A MATEMATIKAI MODELLEZÉS ÉS AZ ELEKTRONIKUS SZÁMOLÓGÉPEK ALKALMAZÁSÁNAK NÉHÁNY IDŐSZERŰ KÉRDÉSE

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

1. §.

A Magyar Tudományos Akadémia III. és VI. Osztálya 1956. május 31-én tartott együttes ülésén TARJÁN REZSŐ „A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési iránya" c. előadásának hozzászólói közül RÉNYI ALFRÉD többek között a következőket mondotta (l. [1] 83. o.): „A moszkvai kongresszuson elhangzott egy megjegyzés: ma a számológépeken elsősorban olyan számítási módszereket használnak, melyeket túlnyomó többségben már előzőleg is használtak kézi számológépeken, a matematikai módszer megválasztása terén eddig nem történt más, mint az, hogy a meglevő és ismert módszerek közül kiválasztották azt, amely a gépen legjobban elvégezhető. Viszont eddig nem igen foglalkoztak új, sajátos módszerek kidolgozásával. Egyike a kevés kivételnek az úgynevezett Monte-Carlo-módszer, amellyel mi is elkezdtünk a Matematikai Kutató Intézetben foglalkozni... . Meg vagyok győződve arról, hogy idővel sok más új módszert is fognak találni a matematikusok. Helyes volna, ha nálunk is többet foglalkoznának ezekkel a kérdésekkel."

Hogy az elektronikus számológépek használata számára elgondolt módszerek fejlődése miképpen alakult az utóbbi években, azt mi nem tudjuk, de nem is vagyunk hivatottak és érdekeltek felmérni, megítélni. E helyen inkább a gépek egy más irányú „kihasználási technikájával" kapcsolatosan szeretnénk néhány észrevételt tenni.

Ha áttekintjük azt a hazai irodalmat, mely az országban működő elektronikus számológépek mellett kialakult kollektívák tevékenységéről ad bizonyos képet, akkor számos egészen különböző alkalmazási területeken látjuk felhasználását ezen gépeknek. Ez alapján szinte azt mondhatnánk, hogy az elektronikus gépek megjelenésével a matematika alkalmazásának igénylése ugrásszerűen megnövekedett. A jelentős számban felmerülő matematikai kérdések megválaszolását egyesek az elektronikus számológéppark növelésével, kifejlesztésével vélik megoldhatónak, míg mások úgy látják, ezeket a gépeket nem fogjuk tudni kihasználni. Ezen utóbbi véleményt gyakran azzal indokolják, hogy az elektronikus gépeken számos esetben olyan feladatokat oldanak meg, melyek kézi gépeken is aránylag rövid idő alatt megoldhatók.

A géppark kérdéséhez való hozzáállás a szakemberek körében igen megoszló s azt csak helyeselni lehet, hogy az ezzel kapcsolatos mind a mai napig megoldatlan kérdéseket a matematikai közélet élénken vitatja.

Részünkről e kérdéskomplexumhoz a matematikai modellezés problémáján keresztül szeretnénk néhány észrevételt tenni, melynek egy részét tömören így fogalmazhatjuk meg: Ha a *gazdaságossági szempontok szem előtt tartásával* akarjuk elérni, hogy az elektronikus számológépek a munkaidejük túlnyomó részében olyan számításokat végezzenek, melyekhez ma hozzá sem kezdhetnénk ezen gépek hiányában, akkor ezt elsősorban úgy lehetne elérni, hogy a matematikai modellezést igényesebb szinten, nagyobb technikával végeznénk.

A kívánt szintű matematikai modellezés következtében ugyanis — a látszat ellenére — lehetőség adódik a problémák egy részének olyan módon történő megoldására, mely nem igényli az elektronikus számológépek alkalmazását; a problémák másik részének megválaszolása pedig éppen a magasabb szinten kidolgozott modell bonyolultsága következtében teszi szükségessé az elektronikus számológép használatot. Ilyen szempontok fordulnak elő például bizonyos termelési folyamatok optimális üzemeltetésének elektronikus számológéppel történő meghatározásánál, mikoris a paraméterek időszakos eltolódása folytán visszatérő, viszonylag gyors számolási munkát kell végezni. Ennek véghezvitele el sem képzelhető a folyamat matematikai modelljének felállítása nélkül.

