ÚJ MÓDSZEREK ÉS EREDMÉNYEK A KOMBINATORIKUS ANALÍZISBEN, I.

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A matematika legújabb fejlődésének egyik legjellemzőbb vonása a diszkrét módszerek fokozottabb előtérbe kerülése, és ezen belül a kombinatorika renaissance-a. Néhány évtizeddel ezelőtt a kombinatorikát a matematika lényegében lezárt fejezetének tekintették. A fejlődés alaposan rácáfolt erre és — mint már annyiszor — újból megmutatta, hogy a tudományban nincsenek és nem lehetnek végleg lezárt, „elintézett" fejezetek, problémakörök.

A kombinatorikai kutatás fellendülésének okainak részletes vizsgálatába itt nem bocsátkozunk; csak megemlítjük, hogy ebben jelentős szerepet játszottak a következő körülmények:

A) A nagysebességű elektronikus számológépek megjelenése, különös tekintettel arra, hogy ezek digitális (azaz diszkrét) működésű gépek.

B) A matematikai módszerek fokozottabb térhódítása új területeken, elsősorban a közgazdaságban, biológiában és más tudományokban, amelyek problémái általában nem folytonos jellegűek, gyakran vezetnek gráfelméleti (lásd pl. [1], [2]) és más kombinatorikai kérdésekre.

C) Az információelmélet kifejlődése, amely elsősorban a diszkrét jelátvitellel működő híradástechnikai eljárások problematikájából fejlődött ki.

D) A matematikai statisztika biológiai, mezőgazdasági, ipari stb. alkalmazásai is számos kombinatorikai problémára vezettek, pl. a kísérletek tervezése (design of experiments) terén.

E) A statisztikus fizika számos kombinatorikai problémát vetett fel. (L. pl. [3], [4].)

F) A valószínűségszámításban még az eddiginél is nagyobb mértékben előtérbe kerültek a kombinatorikus módszerek. (Lásd pl. [5].)

A kombinatorika megalapítóinak általában LEIBNIZet és PASCALt szokták tekinteni. LEIBNIZet a kombinatorikához filozófiai meggondolások vezették el, míg PASCALt valószínűségszámítási vizsgálatai.

A kombinatorikát ma általában úgy szokták definiálni, mint a véges halmazok és azokon értelmezett függvények elméletét. (L. pl. [6].) Ezen belül is a kombinatorika elsősorban az említett jellegű problémákra vonatkozó *leszámlálási* feladatokkal foglalkozik. J. RIORDAN, a modern kombinatorikus analízisről szóló nemrégiben megjelent, kitűnő könyvének [7] bevezetésében szintén a kombinatorikának ezt a vonását emeli ki, mint legjellemzőbbet.

A kombinatorika mai állására egyrészt a konkrét eredmények gazdagsága, másrészt ezek egymástól való meglehetős izoláltsága, általános elméletek és módszerek viszonylagos hiánya jellemző. A kombinatorika azonban számos ponton kapcsolódik a matematika más ágaihoz, pl. a valószínűségszámításon kívül, amelyet már említettünk, a véges testek, véges geometriák elméletén át az algebrához és a geometriához.

Kombinatorikus analízis alatt általában az analízis módszereinek a kombinatorikában való alkalmazását értik. Ebben az értelemben a kombinatorikus analízis EULER és LAPLACE munkásságával kezdődik és középpontjában a generátorfüggvény fogalma áll. Helytelen volna azonban úgy tekinteni a kombinatorikus analízist, mint amelyben szükségképpen a kombinatorikus összefüggések nyerése a cél és az analitikus módszer az eszköz: gyakran ugyanis a „szereposztás" fordított, amenynyiben az ilyen vizsgálatok az analízis számára is gyümölcsözőek és új eredményekre vezetnek.

A cikksorozattal, melyet e dolgozattal megindítunk, a kombinatorikus analízis néhány sokat ígérő újabb módszerére és eredményére kívánjuk a kutatók figyelmét felhívni. Különös figyelmet fordítunk az olyan vizsgálatokra, amelyek reményt nyújtanak arra, hogy azokból általános módszerek fognak kialakulni. E cikksorozat jellegét illetően tehát elsősorban ismertető jellegű, de emellett számos új eredményt (valamint ismert eredményekre új bizonyításokat, ismert tételek általánosításait stb.) is tartalmaz. Azok az eredmények (ill. bizonyítások), amelyeknél más forrásra nem hivatkozunk, legjobb tudomásunk szerint újak; hangsúlyozzuk azonban, hogy éppen azáltal, hogy a kombinatorika gazdag anyaga nincs ma még kellően rendszerezve, különösen nehéz e téren megállapítani egy újonnan talált összefüggésről vagy bizonyításról, hogy az valóban új-e.

1. §. Véges halmazok particiói

Legyen H_n egy n elemű halmaz $(n=1, 2, \ldots)$. H_n elemeiről csak annyit teszünk fel, hogy megkülönböztethetők és így megszámozhatók. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük tehát (és a következőkben mindig fel is tesszük), hogy H_n elemei az $1, 2, \ldots, n$ számok. A H_n halmaz egy particióján H_n elemeinek valamilyen módon osztályokba való sorolását értjük. Egy particiót leírhatunk úgy, hogy az egy osztályba tartozó elemeket tetszőleges sorrendben egy-egy zárójelbe tesszük, és e zárójelbe zárt osztályokat egymás mellé írjuk úgy, hogy a nagyobb elemszámú osztályok megelőzik a kisebb elemszámú osztályokat. Pl. H_5 azon particióját, amelynél a páros és a páratlan számok egy-egy osztályt alkotnak, a következőképpen jelöljük: (1, 3, 5) (2, 4). Nyilván (5, 1, 3) (4, 2) ugyanazt a particiót jelöli. Egy partició ilyen felírását *zárójeles normál alak*nak nevezzük.

Minden particiót egy ekvivalencia reláció (egy szimmetrikus reflexív és tranzitív reláció) értelmez és megfordítva, minden partició definiál egy ilyen relációt. Egy lehetséges mód egy partició jellemzésére a következő: minden a H_n halmazon értelmezett f függvény egyértelműen definiálja H_n egy particióját, oly módon, hogy egy osztályba soroljuk H_n azon elemeit, amelyeken az f függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Két particiót azonosnak tekintünk, ha azokat ugyanaz az ekvivalencia-reláció értelmezi.[1] Két a H_n halmazon értelmezett függvény, f és g akkor és csak akkor értelmezi ugyanazt a particiót, ha H_n bármely x és y elemére $f(x)=f(y)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $g(x)=g(y)$, azaz ha megadható olyan h függvény, hogy $h(f(x))$ -$g(x)$ és h *egyrétű*, azaz különböző helyeken különböző értékeket vesz fel, tehát h az f értékkészletének g értékkészletére való kölcsönösen egyértelmű leképezését létesíti.

Jelölje T_n ($n=1, 2, \ldots$) a H_n halmaz összes (különböző) particióinak számát; teljes felsorolással beláthatjuk, hogy $T_1=1$, $T_2=2$, $T_3=5$, $T_4=15$. Pl. H_4 összes particiói a következők:

(1) (2) (3) (4)	(12) (3) (4)	(12) (34)	(123) (4)	(1234)
	(13) (2) (4)	(13) (24)	(124) (3)	
	(14) (2) (3)	(14) (23)	(134) (2)	
	(23) (1) (4)		(234) (1)	
	(24) (1) (3)			
	(34) (1) (2)			

Az első kérdés, amivel foglalkozni kívánunk, a T_n számsorozat meghatározása. Célszerű lesz T_n-et $n=0$-ra is definiálni, oly módon, hogy $T_0=1$. Ez esetben fennáll a következő jól ismert, érdekes formula a T_n sorozat ún. *exponenciális generátorüggvényére*, vagyis a $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n x^n}{n!}$ függvényre:

$$T(x) = e^{e^x-1}. \tag{1. 1}$$

Az (1. 1) formula bizonyítására számos mód kínálkozik; ezek közül itt csak négyet ismertetünk.

a) (1. 1) *bizonyítása a T_n sorozatra vonatkozó rekurziv relációból.*

Könnyen belátható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k. \tag{1. 2}$$

(1. 2) abból következik, hogy H_{n+1} összes particióit osztályozhatjuk először aszerint,

[1] Egy n elemű véges *halmaz* particiói nem tévesztendők össze az *n szám* particióival. Pl. ha $n=3$, a $H_3=\{1, 2, 3\}$ halmaznak 5 particiója van, mégpedig

(1)(2)(3)

(12)(3)

(13)(2)

(23)(1)

(123)

míg a 3 számnak csak 3 particiója van: $3=1+1+1=2+1=3$. A különbség onnan származik, hogy H_n elemeit megkülönböztethetőnek tekintjük és így az a partició, amelynél a 3 elemet egy kételemű és egy egyelemű osztályra bontjuk, háromféleképpen valósítható meg. Bár a számok particióinak vizsgálata is érdekes kombinatorikai kérdésekre vezet, mégis inkább a számelméletbe tartozik, mint a kombinatorikába.

hogy az $n+1$ szám hány más számmal van egy osztályban; ha ez a szám k, és k értékét rögzítjük, az így kiválasztott particiókat osztályozhatjuk aszerint, hogy melyik ez a k szám (az $1, 2, \ldots, n$ számok közül), és ha ezeket is rögzítettük, nyilván annyi ilyen partició adható meg, ahány particiója van a többi $n-k$ számnak. Mármost (1. 2) mindkét oldalát $\frac{x^n}{n!}$-sal szorozva és $n=0, 1, 2, \ldots$-re összegezve adódik a

$$T'(x) = e^x \cdot T(x) \tag{1. 3}$$

differenciálegyenlet, amelyet megoldva és figyelembe véve a $T(0)=1$ kezdőfeltételt, adódik (1. 1).

