$\leqq n+(l-1)! < 2(l-1)!$$

tehát legfeljebb ennyi jelváltása van $E$-ben. Viszont, mivel

$$T_m\left(\frac{1}{2}x\right)=\pm 1, \quad x=2\cos\vartheta, \quad \cos m\vartheta=\pm 1,$$

$$\vartheta=\frac{v\pi}{m}, \quad x_v=2\cos\frac{v\pi}{m}, \quad \frac{m}{3}\leqq v\leqq\frac{2m}{3},$$

tehát a középső tag az $\frac{1}{3}l!$ számú $x_v$ helyen váltakozva $\pm 1$; mivel pedig

$$2(l-1)! < \frac{1}{3}\,l!$$

ha $n$ elég nagy, van olyan egész $\mu$, hogy $\frac{1}{3}l! \leqq \mu \leqq \frac{2}{3}l!$ legyen és

$$\operatorname{sign}\frac{T_{l!}(x_\mu)}{l!^\alpha}=\operatorname{sign}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m!^\alpha}T_{m!}\left(\frac{x}{2}\right)-r_n(x)\right)_{x=x_\mu},$$

azaz

$$|f_0(x_\mu)-r_n(x_\mu)| \geqq \frac{1}{l!^\alpha}-\frac{2}{(l+1)!^\alpha} > \frac{1}{2}\frac{1}{l!^\alpha} > \frac{1}{2l^2}\cdot\frac{1}{(l-2)!^\alpha} > \frac{1}{2l^2}\cdot n^{-\alpha} > \frac{1}{n^\alpha\log^3 n}$$

valóban (sőt növekvő $n$-nel ezek egyre sűrűbben vannak).

Ennek és további negatív eredményeknek tükrében — egyesekről később szólunk — úgy látszott, az a vélemény alakul ki, hogy az $n$-edfokú törtfüggvény nagyban és egészben „értelmes" függvényosztály esetén csak olyan egyenletes approximációra képes, mint a $(2n+1)$-edfokú polinom, tehát ugyanolyan nagyságrendeket ad, esetleg jobb állandókkal vagy legfeljebb logaritmus-hatvány szorzóval. Ezt a véleményt hangoztatta múlt szeptemberben MERGELJAN Londonban egy magánbeszélgetésben, lényegében ezt a véleményt írta le D. NEWMAN múlt márciusban megjelent értekezésében, melyben pedig a dolog kulcsa a kezében volt. E dolgozatban az $|x|$ függvénynek $E$-ben való racionális approximációjával foglalkozik. Az $|x|$ függvény szerepe a polinomok konstruktív függvénytanában jól ismert; *polinom*-approximálhatóságából általános függvényosztályokra vonatkozó tételek származtathatók. Régóta ismert, hogy alkalmas $\pi_n^*(x)$-szel $E$-ben

$$\big||x|-\pi_n^*(x)\big| \leqq \frac{c_n}{n}. \tag{15}$$

BERNSTEIN megmutatta, hogy ez lényegileg nem javítható, mert alkalmas $c_5$-tel minden $\pi_n(x)$-re

$$\max_{x\in E}\big||x|-\pi_n(x)\big| > \frac{c_5}{n}.$$

Mármost *Newman* azt a meglepő tényt találta, hogy alkalmas $r_n^*(x)$-szel $E$-ben

$$\big||x|-r_n^*(x)\big| \leqq e^{-\sqrt{n}} \tag{16}$$

és ez bizonyos mértékben „közel legjobb", amennyiben minden $n$-re

$$\max_{x\in E}\big||x|-r_n(x)\big| \geqq \frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Kézenfekvő kérdés, miért maradt meg mégis a speciális $E$-függvénynél és tekintette meglepő tételét e speciális függvényhez szabott elszigetelt jelenségnek (ez kitűnik dolgozatából) és nem próbált a polinom-approximációnál használt átmeneti elvvel általános tételekhez jutni. Nyilván azért, mert ha az ismert módon lehetne, akkor a $\mathrm{Lip}_\alpha\,(E)$-osztályra alkalmazva olyan erős approximációs tételt nyert volna, ami az előbb közölt ellenpélda miatt nem is igaz.