Ilyen eseteket véve alapul márszem betűnően mutatkozik az elektronikus számológépek kihasználásának és és a modellezésnek a „függőségi" kérdése. Egy-egy feladat kapcsán a kellő modell megválasztása, ill. felállítása esetenként elkerülhetővé teheti az elektronikus számológép igénybevételét, s ilyenformán növelhető az olyan területek bevonásának száma, melynél a termelés irányítása nem folyamatosan igényel ellenőrző vagy irányító elektronikus számológépi munkát.

A modellezés területén mutatkozó „lemaradást" talán azzal is lehet magyarázni, hogy a kézi számológépek mellett bizonyos problémák modelljeit meg sem próbáltuk felállítani, mert mire ez alapján a számítások elkészültek volna, az eredmények aktualitásukat már régen elveszítették. Az itt említettekkel szemben leginkább az jelentené a változást, ha a programozó matematikusok (ez alatt nem kódolókat értünk) mellett jelentős módon kialakulnának a modellezéssel foglalkozó matematikus csoportok is. (Az persze vitatható lehet, hogy a gyakorlatban miképpen célszerű ezt megvalósítani. Elképzelhető például egy olyan változat — s ez látszik a legkézenfekvőbbnek —, miszerint a számoló központokban elsősorban csak programoznak, s az intézményeknél, vállalatoknál végeznék a modellezést, mivel egy-egy szakterületen felmerült probléma matematikai modelljének felállítása egyébként is az illető szakterület kutatóinak, szakembereinek együttműködését igényli.)

Ma már mindkettőt lehet és kell olyan szinten végezni, hogy az a matematikusok egy önálló területét határolja körül. Mivel az elektronikus számológépek alkalmazásaira vonatkozó kutatómunkának még csak a kezdeténél tartunk, így már csak ezért sem érthetünk egyet azzal az — egyébként gyakran hangoztatott — véleménnyel, hogy a programozással és programozás-elmélettel foglalkozó egyben modellező is legyen és fordítva. Ilyenkor szokás hivatkozni arra, mit ér a modell, ha az olyan, hogy a programozó képtelen azt gépre vinni. Annak felismerése végett, hogy „mit lehet és mit nem" még nem kell feltétlenül a programozás technikáját ismerni; különben is hiába tudunk programozni, ha „nincs mit gépre vinni". Ha pl. a fizikus egyik-másik matematikai formulát nem tudja ezért vagy azért használni, azért a matematikusnak nem kell feltétlenül fizikusnak lennie ahhoz, hogy a gyakorlat számára kezelhetőbb összefüggést adjon.

Ugyanígy kell a kérdést tekinteni a programozó és modellező matematikusok esetében is. Hogy konkrét eredmények születhessenek, ahhoz persze gyakran a határterületeket is ismerni kell. Hogy ekkor kinek mennyire kell előremenni, azt az esetek igényeinek kell eldöntenie.

Ez ideig a kérdéskört igen általánosan érintettük. Hogy az itt elmondottak egy részéhez konkrétebb formában is hozzászólhassunk, azért először egy kiragadott példát mutatunk be.

2. §

A NIM Számítástechnikai Közlemények 1965/5. számában ([2]) VÁRKONYI ZSOLT a következő probléma megoldását tűzte ki célul:

„Csillék hozzák a követ egy tárolóba és tehergépkocsik szállítják el onnan. *Kérdés:* mekkora legyen a tároló minimális térfogata?" (Persze a problémának ilyen megfogalmazásban nem sok értelme van, később azonban kiderül, hogy a szerző milyen szempontok szem előtt tartásával keresi ezt a minimális értéket.) VÁRKONYI a megoldás módszeréül szimulációs eljárást alkalmaz. Minden bizonnyal a probléma ily módon való megoldása a gyakorlat szempontjából elfogadható volt. Ennek ellenére önkéntelenül is felvetődik az a kérdés, hogy a feladat megoldásához szükség volt-e az ELLIOTT 803 B. számológépet igénybe venni. A kérdésre persze egyértelmű válasz — a körülmények ismerete hiányában — nem adható. Elképzelhető azonban, hogy ez esetben a kielégítő választ megadta volna az alábbiak során tárgyalt modellből közvetlenül nyerhető eredmény is, melyhez végső fokon csak egy normális eloszlástáblázat szükséges, meg esetleg egy logarléc.