Ez az (1. 1) reláció legismertebb bizonyítása.[2]

b) (1. 1) *bizonyítása* T_n *explicit képlete alapján.*

Említettük, hogy egy partició sokféleképpen írható fel zárójeles normál alakban. Pl. H_4 azon particiója, amelynél 1 és 3 egy osztályban vannak, a 2 és 4 egyedül egy-egy osztályt alkotnak, a következő 4-féle módon írható fel zárójeles normál alakban:

$$\begin{gathered}(1, 3)\ (2)\ (4)\\ (1, 3)\ (4)\ (2)\\ (3, 1)\ (2)\ (4)\\ (3, 1)\ (4)\ (2).\end{gathered}$$

Általában, ha H_n egy π particiója l_k darab k elemű osztályból áll ($k=1, 2, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^{n} kl_k = n$), akkor π nyilván $1!^{l_1} 2!^{l_2} \ldots n!^{l_n} \cdot l_1! l_2! \ldots l_n! = \prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!$-féleképpen írható fel zárójeles normál alakban. Ha egy ilyen felírásból a zárójeleket elhagyjuk, az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációját nyerjük. Könnyen belátható, hogy ezúton az $1, 2, \ldots, n$ számok minden permutációja H_n egy és csak egy olyan particiójából jön létre, amely l_k darab k elemű osztályt tartalmaz. Ily módon H_n azon particióinak száma, amelyek l_k darab k elemű osztályt tartalmaznak, nyilván $\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}$ és így

$$T_n = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}. \tag{1. 4}$$

(1. 4) mindkét oldalát $\frac{x^n}{n!}$-sal szorozva és n-re 0-tól ∞-ig összegezve kapjuk, hogy

$$T(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l_k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^k}{k!}\right)^{l_k}}{l_k!} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{x^k}{k!}} = e^{e^x - 1}, \tag{1. 5}$$

amivel (1. 1) egy újabb bizonyítását nyertük.

[2] L. pl. [8], I. fej. 8/c. példa, 30. o.

Megjegyzendő, hogy az (1. 4) „explicit” képlet nagy n-re nem alkalmas T_n tényleges kiszámítására; e célra az (1. 2) rekurzió sokkal jobban használható.

c) (1. 1) *bizonyítása Gian-Carlo Rota*[3] *funkcionál-módszerével.*

Jelölje $\Phi(u, n)$ az összes olyan $f(x)$ függvények halmazát, amelyek a H_n halmazon vannak értelmezve és értékkészletük a $H_u=\{1, 2, \dots, u\}$ halmaz. $\Phi(u, n)$ elemeinek száma nyilván u^n. Bármely $f\in\Phi(u, n)$ meghatározza H_n egy particióját; megfordítva, ha π a H_n halmaz egy tetszőleges particiója és π osztályának számát $N(\pi)$-vel jelöljük, úgy π-hez $u(u-1)\dots(u-N(\pi)+1)$ számú függvény tartozik $\Phi(u, n)$-ből. Ilyen módon, ha Π_n jelöli H_n összes particióinak halmazát,

$$u^n = \sum_{\pi\in\Pi_n} u(u-1)\dots(u-N(\pi)+1). \tag{1. 6}$$

Az (1. 6) reláció u minden pozitív egész értékére fennáll; ebből azonban már következik, hogy az (1. 6) bal és jobb oldalán álló u-ban n-edfokú polinomok azonosak, tehát (1. 6) u minden valós (sőt komplex) értékére is teljesül. Definiáljuk most az $L(P)$ lineáris funkcionált az u változó összes polinomjainak halmazán (vektorterén) oly módon, hogy

$$L(1)=1,\quad L\big(u(u-1)\dots(u-k+1)\big) = 1 \quad \text{ha} \quad k=1, 2, \dots .$$

Ezen feltételek által az L funkcionál egyértelműen definiálva van, hiszen minden $P(u)$ n-edfokú polinom előállítható

$$P(u) = c_0+c_1u+c_2u(u-1)+\dots+c_nu(u-1)\dots(u-n+1) \tag{1. 7}$$

(ún. *Newton-sor*[4]) alakban és így a feltételeink szerint

$$L(P(u)) = \sum_{k=0}^{n} c_k. \tag{1. 8}$$

Mármost (1. 6) szerint

$$L(u^n)=T_n. \tag{1. 9}$$

Tehát T_n nem más, mint az L funkcionál értéke az u^n egytagú polinomra.

Ebből először is adódik T_n-re egy újabb explicit képlet. Ugyanis az u^n polinom *Newton*-sora jól ismert:

$$u^n = \sum_{r=1}^{n} S(n, r)u(u-1)\dots(u-r+1), \tag{1. 10}$$

ahol az $S(n, r)$ számok az ún. *másodfajú Stirling-számok*[5] (l. pl. [11], 168. o.) és

[3] Lásd [9]. E dolgozat 32 dolgozatot sorol fel, melyek a T_n számsorozattal foglalkoznak.

[4] L. pl. [10], II. kötet 12. o. (1.7)-ben $c_k=\frac{1}{k!}\Delta^k f(0)$, $k=0, 1, \dots, n$.

[5] (1.10) tekinthető a másodfajú Stirling-számok definíciójának. Egy másik definíció: $S(n, r)=\frac{1}{r!}[\Delta^r x^n]_{x=0}$, ahol Δ a differencia-operátor: $\Delta P(x)=P(x+1)-P(x)$. Megjegyzendő, hogy a $\Delta f(x)=f(x+I)-f(x)$ operátor segítségével az L funkcionál az $L(P)=[e^{\Delta}P]$ alakban írható fel. Mivel, mint ismeretes, a Δ operátor a $Df(x)=f'(x)$ differenciáloperátorral $\Delta=e^D-1$ alakban fejezhető ki (l. pl. [11], 13. o.), tehát az L funkcionál $L(P)=[e^{e^D-1}P]_{x=0}$ alakban is kifejezhető.

így (1. 8) és (1. 9) szerint

$$T_n = \sum_{r=1}^{n} S(n, r). \tag{1. 11}$$

(1. 9) alapján az (1. 1) összefüggés a következőképpen vezethető le. Terjesszük ki az L funkcionál értelmezését az összes olyan $g(u)$ egész függvényekre, amelyekre ez lehetséges[6], a linearitás megőrzésével, vagyis ha

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \quad \text{akkor legyen} \quad L(g(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n,$$

feltéve, hogy e sor abszolut konvergens. Akkor

$$T(x) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n x^n}{n!}\right) = L(e^{ux}) = L((1+(e^x-1))^u) = \tag{1. 12a}$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!}(e^x-1)^k\right),$$

tehát

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^k}{k!} = e^{e^x-1}, \tag{1. 12b}$$

amivel (1.1) egy újabb igazolását nyertük.[7]

d) (1. 1) *bizonyítása a másodfajú Stirling-számok generátorfüggvénye segítségével.*

[6] Könnyen belátható, hogy L ily módon az összes exponenciális típusú egész függvényekre kiterjeszthető.

[7] Az (1.12)-ben szereplő formális műveletek jogosultságát a következőképpen lehet belátni az L funkcionál egész függvényekre való kiterjesztése nélkül: Az

$$e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!}(e^x-1)^k \tag{$*$}$$

azonosságból következik, hogy x^n együtthatója $(*)$ bal és jobb oldalán ugyanaz, tehát

$$\frac{u^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{k} l_i = n \\ l_i \geq 1}} \frac{1}{l_1!\, l_2! \dots l_k!}. \tag{$**$}$$

Alkalmazva $(**)$-ra (amelynek mindkét oldalán u-nak egy polinomja áll) az L funkcionált, adódik

$$\frac{T_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{k} l_i = n \\ l_i \geq 1}} \frac{1}{l_1!\, l_2! \dots l_k!}. \tag{$***$}$$

Mármost a $(***)$ azonosságot beszorozva x^n-al és összegezve n szerint adódik $T(x)=e^{e^x-1}$. E bizonyítás során az L funkcionált csak polinomokra alkalmaztuk. E bizonyítás megmutatja egyben a Rota-féle bizonyítás kapcsolatát a b) alatti bizonyítással is.

(1. 10) u-val való beszorzásával adódik

$$u^{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r)u(u-1)\dots(u-r+1) = u \sum_{r=1}^{n} S(n, r)u(u-1)\dots(u-r+1)$$

és így együttható-összehasonlítással kapjuk az

$$S(n+1, r) = S(n, r-1) + rS(n, r) \quad (r=1, \dots, n+1) \tag{1. 13}$$

rekurzív összefüggést, ahol $S(n, 0)$ alatt 0 értendő, ha $n \geqq 1$ azonban $S(0, 0)=1$. (1. 13)-ból viszont, bevezetve a

$$\sigma_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, r)x^n}{n!} \qquad (r = 1, 2, \dots) \tag{1. 14}$$

jelölést, adódik

$$\sigma_r'(x) = \sigma_{r-1}(x) + r\sigma_r(x) \quad (r=1, 2, \dots). \tag{1. 15}$$

Mivel nyilvánvalóan $\sigma_0(x) \equiv 1$ és $\sigma_r(0)=0$, ha $r \geqq 1$, tehát indukcióval adódik

$$\sigma_r(x) = \frac{(e^x-1)^r}{r!} \qquad (r = 0, 1, \dots). \tag{1. 16}$$

Mármost (1. 11) szerint (figyelembe véve, hogy $S(n, r)=0$ ha $r>n$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^r}{r!} = e^{e^x-1},$$

amivel (1. 1) egy negyedik bizonyítását nyertük.

A másodfajú *Stirling*-számoknak egyébként egyszerű közvetlen kombinatorikai jelentése is van: $S(n, r)$ jelenti egy n elemű halmaz összes olyan particióinak a számát, amelyek pontosan r osztályból állnak. Ez legegyszerűbben (1. 13) segítségével látható be indukcióval. Ha ugyanis $T(n, r)$ jelöli a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelyek pontosan r osztállyal bírnak, akkor $T(n, r)$-re nyilván fennáll, hogy

$$T(n+1, r) = T(n, r-1) + rT(n, r), \tag{1. 17}$$

hiszen H_{n+1} r osztályból álló particiói két típusba oszthatók: azok, amelyekben az $n+1$-edik elem egyedül alkot egy osztályt — ezek száma $T(n, r-1)$ — és azok, amelyekben az $n+1$-edik elem nem egyedül alkot egy osztályt; ez utóbbiakat azonban úgy nyerjük, hogy H_n tetszőleges r osztályból álló particióját véve, $n+1$-et az r osztály valamelyikéhez csatoljuk és így az utóbbiak száma $rT(n, r)$. Mármost (1. 13)-ból és (1. 17)-ből következik, hogy ha $T(n, r)=S(n, r)$ adott n-re és ez $r=1, 2, \dots, n$-re, akkor $T(n+1, r) = S(n+1, r)$ $r=1, 2, \dots, n+1$-re. Mivel azonban nyilván $S(1, 1)=1$ és $T(1, 1)=1$ következik, hogy minden n-re és r-re $S(n, r)= =T(n, r)$. Megjegyzendő, hogy (1. 16) is levezethető a *Rota*-féle módszerrel, a következőképpen. Legyen L_r az a polinomokon értelmezett lineáris funkcionál, amelyre $L_r(u(u-1)\dots(u-r+1)) = 1$ és $L_r(u(u-1)\dots(u-j+1)) = 0$, ha $j \neq r$. Akkor nyilván

$$S(n, r) = L_r(u^n) \tag{1. 18}$$

és így

$$(1.19)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,r)x^n}{n!} = L_r(e^{ux}) = L_r\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-j+1)}{j!}(e^x-1)^j\right) = \frac{(e^x-1)^r}{r!}.$$

Végül a másodfajú *Stirling*-számokra explicit képlet is megadható (1. 4) mintájára:

$$(1.20)\quad S(n,r) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ \sum_{k=1}^{n} l_k = r}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} l_k!}.$$

Nyilván (1. 20)-ból r szerinti összegezéssel adódik (1. 4).