Fennmarad viszont a kérdés, nem lehet-e mégis olyan klasszikus függvény-*osztály*okat találni, melyek $n$-edfokú törtfüggvénnyel *lényegesen jobb nagyságrendben* approximálhatók, mint $n$-edfokú polinommal? Ilyenek megtalálása az eddig ismert eredmények negatív volta miatt ad létjogosultságot annak, hogy új irányról beszélhessünk, mely talán pozitív irányzatnak nevezhető. Az első függvényosztály, melyre *pozitív* választ tudtunk adni, volt az $E$-ben konvex függvények $K$ osztálya. Erre kimutattuk, hogy ha $\varepsilon>0$ tetszőleges kicsi és $f\in K$, akkor van oly $c=c(f,\varepsilon)$ állandó, hogy $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$-ban alkalmas $r_n^*(x)$ törtfüggvénnyel

$$|f(x)-r_n^*(x)| < \frac{c(f,\varepsilon)\log^4 n}{n^2}. \tag{18}$$

Tájékozódásul megjegyezzük egyrészt, hogy $|x|\in K$ és így a $K$-osztály függvényei $n$-edfokú polinommal $\frac{1}{n}$-nél jobb nagyságrendben nem approximálhatóak. Másrészt az

$$f_1(x) = cx^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!^2}T_{m!}\left(\frac{x}{2}\right)$$

példája elég nagy pozitív $c$-vel mutatja az előbbivel analóg módon, hogy $f_1 \in K$ és tetszőleges $r_n(x)$ $n$-edfokú törtfüggvényre

$$\max_{x \in E} |f_1(x) - r_n(x)| > \frac{c_6}{n^2 \log^2 n},$$

ami azt mutatja, hogy a (18) alatti tétel nem sokat javítható. Ezen forma ellen az a kifogás vethető fel, hogy nem világos $c(f, \varepsilon)$ függésének módja $f$-től és $\varepsilon$-tól. A bizonyítás azonban valójában megmutatja, hogy $c(f, \varepsilon)$ helyettesíthető volna egy *explicit* $c_7(D)$-vel $[-1, +1]$-ben, hacsak $-1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$-re

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqq D$$

(tehát a konvexitás követelménye *mellett*).

Általánosabban megmutattuk, hogyha egy egész $l \geqq 0$-re $f(x)$ első $l$ deriváltja $E$-ben mindenütt létezik és $f^{(l)}(x)$ konvex itt, akkor tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-ra $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban alkalmas, legfeljebb $n$-edfokú $r_n^*(x)$-szel és $c_8(f, \varepsilon)$-nal

$$|f(x) - r_n^*(x)| < c_8(f, \varepsilon) \frac{\log^4 n}{n^{l+2}}. \tag{19}$$

Előbbi tétel nyilván $l=0$-val áll elő. Ismét, (19) hamissá válik, ha az $(l+2)$ kitevőt $(l+2+\delta)$-val helyettesítjük; a logaritmikus faktor viszont valószínűleg elhagyható. Tájékozódásul megjegyezzük, hogy e függvényosztályra az $n$-edfokú *polinommal* való approximálhatóság rendje csak $O\left(\frac{1}{n^{l+1}}\right)$.

Bár ezek a tételek máris megmutatják, hogy jelentős függvény*osztályok*ra az $n$-edfokú racionális törtfüggvényekkel való approximáció „*egy* nagyságrenddel" jobb lehet, mint a polinom-approximáció, mégsem adnak felvilágosítást a „*Newman*-jelenség"-ről, tehát arról, hogy az $|x|$-függvény legjobb $n$-edfokú racionális tört-approximációja miért *annyi*val jobb, mint az $n$-edfokú polinom-approximáció. Pontosabban szólva két kérdésről van szó.

a) Ténylegesen izolált tény-e ez, vagy létezik olyan $|x|$-et tartalmazó érdemleges függvény*osztály*, amelynél a racionális törtfüggvényekkel való approximáció „sok nagyságrenddel" jobb a polinom-approximációnál?

b) Ha ilyen *osztály* van, mi az oka annak, hogy a racionális approximáció annyival jobb, mint a polinom-approximáció? Mi az oka annak, hogy *egyáltalán* tud jobb lenni?

Az a) kérdésre a választ egy teljesen klasszikus függvényosztály, az $E$-ben folytonos és szakaszonként analitikus függvények $B$ osztálya adja meg. Pontosabban, legyen

$$-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = +1, \tag{20}$$

és legyen $\nu = 1, \ldots, k$-ra az $a_{\nu-1} \leqq x \leqq a_\nu$ közben

$$f(x) = \varphi_\nu(x), \tag{21}$$

ahol $\varphi_\nu(x)$ analitikus az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ zárt szakaszon; persze $\nu=1, 2, \ldots, (k-1)$-re álljon fenn a

$$\lim_{x\to a_\nu-0} \varphi_\nu(x) = \lim_{x=a_\nu+0} \varphi_{\nu+1}(x) \tag{22}$$

reláció. Az $f(x)=|x|$ függvény nyilván ezen $B$-hez tartozik, és mint már megjegyeztük, nem approximálható $n$-edfokú polinommal még $o\left(\frac{1}{n}\right)$-nyire sem. Ezzel szemben a következő tételt mondjuk ki.