MODELL: Tegyük fel, hogy a tárolóhoz a $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ időpontokban érkeznek a csillék, ahol a $\tau_n - \tau_{n-1}$ $(n=1, 2, \ldots; \tau_0 = 0)$ időkülönbségek egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók tetszőleges $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Tegyük fel továbbá, hogy a tárolóhoz $\tau_1', \tau_2', \tau_3' \ldots$ időpontokban érkező szállítógépkocsik $\tau_n' - \tau_{n-1}'$ $(n=1, 2, \ldots; \tau_0' = 0)$ időkülönbsége ugyancsak egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók tetszőleges $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tételezzük fel, hogy egy-egy csille a térfogatú, egy-egy szállítógépkocsi pedig b térfogatú anyagot képes szállítani. Jejölje ξ_t a $(0, t]$ időközben a tárolóhoz érkező csillék számát, η_t pedig az ugyanezen időközben érkező szállítógépkocsik számát. (A tett feltételek folytán $\{\xi_t\}$ és $\{\eta_t\}$ független valószínűségi változók rekurrens folyamatot alkotnak.)

$$\text{Legyen } m_1 = \int_0^\infty x\, dF(x), \quad \sigma_1^2 = \int_0^\infty (x-m_1)^2\, dF(x),$$

$$m_2 = \int_0^\infty x\, dG(x), \quad \sigma_2^2 = \int_0^\infty (x-m_2)^2\, dG(x),$$

ahol $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ véges értékek.

Ha K-val jelöljük a tároló köbtartalmát, s azt akarjuk elérni, hogy az előre adott ε értékű kockázat mellett T ideig „túlcsordulás" ne történjék, akkor a K értékét a

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} (a\xi_t - b\eta_t) \leqq K\} \geqq 1-\varepsilon$$

összefüggés alapján kell meghatározni.

A gyakorlatban K értékének meghatározása jó közelítéssel a következőképpen történhet. Mivel σ_1^2 és $\sigma_2^2 < \infty$, ezért TAKÁCS LAJOS egy idevágó tétele értelmében (l. [3] 376. o.) ξ_t és η_t aszimptotikusan normális eloszlást követ, azaz

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi_t - \frac{t}{m_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 t}{m_1^3}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\eta_t - \frac{t}{m_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_2^2 t}{m_2^3}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Ennek következtében

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\xi_t - c\eta_t - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)t}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)t}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

ahol $c = \frac{b}{a}$. A fentiek alapján tehát, ha t elég nagy $\{\xi_t - c\eta_t\}$ jó közelítéssel *Wiener*-folyamatot alkot, vagyis

$$P\left\{\xi_t - c\eta_t < \frac{K}{a}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\frac{K}{a} - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)t}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)t}}\right),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Wiener-folyamat esetén viszont ismeretes, hogy (l. [4] 392. o.)

$$P\{\sup_{0 \leqq t \leqq T} (\xi_t - c\eta_t) \geqq x\} = 2P\{(\xi_T - c\eta_T) \geqq x\},$$

így végső fokon K értékét a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a} - \left(\frac{1}{m_1} - \frac{c}{m_2}\right)T}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3} + \frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right) \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségből kell meghatározni.

A kapott eredményt az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

Tétel: A modellben leírt feltételezések mellett, ha valamely tároló K köbtartalmát úgy kívánjuk megválasztani, hogy egy előre adott ε értékű kockázat mellett T ideig „túlcsordulás" ne történjék, akkor T elég nagy értéke esetén a K értéket jó közelítéssel a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a}-\left(\frac{1}{m_1}-\frac{c}{m_2}\right)T}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3}+\frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

A gyakorlati alkalmazás szempontjából feltehető, hogy $M(a\xi_t)=M(b\eta_t)$, vagyis, hogy a csillék által a tárolóba szállított anyag átlagosan ugyanannyi, mint amennyit elszállítanak onnan. Ha ugyanis a csillék átlagosan több anyagot szállítanának a tárolóba, mint amennyit a gépkocsik elvisznek onnan, akkor előbb-utóbb „szisztematikusan" túlcsordulás lenne bármilyen nagyméretű tároló esetén. Ellenkező esetben pedig fölöslegesen sok lenne a várakozó gépkocsik száma. Ez az észrevétel bizonyos értelemben szabályozhatja a szállítógépkocsik igénybevételét, mivel ezen modell alapján célszerűbb az elszállítást megszervezni. Az elmondottak értelmében tehát

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{b}{a}=c,$$

s így K értékét a

$$\Phi\left(\frac{\frac{K}{a}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^3}+\frac{c^2\sigma_2^2}{m_2^3}\right)T}}\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}$$

összefüggésből kell meghatároznunk.