Természetesen (1. 16) is levezethető (1. 20)-ból.

A másodfajú *Stirling*-számokra (1. 2) bizonyításához hasonló meggondolással adódik a

$$(1.21)\quad S(n+1,r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(n-j, r-1)$$

rekurzió. Ebből újabb bizonyítást nyerhetünk (1. 16)-ra, ugyanis (1. 21)-ből adódik $\sigma_r(x)$-re az (1. 15)-től különböző

$$(1.22)\quad \sigma_r'(x) = \sigma_{r-1}(x)e^x \qquad (r=1,2,\dots)$$

differenciálegyenlet-rendszer és (1. 22)-ből indukcióval következik (1. 16).

Vizsgáljuk most H_n azon particióinak számát, amelyeknél az osztályok száma a C halmazba esik, ahol C a természetes számok tetszőleges részhalmaza. Ha e particiók számát $S(n,[C])$-vel jelöljük, akkor nyilván

$$S(n,[C]) = \sum_{r\in C} S(n,r)$$

és így

$$(1.23)\quad \sigma_{[C]}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n,[C])x^n}{n!} = \sum_{r\in C} \frac{(e^x-1)^r}{r!}.$$

Speciálisan, ha $C=Z_1$, a páratlan számok halmaza, ill. $C=Z_0$ a páros számok halmaza

$$(1.24)\quad \sigma_{[Z_1]}(x) = \mathrm{sh}(e^x-1), \quad \text{ill.} \quad \sigma_{[Z_0]}(x) = \mathrm{ch}(e^x-1)$$

és így

$$(1.25)\quad \sigma_{[Z_0]}(x) - \sigma_{[Z_1]}(x) = e^{-(e^x-1)}.$$

Megjegyzendő, hogy az (1. 1) és (1. 25) összefüggésekből érdekes sorok adódnak az e, ill. $\frac{1}{e}$ számokra. Ugyanis (1. 1)-ből

$$(1.26)\quad T_n \cdot e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad (n=1,2,\dots)$$

és hasonlóképpen (1. 25)-ből

$$(1.27)\qquad \frac{D(n)}{e}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{k!}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

ahol $D(n)$ jelöli a H_n halmaz páros számú osztályból álló particiói számának és páratlan számú osztályból álló particiói számának a különbségét. Az (1. 26) sorok először G. DOBINSKI [12] dolgozatában szerepelnek; tőle függetlenül RADOS GUSZTÁV [13] is bebizonyította, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$ sor összege e egészszámú többszöröse. Az (1. 27) képlet, illetve az a megjegyzés, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^n}{k!}$ sor összege $\frac{1}{e}$ egészszámú többszöröse, tudomásunk szerint nem volt eddig ismeretes.

Az (1. 26) képlet még tovább általánosítható. Ugyanis nyilvánvalóan

$$(1.28)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{k!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}=e=eL\big(u(u-1)\ldots(u-n+1)\big)$$
$$(n=0,1,\ldots).$$

Tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges polinom, akkor (lásd [9])

$$(1.29)\qquad eL(Q(u))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q(k)}{k!}.$$

Így tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges egész együtthatós polinom, úgy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{Q(k)}{k!}$ sor összege e-nek egész számú többszöröse. Hasonlóképpen általánosítható (1. 27) is. Ugyanis

$$(1.30)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\big(k(k-1)\ldots(k-n+1)\big)}{k!}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-n)!}=\frac{(-1)^n}{e}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{e}L\big(u(u-1)\ldots(u-n+1)\big)$$

és így, ha $Q(u)$ tetszőleges polinom, $Q(u)=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n u(u-1)\ldots(u-n+1)$.

$$(1.31)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k Q(k)}{k!}=\frac{1}{e}L(Q^*(u)),$$

ahol $Q^*(u)=\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n c_n u(u-1)\ldots(u-n+1)$. Így tehát, ha $Q(u)$ tetszőleges egész együtthatós polinom, az (1. 31) bal oldalán álló sor összege $\frac{1}{e}$-nek egész számú többszöröse. Nyilván

$$(1.32)\qquad L(Q^*(u))=\sum(-1)^n c_n=\left[\frac{\sum(-1)^n\Delta^n Q}{n!}\right]_{u=0}=[e^{-\Delta}Q]_{u=0}.$$

2. §. Véges halmaz particiói az osztályok elemszámára vonatkozó korlátozás mellett

Legyen A pozitív egész számok egy tetszőleges halmaza. Jelölje $T_n(A)$ a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelynél minden osztály elemeinek száma A-ba tartozik.

Be fogjuk bizonyítani (1. 1) általánosításaként, hogy

$$T_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A)x^n}{n!} = e^{A(x)}, \tag{2. 1}$$

ahol

$$A(x) = \sum_{k \in A} \frac{x^k}{k!}.$$

Mind a négy, az első §-ban közölt, (1. 1)-re adott bizonyítás megfelelő változtatásokkal alkalmas (2. 1) bizonyítására is.

a) (2. 1) *bizonyítása a $T_n(A)$-ra vonatkozó rekurzió alapján.*

Könnyen belátható, hogy fennáll a

$$T_{n+1}(A) = \sum_{k+1 \in A} \binom{n}{k} T_{n-k}(A) \tag{2. 2}$$

rekurzió; ebből

$$T'_A(x) = T_A(x) \cdot A'(x) \tag{2. 3}$$

és így, figyelembe véve, hogy $T_A(0) = 1$, adódik (2. 1).

b) (2. 1) *bizonyítása $T_n(A)$ explicit képlete alapján.*

(1. 4)-hez hasonlóan belátható, hogy

$$T_n(A) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ k \in A}} \frac{n!}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \in A}}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!} \tag{2. 4}$$

és ebből

$$T_A(x) = \prod_{k \in A} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^k}{k!}\right)^l}{l!} \right) = e^{A(x)}. \tag{2. 5}$$

c) (2. 1) *bizonyítása Rota funkcionál-módszerével.*

Jelölje $\varphi_A(u, n)$ a H_n halmazon értelmezett összes olyan $f(x)$ függvények számát, amelyek értékkészlete a $H_u = \{1, 2, \ldots, u\}$ halmaz és amelyek minden x értéket ($x = 1, 2, \ldots, u$), amelyet ténylegesen felvesznek, k_x-szer vesznek fel, ahol $k_x \in A$. Ez esetben nyilván fennáll a

$$\Phi_A(u, n+1) = u \sum_{k+1 \in A} \binom{n}{k} \Phi_A(u-1, n-k) \tag{2. 6}$$

rekurzió és így, bevezetve a

(2. 7) $$\varphi_A(u, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_A(u, n)x^n}{n!}$$

jelölést,

(2. 8) $$\frac{\partial\varphi_A(u, x)}{\partial x} = u\cdot\varphi_A(u-1, x)A'(x).$$

Mivel

(2. 9) $$\varphi_A(1, x) = A(x)+1,$$

tehát indukcióval következik

(2. 10) $$\varphi_A(u, x) = \big(A(x)+1\big)^u.$$

Másrészt nyilván, ha $\Pi_n(A)$ jelöli H_n összes olyan particióinak halmazát, amelyeknél az osztályok elemszámai mind A-ba esnek,

(2. 11) $$\Phi_A(u, n) = \sum_{\pi\in\Pi_n(A)} u(u-1)\dots\big(u-N(\pi)+1\big),$$

tehát ha L ugyanazt a funkcionált jelenti, mint az 1. §-ban, akkor

(2. 12) $$T_n(A) = L\big(\Phi_A(u, n)\big).$$

Ennélfogva

(2. 13) $$T_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A)x^n}{n!} = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\Phi_A(u, n)}{n!}\right) = L\big((1+A(x))^u\big) =$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u(u-1)\dots(u-k+1)}{k!}(A(x))^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(x))^k}{k!} = e^{A(x)}.$$

d) (2. 1) *bizonyítása az általánosított másodfajú Stirling-számok segítségével.*

Jelölje $S(n, r, A)$ a H_n halmaz azon particióinak számát, amelyek r osztályból állnak és minden osztály elemszáma A-ba tartozik. Az $S(n, r, A)$ $(n=1, 2, \dots)$ számsorozat generátorfüggvényének meghatározásához az előző §-ban bevezetett L_r funkcionált használjuk. Kiindulva újból a (2. 11) azonosságból, kapjuk, hogy

(2. 14) $$S(n, r, A) = L_r\big(\Phi_A(u, n)\big)$$

és így

(2. 15) $$\sigma_r(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n, r, A)}{n!} x^n = L_r\big((1+A(x))^u\big) = \frac{A(x)^r}{r!}.$$

Az $S(n, r, A)$ számokat *az A halmaz másodfajú Stirling-számai*nak nevezzük. E számokat tudomásunk szerint eddig nem vizsgálták, annak ellenére, hogy ezek a másodfajú *Stirling*-számok természetes általánosításai. Természetesen fennáll a

(2. 16) $$\sum_{r=1}^{n} S(n, r, A) = T_n(A)$$

azonosság, továbbá a

$$\sum_{r=1}^{n} S(u, r, A)u(u-1)\dots(u-r+1) = \Phi_A(u, n) \tag{2.17}$$

összefüggés, és a

$$S(n, r, A) = \sum_{\substack{\sum\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} kl_k = n \\ \sum\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} l_k = r}} \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\in A}}^{n} k!^{l_k}\cdot l_k!} \tag{2.18}$$

explicit képlet.

Az A halmazra vonatkozó másodfajú *Stirling*-számokra nem általánosítható az (1. 13) rekurzió, azonban az (1. 21) rekurzió analogonja érvényes és a következőképpen írható fel:

$$S(n+1, r, A) = \sum_{j+1\in A} \binom{n}{j} S(n-j, r-1, A). \tag{2.19}$$

Ezen rekurzió segítségével e számok n és r kis értékeire meghatározhatók. (2. 19)-ből egy újabb bizonyítást nyerhetünk (2. 15)-re, ugyanis (2. 19)-ből

$$\sigma_r'(x, A) = A'(x)\sigma_{r-1}(x, A) \tag{2.20}$$

és ebből (2. 15) indukcióval következik.