*Ha $f\in B$, akkor megfelelő $r_n^*(x)$ n-edfokú racionális törtfüggvényre E-ben az*

$$|f(x)-r_n^*(x)| < e^{-c_9(f)\sqrt{n}} \tag{23}$$

*approximáció érhető el.*

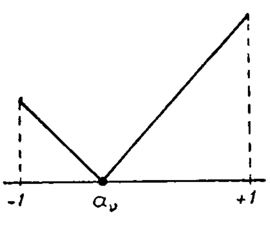
A $B$-függvényosztály tehát $n$-edfokú racionális törtfüggvénnyel „sok nagyságrenddel jobban" approximálható, mint $n$-edfokú polinomokkal. (17) mutatja, hogy (23) tovább már nem javítható. A $c_9(f)$ állandó az egész osztályra univerzálisan megadható; ez csak

$$\min_{\nu=0,1,\ldots,k-1} (a_{\nu+1}-a_\nu)$$

-től és az $\varphi_\nu(z)$ függvények regularitás-ellipsziseinek minimális kistengelyétől függ.

Nézzük a tétel bizonyításának vázlatát. Ha $n$ adott, legyen $N=N(n)$ és $m=m(n)$, amelyeket később fogunk optimálisan megválasztani. Először is *Newman* konstrukciójának kis módosításával alkalmas $N$-edfokú $\varrho_{N,\nu}(x)$ $N$-edfokú törtfüggvénnyel $E$-ben $\nu=1, 2, \ldots, (k-1)$-re

$$\big||x-a_\nu|-\varrho_{N,\nu}(x)\big| < e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}}. \tag{24}$$



*1. ábra*

Ebből nem nehéz átmenni azon $G_\nu(x)$ függvények racionális approximációjára, melyek

$$G_\nu(x) = \begin{cases} (x-a_{\nu-1})(a_\nu-x) & \text{ha} \quad a_{\nu-1}\leqq x\leqq a_\nu \\ 0 & \text{másutt} \end{cases} \tag{25}$$

által vannak értelmezve $\nu=1, 2, \ldots, k$-ra. Alkalmas $h_{N,\nu}(x)$ $N$-edfokú törtfüggvénnyel előbbiekből $E$-ben az

$$|G_\nu(x)-h_{N,\nu}(x)| < 4e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}}$$

egyenlőtlenség adódik, sőt, bevezetve az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ közre normált $T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu)$ *Csebisev*-polinomokat, nyerjük, hogy

$$|G_\nu(x)T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu)-h_{N,\nu}(x)T_l(a, a_{\nu-1}, a_\nu)| \leqq c_{10}e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}+c_{11}l}. \tag{26}$$

Figyeljük meg, hogy (26)-ban a törtfüggvény nevezője független $l$-től!

Lényeges szerepet játszik a $B$-beli $f(x)$-nek egy egyszerűen igazolható előállítása $E$-ben. Ez pedig az előbbi $G_\nu(x)$-ekkel

$$f(x) = b+dx+\sum_{\nu=1}^{k-1} e_\nu|x-a_\nu| + \sum_{\nu=1}^{k} \psi_\nu(x)G_\nu(x), \tag{27}$$

ahol $b$, $d$ és $e_\nu$ $f(x)$-szel meg vannak határozva és a $\psi_\nu(x)$ függvények a $\varphi_\nu(x)$-ekkel egyszerűen összefüggő függvények, melyek analitikusak $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-ben.