Könnyen belátható, hogy az itt kapott eredménnyel bizonyos raktározási problémakörben felmerülő kérdések is megválaszolhatók. (Gondolunk itt elsősorban Ziermann Margit [5] dolgozatában vizsgált kérdéskörre.)

3. §

Mivel a matematika alkalmazásának igénylése — ennek kapcsán a modellezés kérdése — jelentősen függ az ipar fejlettségi fokától, így az elektronikus számológépek alkalmazási igénylését ez a tény döntően befolyásolja. Idevonatkozóan nagyon is találóak Hajós György alábbi sorai (lásd [6] 229. o.): „...még mindig érezzük annak következményét, hogy a felszabadulásig a magyar ipar csak járószalagon járt, hogy nem igen voltak matematikusokat is foglalkoztató kutatóintézetek. Ilyen vonatkoztatásban a helyzet ma sem rózsás. Azt hiszem, tanulni kellene a hagyományosan fejlettebb iparú országoktól. Ha majd kellő számmal foglalkoztatnak matematikusokat a különböző kutatóintézetekben, mert az egyes szakterületeken nálunk is látják majd, hogy ez hasznos, akkor erősen fokozódik az a fejlődés, mely nálunk is megindult, de az üteme nem elég erős."

Hogy ma még a hazai ipar nem igényli a matematika alkalmazását olyan szinten mint pl. a fejlettebb ipari országok, ahhoz véleményünk szerint jelentősen hozzájárul az is, hogy számos ipari vonatkozású munkahelyen sok esetben reprodukálás folyik. Így azután érthető, hogy gyakran figyelmen kívül marad az eredeti konstrukció elkészítésénél szóba jövő matematikai meggondolások szerepe és jelentősége. Az ipar vezetői valójában igyekeznek a matematika módszereit igénybe venni, ez azonban ma még inkább csak a propagálás és „divatos terület művelés" következménye. Ez a hozzáállás teremti meg azután annak lehetőségét, hogy kellő támogatás mellett egyre több dilettáns foglalkozhat a matematika alkalmazásával. (Félő, hogy az idő múlásával — ezek a személyek — a hozzánemértés következtében hibás, gyakorlatilag semmire sem használható eredményeiket a matematika hasznavehetetlenségével fogják magyarázni.) Többnyire ilyen és hasonló okokkal magyarázható az a tény is, hogy számos ipari munkahelyről a vezetők különböző szakembereket programozási tanfolyamokra küldenek anélkül, hogy meggyőződnének, valójában így érhető-e el a helyi problémák matematikai módszerekkel történő megválaszolása. Ami a kérdés gazdaságossági oldalát illeti, olyan ez, mintha valamikor azt kívánták volna a szakemberek egy részétől, tanuljanak meg esztergályozni, mert ha szükség lesz rá, akkor mód adódik gépre vinni és általuk megmunkálni az anyagot.

Ami egy elektronikus gép kiszolgáló személyzetének összetételét illeti, úgy véljük, hogy erre nézve még ma is többé-kevésbé helytálló NEUMANN JÁNOS 1954-ben tett megállapítása. Eszerint „mintegy 3—5 mérnökre és technikusra (2,5—3 műszakos üzemelés esetében, ez minden szempontból elsősorban az állandó operatív felülvizsgálat és fenntartás szempontjából a legcélszerűbb), 2—3 matematikusra és 10—20 kódolóra, tehát összesen 15—30 emberre van szükség. (Vö.: [9], 72. o.)

NEUMANN JÁNOS idézett soraiban a matematikusok számának megjelölése egyáltalán nem meglepő, ha ehhez még hozzátesszük JOHN HAMMERSLEY (Trinity College, Oxford) alábbi sorait:

„A való életben a matematikus főfeladata, hogy megfogalmazza a problémákat absztrakt matematikai modell felállításával úgy, hogy a modellben szereplő egyenletek elég egyszerűek legyenek a megoldhatóság szempontjából, de ne legyenek annyira durvák sem, hogy a valóságot már ne tükrözzék. Az egyenletek megoldása már egyszerűbb technikai kérdés a modellkészítés megragadó, csavaros fogásaihoz képest, amely egyaránt megköveteli a világos, éles, józan észt és a művészi és alkotói képzelet legmagasabb fokú képességeit." (Vö.: [10] 477. o.)