Érdemes megvizsgálni a következő példát: Legyen $A = Z_1$ a páratlan számok halmaza, akkor $A(x) = \operatorname{sh} x$ és így, bevezetve a $T_n(Z_1) = Q_n$ és $S(n, r, Z_1) = Q(n, r)$ jelöléseket,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n x^n}{n!} = e^{\operatorname{sh} x}, \tag{2.21}$$

valamint

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q(n, r)x^n}{n!} = \frac{(\operatorname{sh} x)^r}{r!} \qquad r = 1, 2, \dots. \tag{2.22}$$

Utóbbi összefüggésből sorbafejtéssel és együttható-összehasonlítással kapjuk, hogy

$$Q(n, r) = \frac{1}{2^r \cdot r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (2j-r)^n (-1)^{r-j}. \tag{2.23}$$

A $Q(n, r)$ és Q_n számokat $r \leqq n \leqq 7$-re a következő táblázat adja meg:

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	Q_n
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	4	0	1	0	0	0	5
5	1	0	10	0	1	0	0	12
6	0	16	0	20	0	1	0	37
7	1	0	91	0	35	0	1	128

A Q_n számsorozatra érvényes a következő rekurzió:

$$Q_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} Q_{n-2k},$$

amelyből (2. 21) közvetlenül is levezethető. $Q(n, r)$ nyilvánvalóan csak akkor különbözhet 0-tól, ha n és r megegyező paritásúak.

3. §. Véges halmaz particiói más korlátozások mellett

Legyen B a természetes számok egy tetszőleges halmaza. Jelölje $U_n(B)$ a H_n halmaz összes olyan particióinak számát, amelynél bármely k-ra a k elemű osztályok száma B-be tartozik.

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$U_B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(B)x^n}{n!} = \prod_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{x^k}{k!}\right), \tag{3. 1}$$

ahol

$$B(y) = \sum_{l \in B} \frac{y^l}{l!}. \tag{3. 2}$$

(3. 1)-et legegyszerűbben $U_n(B)$ explicit képlete alapján bizonyíthatjuk be. (2. 4)-hez hasonlóan belátható, hogy

$$U_n(B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!}. \tag{3. 3}$$

(3. 3)-ból (3. 1) közvetlenül következik.

Legyen most A és B természetes számok két halmaza és jelölje $T_n(A, B)$ a H_n halmaz azon particióinak számát, amelyeknél minden osztály elemszáma A-hoz tartozik és minden $k \in A$-ra a partició k elemű osztályainak száma B-be tartozik. (2. 4) és (3. 2) általánosításaként adódik, hogy

$$T_n(A, B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} kl_k = n \\ k \in A \\ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \in A \\ l_k \in B}}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!} \tag{3. 4}$$

és ebből

$$T(x, A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(A, B)x^n}{n!} = \prod_{k \in A} B\left(\frac{x^k}{k!}\right), \tag{3. 5}$$

ahol $B(y)$ jelentése ugyanaz, mint (3. 2)-ben.

Végül, ha $S(n, r, A, B)$ jelöli H_n azon particióinak számát, amelyek r osztályból állnak, minden osztály elemszáma az A halmazba tartozik és minden $k \in A$-ra a k elemű osztályok száma B-be tartozik, akkor

$$S(n, r, A, B) = \sum_{\substack{\sum_{k=1}^{n} l_k = r, \ \sum_{k=1}^{n} k l_k = n \\ k \in A, \ l_k \in B}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} k!^{l_k} \cdot l_k!} \tag{3. 6}$$

és így

$$\sigma_r(x, A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n, r, A, B) x^n}{n!} \tag{3. 7}$$

egyenlő $\prod_{k \in A} B\left(\frac{w^k}{k!}\right)$-ban w^r együtthatójával.

4. §. A másodfajú Stirling-számok egy másik kombinatorikai értelmezése

Vizsgáljuk a következő kérdést: hány olyan n-edrendű variáció adható meg k különböző elemből (ezekről az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $1, 2, \ldots, k$ számok), amelyben mind a k elem legalább egyszer előfordul. E számot jelöljük $V(n, k)$-val.

Legyen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy a kívánt tulajdonsággal bíró variáció, azaz x_i az $1, 2, \ldots, k$ számok valamelyikével egyenlő $(i = 1, 2, \ldots, n)$ és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számsorozatban az $1, 2, \ldots, k$ számok mindegyike legalább egyszer előfordul. Minden ilyen sorozathoz egyértelműen hozzárendelhető az $1, 2, \ldots, n$ számok egy k osztályból álló particiója, ti. az, amelynél akkor és csak akkor soroljuk egy osztályba az i és j számot, ha $x_i = x_j$. Nyilvánvaló, hogy ily módon az $1, 2, \ldots, n$ számok minden egyes k osztályú particióját $k!$-szor kapjuk meg, mivel az $1, 2, \ldots, k$ számok és a partició osztályai között $k!$-féleképpen adható meg egyértelmű megfeleltetés. Ennélfogva

$$V(n, k) = k! S(n, k). \tag{4. 1}$$

Ezzel a másodfajú *Stirling*-számok egy, az előzőekben tárgyalttól eltérő kombinatorikai értelmezéséhez jutottunk el. (Megjegyzendő, hogy a másodfajú *Stirling*-számokat általában ezen értelmezés kapcsán szokták bevezetni; lásd pl. [11]). A (4. 1) összefüggésből egy újabb explicit képletet nyerhetünk a másodfajú *Stirling*-számokra. Ugyanis $V(n, k)$ kiszámítható „szitálással", azaz a jól ismert logikai formulával: (lásd pl. [14]).

A szóban forgó variációk számát megkaphatjuk úgy, hogy az $1, 2, \ldots, k$, elemek összes n-edosztályú variációinak számából levonjuk azok számát, amelyekben a j szám nem fordul elő $(j = 1, 2, \ldots, k)$, ehhez hozzáadjuk a kétszer levontak számát, s.i.t. Így nyerjük a

$$V(n, k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \tag{4. 2}$$

képletet és ebből az

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \tag{4. 3}$$

képletet. (4. 3)-ból leolvasható, hogy

$$S(n,k)=\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}e^{(k-j)x}\right]_{x=0} \tag{4. 4}$$

és így

$$\sigma_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n!}x^n=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}e^{(k-j)x}=\frac{(e^x-1)^k}{k!}, \tag{4. 5}$$

vagyis ezúton is eljuthatunk a másodfajú Stirling-számok generátorfüggvényének (1. 16) képletéhez. Megfordítva, (4. 3) levezethető kombinatorikai meggondolások nélkül, tisztán analitikusan (4. 5)-ből. Megjegyzendő, hogy (4. 5)-ből $S(n, k)$-ra a következő explicit képletet nyerjük:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{r_i\geqq 1\\ \Sigma r_i=n}}\frac{n!}{r_1!\,r_2!\dots r_k!}. \tag{4. 6}$$

A (4. 6) képlet csak jelölésben különbözik az (1. 20) képlettől és közvetlenül nyerhető az utóbbiból is.

Természetesen az általánosított másodfajú Stirling-számok is értelmezhetők bizonyos korlátozásoknak eleget tevő variációk számaként. Ugyanis, ha $V(n, k, A)$ jelöli az $1, 2, \dots, k$ számokból képezhető azon n-ed osztályú variációk számát, amelyekben az $1, 2, \dots, k$ számok mindegyikének előfordulásainak száma a pozitív egész számok egy megadott A részhalmazába esik, akkor

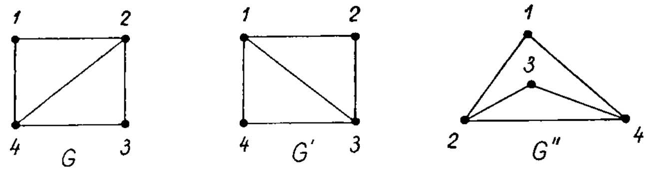
$$V(n, k, A)=k!\,S(n, k, A). \tag{4. 7}$$

5. §. Fákra vonatkozó kombinatorikai problémák

Gráfon a következőkben mindig irányítatlan, többszörös élek és hurkok nélküli gráfot értünk.[8] Egy gráfot szögpontjainak és éleinek megadásával definiálunk. Ha a G gráf szögpontjainak halmaza a $H_n=\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz, a G gráf egyértelműen jellemezhető élei halmazával, amely a H_n halmazból képezett (i, j) $(1\leqq i<j\leqq n)$ számpárok $H_n^{(2)}$ halmazának egy tetszőleges részhalmaza lehet. Az (i, j) élről azt mondjuk, hogy az i és j (ill. a j és i) szögpontokat köti össze; az (i, j) élt az i (vagy j) pontból kiinduló élnek is fogjuk nevezni. Egy G gráf szögpontjainak számát $N(G)$-vel, éleinek számát $E(G)$-vel fogjuk jelölni. A gráfokra vonatkozó kombinatorikai leszámlálási problémáknál kétféle kérdésfeltevés lehetséges. A gráf pontjait tekinthetjük megkülönböztethetőnek, vagy megkülönbözhetetlennek. Az első esetben a gráf pontjait megszámozhatjuk, ezért az első típusú problémák esetében *számozott szögpontú* gráfokról beszélünk. Az ellenkező esetben számozatlan szögpontú, vagy topológiai gráfokról beszélünk. Lényegében arról van itt szó, hogy mikor tekintünk két gráfot azonosnak. Amikor számozott szögpontú gráfokról beszélünk, a G és G' gráfokat akkor tekintjük azonosnak, ha ugyanannyi szögpontból állnak, szögpontjaik meg vannak számozva, két szögpont akkor és csak

[8] A gráfelmélet alapfogalmaira vonatkozólag l. [15], [16] és [1].

akkor van G-ben összekötve, ha a megfelelő sorszámú szögpontok G'-ben össze vannak kötve. Az ellenkező esetben akkor tekintjük a G és G' (számozatlan szögpontú) gráfokat azonosnak, ha megadható szögpontjaik között egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, hogy két szögpont G-ben akkor és csak akkor van összekötve, ha a leképezésnél nekik megfelelő pontok G'-ben össze vannak kötve. Pl. az 1. ábrán látható G és G' gráfok mint számozott szögpontú gráfok különbözőek, de mint topológiai gráfok azonosak, míg a G és G'' gráfok mint számozott szögpontú gráfok is azonosak.



1. ábra

Mi itt csak számozott szögpontú gráfokkal foglalkozunk.

*Út*nak nevezzük egy G gráf pontjainak és éleinek egy olyan $P_1 e_1 P_2 e_2 \ldots \ldots P_k e_k P_{k+1}$ sorozatát ($k=1, 2, \ldots$), hogy $P_1, P_2, \ldots, P_{k+1}$ a G gráf különböző pontjai és e_j a G gráf éle, amely a P_j és P_{j+1} pontokat köti össze ($j=1, 2, \ldots, k$). Egy *út hossza* alatt éleinek számát értjük, tehát a $P_1 e_1 \ldots e_k P_{k+1}$ út hossza k.