Ezekután a bizonyítás a következőképp fejezhető be. Mivel $\psi_\nu(x)$ analitikus $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-ben, alkalmas $m$-edfokú polinommal és $0<\vartheta_\nu<1$-gyel itt egyenletesen approximálható $\vartheta_\nu^m$ pontossággal; ezen approximáló polinomot mindjárt az $[a_{\nu-1}, a_\nu]$-re vonatkozó *Csebisev*-polinomok szerint célszerű előállítani. Ebben $T_l(x, a_{\nu-1}, a_\nu)$-nek $\alpha_{\nu l}$ együtthatója, kis észrevétel után, abszolút értékben majorálható $\vartheta_\nu^l$-lel. Ekkor a (27) előállítására (24) és (26) alkalmazható; így adódik, hogy $E$-ben

$$\left| f(x)-\pi_1(x)-\sum_{\nu=1}^{k-1} e_\nu r^*_{N,\nu}(x)-\sum_{\nu=1}^{l}\sum_{l=0}^{m}\alpha_{\nu l}\frac{\pi_{N+l,\nu,l}(x)}{\pi^*_{N,\nu}(x)}\right| <$$

$$< c_{12}\left(\vartheta^m+e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}+c_{11}m}\right) \stackrel{\text{def}}{=} U,$$

ahol

$$0<\vartheta=\max(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)<1.$$

Ebből összevonva $\pi_1$-et az első összeggel, valamint a kettős összegben tekintve a nevező $l$-től való függetlenségét,

$$\left| f(x)-\frac{\pi_{(k-1)N+1}}{\pi_{(k-1)N}}-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\pi_{m+N,\nu}(x)}{\pi_{N,\nu}(x)}\right| < U,$$

illetőleg

$$\left| f-\frac{\pi_{(k-1)N+1}}{\pi_{(k-1)N}}-\frac{\pi_{kN+m}}{\pi_{kN}}\right| < U,$$

vagyis

$$\left| f-\frac{\pi_{(2k-1)N+m}}{\pi_{(2k-1)N}}\right| < U,$$

és végül

(28) $$|f(x)-r^*_{(2k-1)N+m}(x)| < c_{12}\left(\vartheta^m+e^{-\frac{1}{5}\sqrt{N}+c_{11}m}\right)$$

következik.

Most már megválaszthatjuk $m$-et és $N$-et. Először is szükséges a fokszám követelmény miatt a

(29) $$(2k-1)N+m \leqq n$$

egyenlőtlenség, azután (28) második tagja miatt

(30) $$c_{11}m<\frac{1}{10}\sqrt{N}.$$

Ekkor pedig az

$$N=\left[\frac{n}{4k}\right], \quad m=\left[\frac{1}{10(c_{11}+1)}\sqrt{\frac{n}{4k}}\right]$$

választással (29) és (30) teljesül, és ekkor automatikusan (28) jobb oldalának első tagjában

$$\vartheta^m < e^{-c_{13}(f)\sqrt{n}},$$

amivel a vázlatos bizonyítást be is fejeztük. Tételeink pontos bizonyítását egy, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének folyóiratában közlendő cikksorozat tartalmazza majd.

Az a) kérdésre tehát válaszoltunk. A b) kérdésre válaszolandó, tekintsük azokat a törtfüggvényeket, amelyeket *Newman* az $|x|$ közelítésére talált. Ha

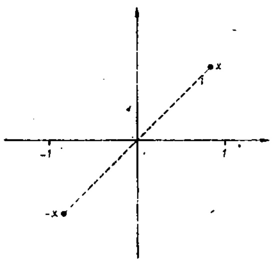
$$q_n(x) = \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(x+e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}\right),$$

akkor ezen törtfüggvény

$$x\,\frac{q_n(x)-q_n(-x)}{q_n(x)+q_n(-x)}.$$

Nézzük e törtfüggvény pólusait. Ezekre

$$H(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}+x}{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}-x} = -1. \tag{31}$$



*2. ábra*

Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy ha $x$ nincs a képzetes tengelyen, akkor $|H(x)| \neq 1$, tehát a keresett pólusok

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}+iy}{e^{-\frac{\nu}{\sqrt{n}}}-iy} = -1$$

*valós* gyökei (melyek 0-ra szimmetrikusak). Ezek közül a pozitívak nyilván azonosak a

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{arc\,tg}\left(y e^{\frac{\nu}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{(2j-1)\pi}{2} \qquad \left(\operatorname{arc\,tg}\ 0 \text{ és } \frac{\pi}{2} \text{ között}\right) \tag{32}$$

egyenlet pozitív gyökeivel. Mivel a bal oldal $y$-nal monoton nő, $y = \frac{\pi}{4n} e^{-\sqrt{n}}$ -re

$$< y \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{\nu}{\sqrt{n}}} = y \frac{e^{\sqrt{n}}-1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1} < yne^{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2},$$