A már idézett helyen HAJÓS GYÖRGY „Igaz, hogy sok mindent tettünk az alkalmazások bizonyos területeken való elindítása és fellendítése érdekében, de tehettünk volna még többet, és ez az irányító munka hibátlanabb és töretlenebb is lehetett volna." mondatát olvasva vetődik fel az a kérdés, hogy különösen most a matematika új fejezeteinek erőteljes bontakozása, valamint az elektronikus számológépek alkalmazhatósága mellett a hazai matematikusok hogyan segíthetnék még eredményesebben elő — az álalkalmazások veszélyének elkerülésével — a matematikai módszerek széles körű bevezetésének elterjedését. Úgy véljük ehhez továbbra is elsősorban azt az utat kell járni, melyen már eddig is elindultunk. Ez konkrétebben azt jelenti, hogy a matematikusoknak a *Rényi*-féle kategorizálás E) típusú feladatkörét az eddiginél is jelentősebb formában és fokon kell művelni.

Emlékeztetőül idézzük (l. [7] 557. o.), hogy „E) a matematikát alkalmazza a matematikus, aki maga vagy mások által elért új matematikai eredményekről felismeri, hogy azok felhasználhatók egy vagy több matematikán kívüli területeken, és ezen felhasználást elősegítő, alkotó jellegű munkát végez .... ez esetben a matematikus nem a gyakorlati problémákhoz keres matematikai módszert, hanem a matematikai eredményhez keres és talál alkalmazást." (Igen hasznos lenne az ilyen tevékenység publikációs lehetőségeit megteremteni.)

A matematikusok itt jelzett irányú tevékenysége rendkívül meggyorsíthatja az iparban, de — a mindennapi élet számos területén is — az emberek tevékenységének hasznosabb alakulását. Itt többek között a matematikának olyan területeken való alkalmazására is gondolunk, melyeknél nem közvetlenül, hanem inkább közvetve származik haszon. Kiragadott példákat említve az operáció analízis néhány modellje például lehetővé teheti a rádió, a televízió műsorának matematikai meggondolásokon alapuló, számos — gyakran ellentmondó — szempontot szem előtt tartó, „kedvezőbb" összeállíthatóságát. Nem lenne érdektelen pl. matematikai meggondolások alapján a filmek filmszínházak közötti elosztásának kérdését megvizsgálni, s a modellt konkrét eredmény elérés végett elektronikus számológépre vinni. A vizsgálat tárgya lehetne ismert modell alapján pl. a filmvásárlás, filmkészítés bizonyos irányú kérdése is. Más példa lehet e vonatkozásban a közlekedés területe. Hogy e felsorolások mellett konkrétebb vizsgálatról is beszéljünk, ezért bemutatunk a következőkben egy problémát, melynek megválaszolásán keresztül egyben azt is látni fogjuk, hogy a modellezés — ellentétben az előbbi példánkkal — még akkor sem zárhatja ki az elektronikus számológép igénybevételének szükségességét, ha pl. formálisan is — igen leegyszerűsödve — csak a négy alapművelet szerepel kapott összefüggéseink között. Az itt bemutatásra kerülő feladatot kétségkívül szimulációs eljárás alkalmazása mellett elektronikus számológéppel is vizsgálhatnánk, azonban előnyösebbnek látszik a szimulációs módszer alkalmazásának elhagyásával a problémát a matematikai modell felhasználása után gépre vinni.

4. §

Tekintsünk egy várost, melyben N számú olyan útkereszteződés van, melynél a közlekedési járművek (villamos, autóbusz stb.) megállóhelyeit közvetlenül az útkereszteződések előtt, illetve után helyezték el. Egy-egy útkereszteződésnél feltételezzük, hogy négy megálló van, s ezek összes elhelyezési lehetőségeit az 1. ábra mutatja be.