*Kör*nek nevezzük a G gráf pontjainak és éleinek egy olyan $P_1 e_1 P_2 e_2 \ldots P_k e_k$ sorozatát ($k=3, 4, \ldots$), hogy $P_1, P_2, \ldots, P_k$ a G gráf különböző pontjai, e_j a G gráf éle, amely a P_j és P_{j+1} pontokat köti össze ($j=1, 2, \ldots, k-1$) és e_k a G gráf éle, amely a P_k és P_1 pontokat köti össze.

Egy G gráfot *összefüggő*nek nevezünk, ha bármely két pontját összeköti legalább egy út. A G gráfot *fá*nak nevezzük, ha összefüggő és nem tartalmaz kört.

Egy tetszőleges gráf szögpontjai között az úttal való összeköthetőség egy ekvivalencia reláció. Ily módon minden gráf összefüggő gráfokra bontható, amelyek között nincs él. Ezeket az összefüggő gráfokat az eredeti gráf (összefüggő) *komponenseinek* nevezik.

Egy gráfot, amelynek minden komponense fa, *erdő*nek nevezünk.

Könnyen beláthatók a következő egyszerű állítások.

A) Egy fa bármely két pontját egyetlen egy út köti össze.

B) Egy G összefüggő gráfban $E(G) \geqq N(G)-1$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G fa.

A) abból következik, hogy ha a P és Q pontokat két út kötné össze és P-ből elindulva az első úton R volna az első olyan P-től különböző szögpont, amely a második úthoz is hozzátartozik, úgy P-ből az első úton R-be menve és onnan a második úton P-be visszatérve egy G-hez tartozó kört kapnánk, tehát G nem volna fa.

B) a következőképpen látható be: Ha G egy összefüggő gráf, lehetséges, hogy bizonyos élei elhagyása után is még összefüggő marad. Hagyjunk el G-ből annyi élt, hogy minden további él elhagyásával G már megszűnik összefüggő lenni. Azt állítjuk, hogy az így nyert G^* gráf fa. Ha ugyanis G^* tartalmazna egy kört, ennek tetszőleges élét elhagyva, G^* még összefüggő maradna. Elég tehát belátni, hogy egy n szögpontú fa éleinek száma $n-1$ és hogy egy n szögpontú és $n-1$ élű összefüggő gráf fa. Az első állítás indukcióval látható be; az állítás $n=1$-re nyilván igaz, tegyük fel, hogy $n<m$-re már bebizonyítottuk és legyen G egy m szögpontú fa. Legyen P G egy tetszőleges szögpontja. Ha G-ből elhagyjuk a P pontot, és az összes P-ből kiinduló éleket, G-ből egy G' erdőt kapunk. Ha G' komponenseinek száma k, úgy az indukció szerint G'-ben $m-k-1$ él van; mivel P-ből G' minden komponensébe pontosan egy él kell hogy vezessen, G eleinek száma $m-k-1+k=$ $=m-1$. A második állítást úgy láthatjuk be, hogy ha G egy n szögpontú és $n-1$ élű összefüggő gráf volna, amely tartalmaz egy k szögpontú kört, úgy e kör pontjait egyetlen ponttá összehúzva úgy, hogy bármely más pontot, amely e kör valamely pontjával össze volt kötve, az új ponttal összekötünk, egy olyan összefüggő gráfot kapnánk, amelyben $n-k+1$ pont és $n-k-1$ él volna, ami az előbbiek szerint lehetetlen.

Egy G gráf egy P pontja *fok*án a P-ből kiinduló élek számát értjük. A 0 fokú pontokat *izolált pont*oknak, az 1 fokú pontokat *vég*pontoknak nevezzük. Igazak a következő állítások:

C) Egy $n\geqq 2$ szögpontú fának legalább 2 és legfeljebb $n-1$ végpontja van.

C) a következőképpen látható be: Legyen P G-nek egy tetszőleges pontja. Ha P végpont, vegyük a P-ből kiinduló (egyik) leghosszabb utat; ennek másik végpontja G-nek is végpontja. Ha P nem végpont, legalább 2 él, e és e' indul ki P-ből, a P-ből kiinduló és e-vel, ill. e'-vel kezdődő (egyik) leghosszabb út másik végpontja G-nek is végpontja.

Jelölje t_n az n megadott (számozott) szögponttal bíró különböző fák számát. Elsőnek A. CAYLEY [17] bizonyította, hogy

$$t_n = n^{n-2}. \tag{5.1}$$

Az (5.1) ún. *Cayley-féle képlet* legegyszerűbb bizonyítása A. PRÜFER [18] módszerével történhet. Be fogjuk bizonyítani e módszerrel, hogy az $1, 2, \ldots, n$ szögpontokkal bíró fák F_n halmaza egy-egyértelműen leképezhető az $1, 2, \ldots, n$ elemekből képezhető összes $n-2$ tagú sorozatok halmazára; e leképezés létezéséből (5.1) már következik, mivel a szóban forgó sorozatok száma nyilván n^{n-2}.

A szóban forgó leképezés a következő: legyen G egy n szögpontú fa, amelynek szögpontjai az $1, 2, \ldots, n$ számokkal vannak megszámozva. Keressük meg G végpontjai közül a legnagyobb sorszámút; legyen ez P_{y_1}. Legyen x_1 azon (egyetlen) G-beli szögpont sorszáma, amellyel P_{y_1} össze van kötve. Hagyjuk el G-ből a P_{y_1} pontot és a $P_{y_1}P_{x_1}$ élt; az így nyert fát nevezzük G'-nek. Keressük meg G' végpontjai közül a legnagyobb sorszámút; legyen ez P_{y_2}. Legyen x_2 azon (egyetlen) G'-beli szögpont sorszáma, amellyel P_{y_2} össze van kötve G'-ben. Hagyjuk el G'-ből a P_{y_2} pontot és a $P_{y_2}P_{x_2}$ élt; az így nyert fát jelöljük G''-vel. Folytassuk ezt az eljárást addig, amíg csak egy két szögpontú fa marad. Rendeljük hozzá a G fához az $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ számsorozatot. Be fogjuk bizonyítani, hogy ily módon az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezhető összes lehetséges $n-2$ tagú sorozatot megkaphatjuk és különböző sorozatokhoz különböző fák tartoznak.

Az első állítás bizonyítása úgy végezhető el, hogy tetszőleges, az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezett $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ sorozathoz megszerkesztünk egy fát, amelyhez éppen ezt a sorozatot rendeli hozzá a Prüfer-féle algoritmus. Legyenek $z_1, \ldots, z_k$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ sorozatban nem fordulnak elő (nyilván $k \geqq 2$) csökkenően elrendezve. Kössük össze a P_{x_1} és P_{z_1} pontokat. Ezek után vizsgáljuk az $(x_2, \ldots, x_{n-2})$ és $(z_2, \ldots, z_k)$ sorozatokat. Ha x_1 nem fordul elő az $(x_2, \ldots, x_{n-2})$ sorozatban, írjuk be x_1-et a $(z_2, \ldots, z_k)$ sorozatba úgy, hogy a sorozat monoton csökkenő maradjon; ha azonban x_1 előfordul az $x_2, \ldots, x_{n-2}$ számok között, úgy ez a lépés elmarad. A $(z_2, \ldots, z_k)$ sorozatból ily módon létrejött sorozatot jelölje $(z_1', z_2', \ldots, z_{k'}')$. Kössük össze P_{x_2}-t és $P_{z_1'}$-t. Az eljárást addig folytatjuk, amíg az x_i-k el nem fogynak; a megmaradó két z-nek megfelelő két pontot is összekötjük. Azt, hogy ily módon mindig fát kapunk, indukcióval láthatjuk be. Ugyancsak indukcióval láthatjuk be, hogy különböző sorozatokhoz különböző fák tartoznak és megfordítva.

A t_n sorozatra fennáll a következő rekurzió:

(5.2) $$2(n-1)t_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} t_k t_{n-k} \cdot k(n-k).$$

Ugyanis egy n szögpontú fát felépíthetünk a következőképpen: kiválasztunk az n pontból k pontot $(1 \leqq k \leqq n-1)$, ezekből készítünk egy G_1 fát (ez t_k-féleképpen lehetséges), a megmaradó $n-k$ pontból is készítünk egy G_2 fát (ez t_{n-k}-féleképpen lehetséges), végül G_1 egy tetszőleges pontját összekötjük G_2 egy tetszőleges pontjával. Ilyen módon minden egyes n szögpontú fát $2(n-1)$-féleképpen nyerünk, hiszen a G_1-et G_2-vel összekötő él a végeredményként nyert G fa $n-1$ éle közül bármelyik lehet, és ha ezt az élt G-ből elhagyjuk, a fa két fára esik szét, amelyek közül bármelyik lehet G_1.

(5.2)-ből, bevezetve az

(5.3) $$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k x^k}{(k-1)!}$$

jelölést, következik, hogy

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)t_n x^n}{n!} = f^2(x);$$

így nyerjük, hogy

$$2y' - \frac{2y}{x} = 2yy',$$

tehát

$$\frac{dx}{x} = dy\left(\frac{1}{y} - 1\right),$$

azaz (figyelembe véve, hogy $f(0) = 0$)

(5.4) $$x = ye^{-y}.$$

Ilyen módon azt az eredményt kapjuk, hogy az

(5.5) $$y = G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1} x^k}{k!}$$

sor az $x = ye^{-y}$ függvény inverz függvényének a sorfejtése. E sorfejtést természetesen tisztán analitikus módszerrel is előállíthatjuk (az ún. *Bürmann—Lagrange* sorfejtésre vonatkozó általános képletből[9]; figyelemre méltó azonban, hogy az előbbiekben ennek az analitikus feladatnak a megoldását egy kombinatorikai eredményből a (Cayley-féle (5.1) képletből) nyertük. Megfordítva, a fenti meggondolásból (5.1) egy újabb bizonyítása adódik, felhasználva a (5.2) rekurzív összefüggést és az $x=ye^{-y}$ függvény inverz függvényének sorfejtését (amelyet e célból analitikus módszerrel direkt bebizonyíthatunk). Ugyanis (lásd [19] l. c.) ha $x=\dfrac{y}{\varphi(y)}$, akkor

$$y=\sum\frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}\varphi(t)^n}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}.$$

Ily módon, ha $x=ye^{-y}$,

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}n^{n-1}.$$

Megjegyzendő, hogy az $x=ye^{-y}$ függvény inverz függvénye (5.5) sorfejtése alapján tisztán analitikus bizonyítást nyerhetünk az (5.2) azonosságra, tehát arra, hogy

$$2(n-1)n^{n-2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}. \tag{5.6}$$

A *Prüfer*-féle módszer felhasználható számos más, fák leszámlálására vonatkozó feladat megoldására is.