és ugyanakkor $y=\sqrt{n}e^{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$-re

$$>\operatorname{arc\,tg}\sqrt{n}+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)>\frac{\pi}{2},$$

minden $n>10$-re, tehát $j=1$-re van egy $x_0=iy_0$ pólus, ahol

$$\frac{\pi}{4n}e^{-\sqrt{n}}\leqq y_0\leqq 2\sqrt{n}e^{-\sqrt{n}}.$$

Tehát annak ellenére, hogy a szóban forgó törtfüggvény $|x|$-et $E$-ben igen jól approximálja, e szakaszhoz nagyon közeli pólusai vannak. Milyen konzekvenciával jár ez? A fennálló viszonyokat leegyszerűsítve már a

(33) $$g(x)=\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\qquad(\varepsilon>0,\ \text{tetszőlegesen kicsi})$$

másodfokú törtfüggvény is jól illusztrálja. Nyilván

$$\max_{x\in E}|g(x)|=1,$$

és

$$\max_{x\in E}|g'(x)|=\frac{1}{4\varepsilon},$$

ami $\frac{1}{\varepsilon}$-nal együtt tetszőleges nagy lehet. Ezzel szemben $n$-edfokú polinom abszolút maximumát megkötve, *Markov* tétele szerint már a derivált abszolút maximuma meg van kötve. Tehát úgy látszik, annak a jelenségnek az oka, hogy egyáltalán egy függvényosztályra a törtfüggvényes approximáció jobb tud lenni, mint a polinom-approximáció, az, hogy a törtfüggvényeket *Markov*-típusú tétel nem-létezése hajlékonyabbakká teszi, mint a polinomokat. De akkor hogyan van az, hogy a $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$-osztálynál a törtfüggvények sem adnak lényegesen jobb approximációt? Előbbiekből sejthető — a (33) példánál szemmel láthatólag ez az eset —, hogy a törtfüggvények hajlékonyságának megvannak a határai, éspedig abban az értelemben, hogy a derivált „nagy" csupán „kis" halmazon lehet. Ha ez így volna, akkor elképzelhető a jelenség magyarázatául az, hogy azon pontok halmaza a (13) függvénynél, melyeknél a törtfüggvényeknek „nagyon hajlékonynak" kellene lennie, *túl* nagy. Ezt az elképzelést némileg alátámasztja E. P. DOLZENKO szovjet matematikusnak az a szép tétele, amelyet 1961-ben publikált a *Dokladi*ban és amely szerint, ha $r_n(x)$ adott $n$-edfokú törtfüggvény és adott pozitív $M$ mellett $H$ a valós tengely azon $x$-einek halmaza, amelyekre

$$|r_n(x)|\leqq M,$$

akkor tetszőleges kis pozitív $\delta$ mellett egy legfeljebb $\delta$ összhosszúságú $H_1$ intervallum halmaz kivételével $(H-H_1)$-en

$$|r_n'(x)|\leqq 4\frac{n}{\delta}M.$$

Előbbiek természetszerűleg vezetnek a szóban forgó pozitív irányzat további problémáihoz és illusztrálják, milyen módon lehet pl. további olyan függvényosztályokhoz jutni, melyekre a racionális törtfüggvények jobb közelítési nagyságrendet adnak a polinomoknál. Az első általános problémát talán egy példával világítjuk meg. Legyen $0<\alpha<\beta\leqq 1$ és $E_1$ egy alkalmas részhalmaza $E$-nek. Milyen lehet $E_1$, ha a $\mathrm{Lip}_\alpha(E)$-osztály függvényeinek azon alosztálya, mely $(E-E_1)$-en $\beta$-kitevős *Lipschitz*-feltételt teljesít, $n$-edfokú racionális törtfüggvénnyel még $E$-ben egyenletesen $O(n^{-\beta})$-nyira approximálható? Vázlatos bizonyításunk van arra, hogy ha $f$ folytonos és véges sok $\mathrm{Lip}_\beta$-hoz tartozó ívre esik szét, akkor egyenletesen $O(n^{-\beta})$-nyira approximálható $E$-ben, (pontosabban $(a_{\nu-1}, a_\nu)$-ben $f(x)=\varphi_\nu(x)$-el, ahol az $a_{\nu-1}+\varepsilon\leqq x\leqq a_\nu-\varepsilon$ közben $|\varphi_\nu(x')-\varphi_\nu(x'')|\leqq c(\varepsilon)|x'-x''|^\beta$, de $[-1,+1]$-ben egyenletesen $|f(x')-f(x'')|\leqq c|x'-x''|)^\alpha$. Általánosabban, ha egy $B$-függvényosztály függvényei $n$-edfokú *polinomokkal* egyenletesen $\varepsilon(n)$-rendben approximálhatók, hogyan jellemezhetők azon $E_1$-részhalmazok, melyeken való „elromlás" mellett a bővebb $A$-osztály függvényei $n$-edfokú *tört*függvénnyel $E$-n egyenletesen $\varepsilon(n)$-nyire approximálhatók maradnak? *(I. problémakör.)*