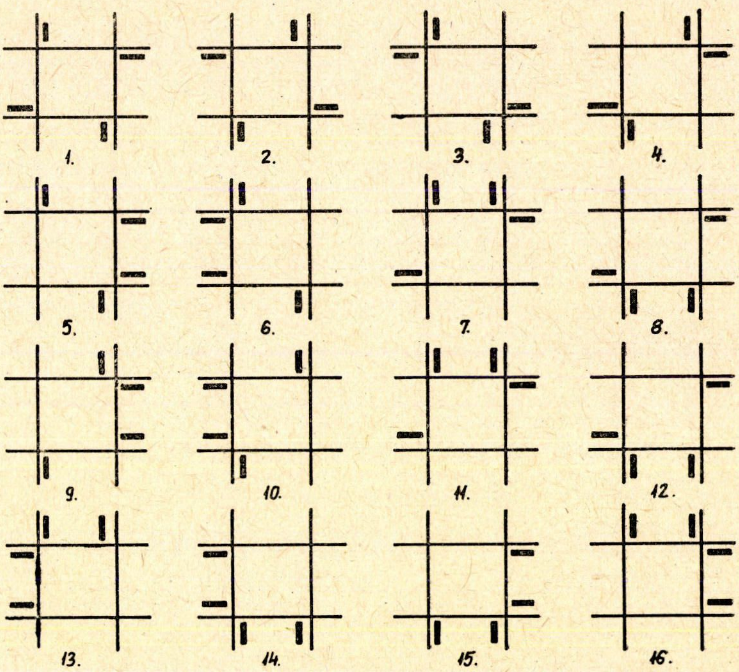
Tegyük fel, hogy az $Ny \to K$ irányban közlekedő utasok közül egy tetszőleges kereszteződésnél a t időpontban átlagosan $n_1 = n_1(t)$ szállt át a $D \to \acute{E}$ irányban közlekedő és $m_1 = m_1(t)$ az $\acute{E} \to D$ irányban közlekedő járműre, s ezt a megvalósulást a 2. ábra szemlélteti. A további három irányból érkező utasok kereszteződésnél történő átszállásának a realizációit a 3. ábra szemlélteti, melyen a jelölések a 2. ábrán alkalmazott jelölésekkel analóg módon értelmezendők.

Kérdés: Az N számú kereszteződésnél milyen elrendezésben helyezzük el a megállókat, ha azt akarjuk, hogy:

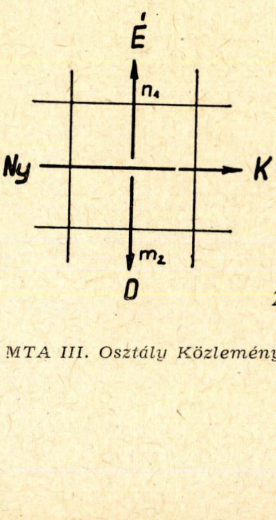
1° *Az adott járművek menetidejének várható értéke minimális legyen.*

2° *Az utasoknak a kereszteződéseknél átszállásra fordított átlagos idejük minimális legyen.*

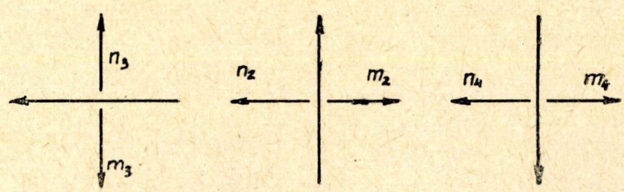
(A közölt megfogalmazásból látható, hogy az 1° és 2° vizsgálata a közlekedés meggyorsítását segítheti elő.)