Vizsgáljuk meg például a következő kérdést: Hány olyan n (számozott) szögpontú fa van, amelynek pontosan r végpontja van $(2\leqq r\leqq n-1)$? Nevezzük a *Prüfer*-féle leképezésnél egy n szögpontú fához hozzárendelt $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ számsorozatot az illető fa *profil*jának. Nyilvánvaló, hogy ha P_k a G fa egy tetszőleges szögpontja, a k szám a G fa profiljában $d(P_k)-1$-szer fordul elő, ahol $d(P_k)$ a P_k pont foka G-ben; G végpontjai tehát azok és csak azok a P_k pontok, amelyekre k nem fordul elő G profiljában.

Ha tehát G-nek pontosan r végpontja van, és ezek a $P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots, P_{a_r}$ pontok, úgy G profilja az $1, 2, \ldots, n$ sorozat azon $b_1, b_2, \ldots, b_{n-r}$ elemeiből áll, amelyek az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ számoktól különböznek, és ez utóbbi számok legalább egyszer előfordulnak G profiljában. Mármost $n-r$ elemből olyan $n-2$ tagú sorozatot, amelyben az $n-r$ elem mindegyike ténylegesen előfordul, amint a 4. §-ban láttuk, $(n-r)!\,S(n-2, n-r)$-féleképpen készíthetünk, és így az n számozott szögpontú és pontosan r végponttal bíró fák száma

$$t_{n,r}=\binom{n}{r}(n-r)!\,S(n-2,n-r)=\frac{n!}{r!}S(n-2,n-r). \tag{5.7}$$

Azt, hogy

$$\sum_{r=2}^{n-1}\frac{n!}{r!}S(n-1,n-r)=n^{n-2} \tag{5.8}$$

[9] L. pl. [19].

persze közvetlenül is beláthatjuk, ha (1.10)-ben n helyébe $(n-2)$-t és u helyébe n-et helyettesítünk. Ugyanis (1.10)-ből

$$\sum_{r=2}^{n-1} \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l)n(n-1)\ldots(n-l+1) = n^{n-2}.$$

Az elmondottakból az is következik, hogy ha $t_{n,r}(A)$ jelöli azon n szögpontú fák számát, amelyeknek r végpontjuk van és amelyekben az 1-nél magasabb fokú pontok fokszámai mind az A halmazba tartoznak, ahol A a 2, 3, ... számsorozat egy tetszőleges részhalmaza és A' jelöli az összes $a-1$ alakú számok halmazát, ahol $a \in A$, akkor

$$(5.9) \qquad t_{n,r}(A) = \binom{n}{r} S(n-2, n-r, A')(n-r)! \qquad (2 \leqq r \leqq n-1).$$

Ha tehát $t_n(A)$ jelöli az összes olyan n-szögpontú fák számát, amelyek *1-nél magasabb fokú* szögpontjainak fokai az A halmazba tartoznak, akkor (2.17) szerint

$$(5.10) \qquad t_n(A) = \sum_{r=2}^{n-1} t_{n,r}(A) = \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l, A')n(n-1)\ldots(n-l+1) =$$
$$= \Phi_{A'}(n, n-2).$$

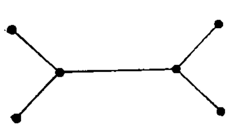
(5.10) a *Cayley*-formula általánosításának tekinthető.

Speciálisan, ha pl. A a $\{2\}$ halmaz, tehát A' az 1 számból mint egyetlen elemből álló halmaz, $\Phi_{A'}(n, n-2) = \frac{n!}{2}$, ugyanis a H_{n-2} halmazon értelmezett azon függvények száma, amelyek az $1, 2, \ldots, n$ értékeket vehetik fel és mindegyiket csak egyszer, $\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2}$. Valóban, az olyan n-szögpontú fák, amelyekben minden pont foka 1 vagy 2, egyetlen él által alkotott útból állnak és ezek száma $\frac{n!}{2}$. Másik példaként vizsgáljuk azt az esetet, ha A a $\{3\}$ halmaz. Ez esetben A' a 2 számból mint egyetlen elemből álló halmaz és így

$$\Phi_{A'}(n, n-2) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 1, 3\ldots(2k-3)\binom{2k}{k-1}(k-1), & \text{ha } n = 2k \end{cases}$$

adja meg azon n számozott szögpontú fák számát, amelyekben minden pont foka 1 vagy 3.

Például ha $n=6$, $\Phi_{A'}(6,4) = 90$. Az összes 6 szögpontú fák, amelyekben minden pont foka 1 vagy 3, a 2. ábrán látható típusúak, és leszámlálással is könnyen belátható, hogy 90 ilyen fa van.



2. ábra

Az (5.7) képlet alapján kiszámíthatjuk az n szögpontú fák végpontjainak átlagos számát. Ha e számot M_n-nel jelöljük, úgy tehát (1.10) szerint

$$M_n = \frac{1}{n^{n-2}} \sum_{r=2}^{n-1} r t_{n,r} = \tag{5.11}$$

$$= \frac{1}{n^{n-2}} \sum_{l=1}^{n-2} S(n-2, l) n(n-1)\dots(n-l) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \frac{1}{e}, \tag{5.12}$$

vagyis egy n szögpontú fának közelítőleg átlagosan $\frac{n}{e}$ végpontja van. Az (5.7) képletből kiindulva bebizonyítottam (l. [20]), hogy ha az n^{n-2} számozott szögpontú fa közül egyet találomra kiválasztunk (oly módon, hogy minden egyes fa ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kiválasztásra) és v_n jelöli e találomra választott fa végpontjainak számát, úgy a v_n valószínűségi változó, ha $n \to \infty$, határértékben normális eloszlású $\frac{n}{e}$ várható értékkel és $\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}$ szórással, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{v_n - \frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{5.13}$$

Speciálisan (5.13)-ból következik, hogy az n szögpontú fáknak körülbelül a felének a végpontjainak száma kisebb $\frac{n}{e}$-nél.

Alábbiakban közöljük (5.13) [20]-ban adott bizonyításának egy egyszerűsítését. Először számítsuk ki v_n szórásnégyzetét, amelyet D_n^2-tel jelölünk. (1.10) szerint

$$\sum_{r=2}^{n-1} r(r-1) t_{n,r} = n(n-1)(n-2)^{n-2}, \tag{5.14}$$

tehát tekintettel (5.11)-re

$$D_n^2 = n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-2} + n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} - n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-2} \tag{5.15}$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n^2}{n} = \frac{e-2}{e^2}. \tag{5.16}$$

Ahhoz, hogy (5.13)-at bebizonyítsuk, kimutatjuk, hogy $\dfrac{v_n - \frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}}$ karakterisztikus függvénye konvergál a normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez, vagyis, hogy t minden valós értékére

$$(5.17)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{r=2}^{n-1}\frac{t_{n,r}}{n^{n-2}}e^{\frac{it(er-n)}{\sqrt{n(e-2)}}}=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Mármost ennek bizonyításához előbb egy igen egyszerű lemmát bizonyítunk be, amely itt (és más hasonló esetekben is) jól használható.

LEMMA: *Legyen $F_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ eloszlásfüggvények egy sorozata és*

$$(5.18)\qquad \varphi_n(t)=\int_{a_n}^{b_n}e^{ixt}\,dF_n(x),$$

ahol $a_n<b_n$.

Ha t minden valós értékére

$$(5.19)\qquad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t),$$

ahol $\varphi(t)$ egy karakterisztikus függvény, akkor

$$(5.20)\qquad \lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$$

az $F(x)$ eloszlásfüggvény minden x folytonossági pontjában.

A lemma bizonyítása. Mivel (5.19) $t=0$-ra is fennáll és $\varphi(t)$ feltevésünk szerint karakterisztikus függvény, tehát $\varphi(0)=1$; ebből következik, hogy

$$(5.21)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}dF_n(x)=1$$

és így, hogy

$$(5.22)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{a_n}dF_n(x)+\int_{b_n}^{+\infty}dF_n(x)=0.$$

(5.18)-ból és (5.22)-ből azonban már következik, hogy

$$(5.23)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF_n(x)=\varphi(t),$$

vagyis az $F_n(x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye konvergál $\varphi(t)$-hez, és így a karakterisztikus függvényekre vonatkozó folytonossági tétel szerint (l. [8]) fennáll (5.20).

Mármost helyettesítsük (1.10)-be $u=n-it\sqrt{n}$-t. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=2}^{n-1}\frac{t_{n,r}}{n^{n+2}}\prod_{j=r+1}^{n}\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{j}\right)=\left(1-\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{n-2}.$$

Ha most $\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}$, akkor

$$\prod_{j=r+1}^{n}\left(1-\frac{it\sqrt{n}}{j}\right)=e^{-it\sqrt{n}+\frac{it}{\sqrt{n}}\left(r-\frac{n}{e}\right)+\frac{t^2(e-1)}{2}+o(1)},$$

ahol a $o(1)$-gyel jelölt maradéktag $\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}$ mellett r-ben egyenletesen tart 0-hoz. Így tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\left|r-\frac{n}{e}\right|<n^{2/3}}\frac{t_{n,r}}{n^{n-2}}e^{\frac{ite}{\sqrt{n}}\left(\frac{r-\frac{n}{e}}{\sqrt{e-2}}\right)}=e^{-t^2/2}. \tag{5.24}$$

Mármost jelölje $F_n(x)$ a $\dfrac{\nu_n-\frac{n}{e}}{\frac{1}{e}\sqrt{n(e-2)}}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Mivel (5.24) bal oldala felírható az

$$\int_{-\frac{en^{1/6}}{\sqrt{e-2}}}^{+\frac{en^{1/6}}{\sqrt{e-2}}} e^{itx}\,dF_n(x)$$

alakban, tehát lemmánkból (5.17) következik.