Ugyanezen kérdéskör egy másik speciális formája a következő. FREUD GÉZA egy régebbi tétele speciális esetben azt mondja, hogy ha $f(x)$ $E$-ben konvex, akkor alkalmas $n$-edfokú $\pi_n^*(x)$ polinommal az

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-\pi_n^*(x)|\,dx<\frac{c_{14}(f)}{n^2}$$

egyenlőtlenség áll fenn. Egybevetve ezt (18) alatti tételünkkel, az a lehetőség vetődik fel, hogy az előbbi $E_1$-halmazok kutatása helyett a „helyes" kérdésfeltevés talán az, hogy

$$\sup_A \min_{r_n} \max_{x\in E}|f(x)-r_n(x)|$$

értékét

$$\sup_A \min_{\pi_n} \int_{-1}^{+1}|f-\pi_n(x)|\,dx$$

értékével kell egybevetni. Ezen vizsgálataink, éppúgy, mint az előző formára vonatkozók, a kezdet kezdetén állanak. *(II. problémakör.)*

A törtfüggvények konstruktív függvénytanának korábbi, mondhatni balszerencsés alakulása egy további kérdéscsoporttal is összefügg. Az előbb mondottak szerint az első balszerencse a „direkt" problémáknál merült fel, amikoris a felmerült függvényosztályoknál a racionális approximáció nem vezetett jobb nagyságrendű egyenletes közelítésre, mint a polinomos, pedig alkalmazás szempontjából ez volna talán a legfontosabb. A második balszerencse abból következett, hogy az inverz problémákkal az előbbivel egyidejűleg kezdtek el foglalkozni. Itt ugyanis, mint azt KIS OTTÓ közlése szerint GONCSAR szovjet matemetikus megmutatta, a helyzet az *eredeti* problémafelvetés szempontjából teljesen reménytelen, amennyiben tetszőlegesen gyorsan 0-hoz tartó $\varepsilon_n$- és tetszőlegesen lassan 0-hoz tartó $\eta_n$-sorozatok előírása mellett található olyan $E$-ben folytonos $f(x)$ és a racionális törtfüggvényeknek olyan sorozata, hogy $E$-ben

$$|f(x)-r_n(x)|\leqq\varepsilon_n$$

és $f(x)$-nek $\frac{1}{n}$ -hosszú közre vonatkozó folytonossági modulusa $\geqq \eta_n$. E tétel már nem olyan meglepő, ha meggondoljuk, hogy $f(x) = \frac{1}{x}$, mint *függvény*, nem is folytonos, pedig önmagával mint $n$-edfokú törtfüggvénnyel, 0-hibával approximálható; várható, hogy az $x=0$-nál levő pólust egyre kevesebbel eltolva a valós tengelytől a kapott függvényekből összeállítható kívánt tulajdonságú *folytonos* is. Ez tényleg így is van. E hiányosságot GONČSAR olyan eredményei, melyek egyike szerint abból, hogy alkalmas $r_n^*(x)$ sorozattal $[-1, +1]$-ben egy fix $\varepsilon > 0$-val

$$|f(x) - r_n^*(x)| \leqq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

következik, hogy $f(x)$ majdnem mindenütt deriválható, nem teljesen pótolják. Közelebb áll DOLZENKO azon 1962-es tétele, mely szerint, ha $\Sigma\varepsilon_\nu < \infty$, $\varepsilon_\nu > 0$ és $E$-n $|f - r_n^*| < \varepsilon_n$, akkor $f$ abszolút folytonos. A *Newmann*-féle törtfüggvények pólusainak előbb mondott tanulmányozása azt sejteti, hogy az ez irányú szisztematikus pozitív eredmények olyanok lesznek, hogy a racionális approximáció rendje, kombinálva a közelítő törtfüggvények pólusainak $E$-től való minimális távolságával vagy eloszlásával, enged meg majd következtetést a függvény struktúrájára *kivételes halmaz nélkül (III. problémakör)*. Ez irányú vizsgálataink is a kezdet kezdetén vannak.

(Beérkezett: 1965. VI. 5.)