1. *ábra*

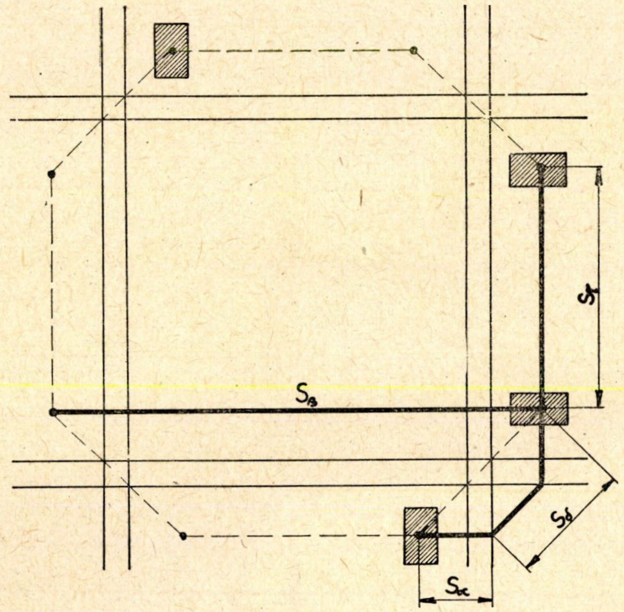


2. *ábra*



3. *ábra*

Vezessük be a következő jelöléseket: $a=a(t)$, $b=b(t)$ és $c=c(t)$ jelölje rendre a piros, zöld és sárga jelzések átlagos időtartamát (a továbbiakban a jelzéseket mindig az út $Ny \to K$ irányában tekintjük) valamely t időpontban.[1] Jelölje $\beta=\beta(t)$ a közlekedő járműnek a 4. ábrán feltüntetett S_β hosszúságú út megtételéhez szükséges átlagos idejét. A gyalogosok az S_α, S_δ, illetve S_τ hosszúságú utat átlagosan rendre $\alpha=\alpha(t)$, $\delta=\delta(t)$, illetve $\tau=\tau(t)$ idő alatt teszik meg. A kereszteződést és ebből kifolyólag a 4. ábrát szimmetrikusnak tételezzük fel, így ezen jelölések alapján



4. ábra

az ábrán előforduló meg nem jelölt útszakaszokon való átkelések átlagos idejét — más megállóhely elhelyezése esetén is — meg lehet határozni. Vizsgálataink során kiindulási és vonatkoztatási alapul az 1. ábra 1. elhelyezési esetét tekintjük, mivel a járművek ennél az elhelyezésnél, a kereszteződés jelzőrendszerétől függetlenül jutnak el a megállóhelyig. A gyakorlat legtöbb esetében az eddig bevezetett függvények lépcsős függvénynek tekinthetők, melyeknek „ugráshelyei" azonos időpontban vannak. Adott t időpontban — az ugráshelyek egy kis környezetének kivételével — jó közelítéssel feltételezhető, hogy $\frac{a}{a+b+2c}$, $\frac{b}{a+b+2c}$, $\frac{2c}{a+b+2c}$ valószínűséggel kapunk piros, zöld, illetve sárga jelzéseket.

[1] Mivel a jelzések időtartamait nemcsak a gyalogos átkelések, hanem más közlekedési eszközök jelenléte is befolyásolja, így feltételezhető, hogy ezen értékek a megállók elrendezésétől jelentéktelenül függenek. (Ellenkező esetben ezzel a ténnyel is számolnunk kell!)

ALAPTÉTEL: *A járműveknek a kereszteződéseknél történő átlagos várakozási ideje független a megállók elhelyezésétől.*

Bizonyítás: Mivel egy tetszőleges megálló vagy az útkereszteződés előtt van, vagy utána, ezért elegendő egy irányban ezt a két esetet vizsgálni. $Ny \to K$ irányt vizsgálva mindkét esetben a keresett érték:

$$\left(\frac{c}{2}+\beta\right)\frac{c}{a+b+2c}+\left(\frac{c}{2}+a+c+\beta\right)\frac{c}{a+b+2c}+$$

$$+\left(\frac{a}{2}+c+\beta\right)\frac{a}{a+b+2c}+\beta\frac{b}{a+b+2c}+v=\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+\beta+v,$$

ahol $v=v(t)$ a járműnek a leszállás, illetve felszállással kapcsolatos átlagos várakozási idejét jelenti, ez szintén lépcsős függvénynek tekinthető, az előbbiekkel azonos ugráshelyekkel.

Az imént bizonyított alaptétellel az 1°-re választ adtunk és ez egyben azt is jelenti, hogy a 2°-re történő válaszadásnál figyelmen kívül hagyhatjuk az 1°-re gyakorolt hatást. Mivel a különböző kereszteződéseknél az átszállásra fordított várakozási idők átlagai függetlenek, ezért elég egy tetszőlegesen rögzített kereszteződésnél vizsgálni az átszállási idők átlagát oly módon, hogy a szóba jövő 16 eset közül keressük azt az elrendeződést, mely esetén ez az érték a legkisebb.