6. §. Egy további fa-leszámlálási probléma

Páros körüljárásúnak nevezünk egy G gráfot akkor, ha szögpontjai H halmazának megadható egy olyan, két osztályból álló particiója, hogy ha ezen osztályok H_1 és $H_2=H-H_1$, akkor G bármely éle egy H_1-beli szögpontot egy H_2-beli szögponttal köt össze. Ismeretes, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros körüljárású, ha nem tartalmaz páratlan sok élből álló kört[10]. E tétel bizonyítása a következő. Ha G olyan gráf, amely nem tartalmaz páratlan sok élből (tehát páratlan sok szögpontból) álló kört, akkor azt kell kimutatnunk, hogy szögpontjai úgy oszthatók két idegen osztályba, hogy G bármely éle különböző osztályba tartozó szögpontokat köt össze. Ennek bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G összefüggő, ugyanis, ha egy gráf minden komponense páros körüljárású, akkor nyilván az egész gráf is az. Mármost, ha G összefüggő, induljunk el G egy tetszőleges P_1 szögpontjából: ezt osszuk be az 1. osztályba. G összes olyan szögpontjait, amelyek G-ben P_1-gyel össze vannak kötve, osszuk be a 2. osztályba. Ezek után G összes olyan szögpontjait, amelyek össze vannak kötve egy, már a 2. osztályba beosztott szögponttal, osszuk be az 1. osztályba; ezután G minden olyan szögpontját, amely egy már 1. osztályba beosztott szögponttal össze van kötve, osszuk be a 2. osztályba, s.i.t. Ezt az eljárást folytassuk addig, amíg G minden pontja be nincs osztva az 1., ill. 2. osztályba. Az a feltétel, hogy G-ben nincs páratlan kör, biztosítja, hogy soha nem kerülünk konfliktusba, azaz nem fordulhat elő, hogy

[10] Az ilyen kört (amely természetesen ugyanannyi pontot tartalmaz, mint élt, tehát pontjainak száma is páratlan), röviden páratlan körnek nevezzük.

egy pontot mind az 1., mind pedig a 2. osztályba be kellene osztanunk. Az a feltétel, hogy G összefüggő, biztosítja, hogy G összes pontjait beosztjuk vagy az 1. vagy a 2. osztályba. A tétel másik állítása (hogy ti. páros körüljárású gráf nem tartalmaz páratlan kört) nyilvánvaló.

Az elmondottakból az is következik, hogy egy *összefüggő* páros körüljárású gráf esetében a szögpontok halmazának $H=(H_1, H_2)$ particiója egyértelműen meg van határozva.

A bebizonyított tétel szerint *minden fa páros körüljárású*, hiszen semmilyen kört nem tartalmaz, így páratlan kört sem. A következőkben azonban olyan páros körüljárású fák leszámlálásával fogunk foglalkozni, amelyeknél a szögpontok két osztálya előre meg van adva. Jelölje $v(n, m)$ azon fák számát, amelyek szögpontjai a $P_1, \ldots, P_n$ és $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ pontok, és amelyek minden egyes éle egy P_k $(1 \leqq k \leqq n)$ pontot köt össze egy Q_l $(1 \leqq l \leqq m)$ ponttal.

Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$v(n, m) = n^{m-1} m^{n-1}. \tag{6.1}$$

A (6.1) képletet először SCOINS [24] bizonyította be; alábbiakban (6.1)-re egy igen egyszerű új bizonyítást adunk az előző §-ban ismertetett *Prüfer*-féle módszer segítségével.

Ha egy, a megadott típusú fára alkalmazzuk a *Prüfer*-féle algoritmust, azzal a különbséggel, hogy az eljárást a legnagyobb indexű P-végponttal kezdjük és egy fához most két számsorozatot rendelünk hozzá, egy $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ és egy $(y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{n-1})$ sorozatot úgy, hogy amikor egy végpontot elhagyunk és az elhagyott végpont a P_k ponttal van összekötve, akkor a k számot az x-ek közé írjuk, míg ha az elhagyott végpont egy Q_l ponttal van összekötve, l-et az y-ok közé írjuk. Ilyen módon, mint könnyen belátható, $m-1$ darab x-et és $n-1$ darab y-t kapunk, ugyanis az eljárás végén egyetlen egy él marad meg, amely egy P pontot egy Q ponttal köt össze, tehát annyi x-et kapunk, ahányszor egy Q pontot elhagyunk, vagyis $m-1$-et és megfordítva: annyi y-t kapunk, ahányszor egy P pontot elhagyunk, tehát $n-1$-et, és ily módon minden vizsgált típusú fához egy az $1, 2, \ldots, n$ számokból álló $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ és egy az $1, 2, \ldots, m$ számokból álló $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ sorozat van hozzárendelve és könnyen belátható az is, hogy megfordítva, minden ilyen sorozatpárhoz egy kívánt típusú fa tartozik. Az $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ és $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ sorozatokhoz tartozó fát a következőképpen konstruáljuk meg: Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül azok, amelyek az $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ sorozatból hiányoznak, csökkenőleg elrendezve és legyenek $b_1, \ldots, b_v)$ az $1, 2, \ldots, m$ számok közül azok, amelyek az $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sorozatból hiányoznak, csökkenőleg elrendezve. Mármost a keresett fát úgy konstruáljuk, hogy először a P_{a_1} pontot összekötjük a Q_{y_1} ponttal, ezután megvizsgáljuk, hogy y_1 előfordul-e az $y_2, \ldots, y_{n-1}$ sorozatban: ha nem, úgy y_1-et a nagyság szerint megfelelő helyre beírjuk a b-k közé. Ezután a b-sorozat első elemét összekötjük P_{x_1}-gyel, s.i.t.

Azt, hogy ilyen módon mindig egy előírt típusú fát kapunk és hogy a hozzárendelés egyértelmű, indukcióval láthatjuk be. Ezzel (6.1)-et bebizonyítottuk.

(6.1) segítségével egy érdekes azonosságot nyerhetünk. Ugyanis egy tetszőleges fa kétféleképpen fogható fel páros körüljárású gráfként. Az összes n szögpontú fákat megkapjuk tehát, és mindegyiket pontosan 2-szer, ha az összes lehetséges módon 2 nem üres osztályba osztjuk az $1, 2, \ldots, n$ pontokat és ezen osztályokból az összes lehetséges módon páros körüljárású fát készítünk. (6.1)-re és (5.1)-re való tekintettel nyerjük így a

$$(6.2)\qquad 2n^{n-2}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{n-k-1}\cdot(n-k)^{k-1}$$

azonosságot.

7. §. Fák megoszlása magasságuk szerint

Egy G fa szögpontjai legyenek $P_1, \ldots, P_n$. G-nek *a* P_1 *pont fölötti magasságán* a P_1-ből kiinduló leghosszabb út hosszát nevezzük; a G fa P_1 pont fölötti magasságát $h_{P_1}(G)$-vel jelöljük.

Jelölje $g_n(k)$ a $P_1, \ldots, P_n$ (számozott) szögpontokból álló azon fák számát, amelyeknek a P_1 pont fölötti magassága $\leqq k$ $(k=0, 1, \ldots)$. Nyilván $g_n(k)=t_n$, ha $k\geqq n-1$ és $n\geqq 1$, hiszen egy n szögpontú G fa magasságára $h_{P_1}(G)\leqq n-1$.

Vizsgáljuk meg a $g_n(k)$ $(n=1, 2, \ldots)$ számsorozat (exponenciális) generátorfüggvényét, amelyet a

$$(7.1)\qquad G_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(k)}{(n-1)!}x^n$$

képlettel definiálunk.

A $g_n(k)$ számokra fennáll a következő rekurziós formula:

(7.2)

$$g_n(k)=\sum_{l=1}^{n-1}\binom{n-1}{l}\sum_{\substack{l\\ \sum_{i=1} m_i=n-1}}\frac{(n-l-1)!}{(m_1-1)!\,(m_2-1)!\ldots(m_l-1)!}\cdot g_{m_1}(k-1)\ldots g_{m_l}(k-1).$$

(7.2)-t a következőképpen láthatjuk be: Jelölje E a G fa azon szögpontjainak halmazát, amelyek a P_1 ponttal éllel vannak összekötve. Ha E elemeinek száma l $(1\leqq l\leqq n-1)$, akkor ez az l pont $\binom{n-1}{l}$-féleképpen választható. A megmaradó $n-l-1$ pont nyilván l osztályra esik szét, annak megfelelően, hogy P_1-ből E mely pontján át vezet hozzá út. Jelöljék $Q_1, \ldots, Q_l$ a P_1-gyel közvetlenül összekötött pontokat és legyen m_i-1 azon pontok száma, amelyekbe P_1-ből vezető út Q_i-n halad át $(i=1, 2, \ldots, l)$. Ez esetben az $n-l-1$ pontot az l osztályra nyilván $\frac{(n-l-1)!}{(m_1-1)!\ldots(m_l-1)!}$ -féleképpen lehet elosztani. Az i-edik osztály pontjaiból és a Q_i pontból nyilván $g_{m_i}(k-1)$ -féleképpen lehet Q_i fölött legfeljebb $k-1$ magasságú fát alkotni és akárhogyan is végezzük ezt el, e fákból a Q_i pontokat P_1-gyel összekötve egy P_1 felett legfeljebb k magasságú fát kapunk. Ezzel (7.2)-t bebizonyítottuk. (7.2)-t $\frac{x^n}{(n-1)!}$-sal beszorozva és n szerint (rögzített k mellett) összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n(k)x^n}{(n-1)!}=x\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m(k-1)x^{m-1}}{(m-1)!}\right)^l,$$

tehát

$$G_k(x) = x \cdot e^{G_{k-1}(x)}. \tag{7.3}$$

Mivel $g(0)=1$, $g_n(0)=0$, ha $n \geqq 2$, tehát

$$G_0(x)=x. \tag{7.4}$$

Így (7.3)-ból rekurzióval $G_k(x)$-et meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= xe^x \\ G_2(x) &= xe^{xe^x} \\ G_3(x) &= xe^{xe^{xe^x}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

s. i. t.

A (7.3) rekurziós képlet J. RIORDANtól származik (l. [21]). Megadható $g_n(k)$-ra explicit képlet is:

$$g_n(k) = \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_k=n-1 \\ l_i \geqq 0}} \frac{(n-1)!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!} l_1^{l_2} l_2^{l_3} \ldots l_{k-1}^{l_k}. \tag{7.6}$$

(7.6) a következőképpen látható be: ha egy n szögpontú fa magassága P_1 felett $\leqq k$, akkor P_1-től különböző szögpontjai k osztályba sorolhatók aszerint, hogy az őket P_1-gyel összekötő út hossza $1, 2, \ldots, k$. Jelölje O_j azon pontok halmazát, amelyeket P_1-gyel j hosszúságú út köt össze ($j=1, 2, \ldots, k$) és l_j az O_j halmaz elemeinek számát. Nyilván minden O_1-be tartozó szögpont össze van kötve P_1-gyel, minden O_2-be tartozó szögpont össze van kötve O_1 egyetlen egy pontjával, és általában O_j minden pontja össze van kötve O_{j-1} egyetlen egy pontjával. Mivel (7.6) obb oldala éppen a $P_2, \ldots, P_n$ pontok k osztályra való lehetséges eloszlásainak és az említett módon való összekötéseinek számát adja meg, tehát (7.6) fennáll.