Az 1. ábra 1., 2. és 5. alatti elrendeződésére vonatkozóan ezek az értékek a következők:

$$V_1(t)=(n_1+n_4+m_2+m_3)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+(n_2+n_3+m_1+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_1+n_2+n_3+n_4+m_1+m_2+m_3+m_4)\tau+(n_3+n_4+m_1+m_2)\delta+$$

$$+(bn_1+an_2+bm_3+am_4)\frac{\delta}{a+b+2c},$$

$$V_2(t)=(n_1+n_3+m_1+m_3)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+(n_2+n_4+m_2+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_1+n_2+n_3+n_4+m_1+m_2+m_3+m_4)(\tau+\delta)+(n_3+m_1)(b+c)+$$

$$+(n_1+m_3)b\frac{\frac{b}{2}+\beta+2c}{2(a+b+2c)}+(n_4+m_2)\left(\frac{a}{2}+\beta\frac{a+2c}{2(a+b+2c)}\right)+$$

$$+(n_2+m_4)a\frac{\frac{a}{2}+\beta+b+2c}{2(a+b+2c)}-(n_3+m_1)\frac{b^2}{2(a+b+2c)},$$

$$V_5(t) = (n_1+n_4+m_1+m_3+m_4)\frac{(a+2c)^2}{2(a+b+2c)}+$$

$$+(n_2+n_3+m_1+m_4)\frac{(b+2c)^2}{2(a+b+2c)}+3bm_1\frac{a+c-b(\alpha+\delta)}{2(a+b+2c)}+$$

$$+n_2\frac{a\delta}{a+b+2c}+m_3\frac{b\delta}{a+b+2c}+m_4\frac{(a+c)(\tau+\alpha)-c^2}{a+b+2c}+$$

$$+(n_2+n_3+n_4+m_1+m_3+m_4)\tau+\alpha(n_1+m_1+m_2)+\beta n_1+(n_1+n_3+n_4+m_1+m_2)\delta.$$

(A számításaink során feltételeztük, hogy az a jelzés, amely a jármű megérkezésének a pillanatában fennállt, az általában még a jelzés átlagos idejének a feléig fennáll.)

Minthogy a jelzett értékek t függvényei, így a gyakorlatban elképzelhető, hogy az egyes esetek összehasonlítása során különböző időpontokban ugyanazon kereszteződésnél egymástól eltérő módon kellene a megállókat elrendezni. t-től független elrendeződés nyerhető azáltal, hogy az összehasonlítást a kapott függvények integrál közepeire végezzük. Esetünkben ezek az értékek:

$$M_1 = \frac{1}{T}\int_0^T V_1(t)\,dt,$$

$$M_2 = \frac{1}{T}\int_0^T V_2(t)\,dt,$$

$$M_5 = \frac{1}{T}\int_0^T V_5(t)\,dt,$$

ahol T értékét többnyire 24^h-nak célszerű választani.

Végezetül arra szeretnénk rámutatni, hogy már aránylag egyszerűbb problémák megoldásán való fáradozás alkalmával is előfordulhat az az eset, amikor olyan feltétel megadása mellett kell megoldást keresni, mely esetén eleve lehetetlen az elektronikus számológép igénybevétele, ugyanekkor a probléma modellezés útján viszonylag egyszerű eszközökkel megoldható. Erre példa lehet a (8) dolgozat problémaköre a 2. tételben szereplő feltételek megadásának vizsgálata mellett.

IRODALOM

[1] TARJÁN REZSŐ: A gyorsműködésű automatikus számológépek fejlődési iránya: Hozzászólások *MTA III. Osztály Közleményei* **7** (1957) 1.
[2] VÁRKONYI ZSOLT: Anyagtároló bunker minimális térfogatának meghatározása elektronikus számológépen. *NIM Számítástechnikai Közlemények* 1965/5.
[3] TAKÁCS LAJOS: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA III. Osztály Közleményei* **6** (1956) 3—4.
[4] J. L. DOOB: *Stochastics processes*, New York, 1953.
[5] ZIERMANN MARGIT: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára. *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* VIII. B. (1963) 4.
[6] HAJÓS GYÖRGY: A matematika szerepe a többi tudományban, *Fizikai Szemle* **15** (1965) 8.
[7] RÉNYI ALFRÉD: A matematika alkalmazásairól tartandó vita tézisei, *Magyar Tudomány* (1962) 9.
[8] DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR: A megbízhatóság növelésének egy optimális elosztásáról. *MTA III. Osztály Közleményei* **15** (1965) 4.
[9] NEUMMAN JÁNOS: *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
[10] MINA REES: Matematikusok az árupiacon. *MTA III. Osztály Közleményei* **8** (1958) 4.

(Beérkezett: 1965. szeptember 6.)