Megjegyzendő, hogy (7.6) úgy értendő, hogy 0^0 mindig 1-et jelent. Szorítkozhatnánk (7.6)-ban az $l_1, \ldots, l_k$ egész számoknak olyan sorozataira, amelyekre amellett, hogy $\sum_{1}^{k} l_i = n-1$ és $l_i \geqq 0$, az is igaz, hogy ha $l_i=0$, akkor $l_{i+1}=0$ $(1 \leqq i \leqq \leqq k-1)$, ugyanis azon l_i sorozatok adaléka, amelyekre ez nem teljesül, úgyis O, de éppen ezért nem szükséges az említett feltételnek eleget nem tevő sorozatokat kizárni. (7.6)-hoz hasonlóan látható be a következő képlet is

$$d_n(k) = g_n(k) - g_n(k-1) = \sum_{\substack{\sum_1^k l_i = n-1 \\ l_i \geqq 1}} \frac{(n-1)!}{l_1!\ldots l_k!} l_1^{l_2} l_2^{l_3} \ldots l_{k-1}^{l_k} \tag{7.7}$$

$d_n(k)$ nyilván azon n szögpontú fák számát jelenti, melyek P_1 feletti magassága pontosan k-val egyenlő. (7.7) persze levezethető (7.6)-ból is.

Tekintettel arra, hogy $g_n(k) = t_n = n^{n-2}$, hacsak $k \geqq n-1$, tehát

$$\lim_{k \to \infty} G_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} x^n = G(x), \tag{7.8}$$

ahol $y=G(x)$ inverz függvénye az $x=ye^{-y}$ függvénynek.

A nyert eredményeket a következőképpen általánosíthatjuk: jelölje $d_n(k, l)$ azon n-szögpontú fák számát, amelyeknek magassága P_1 felett pontosan k, és amelyekben pontosan l pont van éllel összekötve P_1-gyel. Akkor

$$d_n(k, l) = \frac{1}{l!} \sum_{\substack{\sum_2^k l_i = n-1-l \\ l_i \geq 1}} \frac{(n-1)!}{l_2! \dots l_k!} l^{l_2} l_2^{l_3} \dots l_{k-1}^{l_k}. \tag{7.9}$$

A $d_n(k, l)$ számsorozatra fennáll a

$$d_n(k, l) = \binom{n-1}{l} \sum_{h=1}^{n-1-l} l^h d_{n-l}(k-1, h). \tag{7.10}$$

Egy másik irányú általánosítását nyerjük képleteinknek, ha azon n szögpontú fák számát vizsgáljuk, amelyek magassága P_1 felett k és amelyekben pontosan l olyan pont van, amelyet P_1-gyel k hosszúságú út köt össze. Jelöljük e fák számát $t_n(k, l)$-lel. Akkor

$$t_n(k, l) = \frac{1}{l!} \sum_{l_1 + \dots + l_{k-1} = n-1-l} \frac{(n-1)!}{l_1! \dots l_{n-1}!} l^{l_2} \dots l_{k-2}^{l_{k-1}} l_{k-1}^{l} \tag{7.11}$$

és fennáll a következő rekurzió

$$t_n(k, l) = \binom{n-1}{l} \sum_{h=1}^{n-1-l} h^l t_{n-l}(k-1, h). \tag{7.12}$$

Vizsgáljuk most meg a $t_n(k, l)$ számsorozat kettős generátorfüggvényét rögzített k mellett, vagyis a

$$F_k(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t_n(k, l)}{(n-1)!} x^n \cdot z^l \tag{7.13}$$

függvényt. E függvényekre könnyen igazolhatjuk az

$$F_k(x, z) = F_{k-1}(xe^{xz}) \tag{7.14}$$

rekurziót. Mivel $F_1(x, z) = xe^{xz}$, tehát

$$\begin{aligned} F_2(x, z) &= xe^{xe^{xz}} \\ F_3(x, z) &= xe^{xe^{xe^{xz}}} \\ &\vdots \\ \text{s. i. t.}& \end{aligned} \tag{7.15}$$

Világos, hogy (7.14) mellett $F_k(x, z)$-re érvényes az

$$F_{k+1}(x, z) = xe^{F_k(x, z)} \tag{7.16}$$

rekurzió is, továbbá, hogy az $F_k(x, z)$ függvények a $G_k(x)$ függvényekkel a következő módon függnek össze:

$$F_k(x, 1) = G_k(x) \tag{7.17}$$

$$F_k(x, 0) = G_{k-1}(x) \tag{7.18}$$

$$F_k(x, e^x) = G_{k+1}(x). \tag{7.19}$$

Tehát (7.16)-ból speciális esetként kapjuk meg (7.3)-at a $z=1, z=0, z=e^x$ helyettesítések bármelyikével.

Nemrégiben SZEKERES GYÖRGYgyel megvizsgáltuk a $\frac{d_n(k)}{n^{n-2}}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ eloszlást. A $G_k(x)$ generátorfüggvényre vonatkozó (7.3) rekurzió, valamint a függvényiteráció elmélete (l. [22]) segítségével sikerült bebizonyítani, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq x\sqrt{2n}} \frac{d_n(k)}{n^{n-2}} = D(x) \tag{7.20}$$

határeoszlásfüggvény (l. [23]), ahol

$$D(x) = \frac{4\pi^{5/2}}{x^3} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 e^{-\frac{\pi^2 p^2}{x^2}}. \tag{7.21}$$

A $D(x)$ eloszlásfüggvény kifejezhető ismert azonosságok (pl. a *Poisson*-formula) segítségével a

$$D(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 x^2}(1-2\nu^2 x^2) \tag{7.22}$$

alakban is. A $D'(x)=d(x)$ sűrűségfüggvény a következő alakban állítható elő:

$$d(x) = 4x\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2(2\nu^2 x^2-3)e^{-\nu^2 x^2}\right). \tag{7.23}$$

E képlet alapján kiszámíthatók a $D(x)$ eloszlásfüggvény összes momentumai

$$M_S = \int_0^\infty x^S g(x)\,dx = 2\Gamma\left(\frac{S}{2}+1\right)(S-1)\zeta(S), \tag{7.24}$$

ahol $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ a *Riemann*-féle zeta-függvény.

Speciálisan $S=1$-re (7.24)-ből határátmenettel adódik

$$M_1 = \sqrt{\pi}. \tag{7.25}$$

Így tehát egy n szögpontú fa egy adott pontja feletti magasságának átlagára aszimptotikusan 2,50663 $\sqrt{n}$ adódik. (7.24)-ből kiszámítható a $D(x)$ eloszlásfüggvény szórásnégyzete is:

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = \frac{\pi(\pi-3)}{3}. \tag{7.26}$$

Nem érdektelen megjegyezni, hogy mielőtt még ezt bebizonyítottuk volna, PALÁSTI ILONA a *Monte-Carlo* módszerrel empirikusan vizsgálta a fák átlagos magasságát és pl. $n=90$-re négy kísérletben átlagos magasságként 19,75 adódott; összehasonlítva ezt a SZEKERES GYÖRGYgyel bebizonyított elméleti eredménnyel, mely szerint egy 90 szögpontú fa átlagos magassága $\sim$ 23,76, a megegyezés elég jónak mondható. Megemlítendő, hogy a *Monte-Carlo* kísérletek elektronikus számológép nélkül, „kézzel" való elvégzését a *Prüfer*-módszer tette lehetővé: a módszer, amit PALÁSTI ILONA alkalmazott, ugyanis abban állt, hogy véletlen számtáblázat alapján felírt $(x_1, ..., x_{n-2})$ sorozatokat és ezekhez megkonstruálta a hozzátartozó fát és ennek meghatározta a magasságát P_1 felett.

Alábbiakban közöljük $d_n(k)$ értékének táblázatát $2 \leqq n \leqq 6$=ra:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	t_n
2	1	0	0	0	0	1
3	1	2	0	0	0	3
4	1	9	6	0	0	16
5	1	40	60	24	0	125
6	1	195	560	420	120	1296

* * *

E dolgozat következő, II. és III. részében a kombinatorika további, fejlődésben levő és az érdeklődés középpontjában álló irányait fogjuk ismertetni.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958.

[2] F. HARARY—R. Z. NORMAN—D. CARTWRIGHT, *Structural models, An introduction to the theory of directed graphs,* Wiley, New York, 1965.

[3] F. BECKENBACH, *Applied combinatorial mathematics,* Wiley, New York, 1964.

[4] H. S. GREEN—C. A. HURST, Order-disorder-phenomena, *Monographs in Statistical Physics,* No. 5, Interscience Publ., London, 1964.

[5] F. SPITZER, *Principles of random walk,* VanNostrand, New York, 1964.

[6] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles,* Paris, III. §. 5. 8.

[7] J. RIORDAN; *An introduction to combinatorial analysis,* Wiley, New York, 1958.

[8] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[9[G.-C. ROTA, The number of partitions of a set, *American Math. Monthly,* **71** (1964) 498—504.

[10] SZÁSZ P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei,* Budapest, 1951.

[11] JORDAN K., *Calculus of finite differences,* Budapest, 1939, 168. o.

[12] G. DOBINSKI, *Grunert's Archiv* **61** (1877) 333—336.

[13] RADOS G.: *Mat. Term. Tud. Ért.* **11** (1892—93) 358—361.

[14] HAJÓS GY.—NEUKOMM GY.—SURÁNYI J.: *Matematikai versenytételek,* I. rész, Tankönyvkiadó, Budapest, 1955, 97—98. o.

[15] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[16] O. ORE, Theory of graphs, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol.* 38., 1962.

[17] A. CAYLEY, *Collected papers,* Cambridge, 1897, Vol. 13. pp. 26—28.

[18] A. PRÜFER, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, *Archiv für Math. u. Phys.* **27** (1918) 142—144.

[19] G. PÓLYA—G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Springer, Berlin, 1925, I. 125. o.

[20] A. RÉNYI, Some remarks on the theory of trees, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **4** (1959) 72—85.

[21] J. RIORDAN, The enumeration of trees by height and diameter, *IBM Journal of Research and Development* **4** (1960) 473—478.

[22] G. SZEKERES, Regular iteration of real and complex functions, *Acta Math.* **100** (1958) 103—258.

[23] A. RÉNYI—G. SZEKERES, On the height of trees, *Journal of the Australian Math. Soc.* (sajtó alatt).

[24] H. J. SCOINS, The number of trees, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **58** (1962) 12—16.