A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

VIZSGÁLATOK A VÉGTELEN DIMENZIÓS BILINEÁRIS METRIKÁJÚ TEREK GEOMETRIÁJA KÖRÉBŐL*

Írta: JU. P. GINZBURG és I. SZ. JOHVIDOV

TARTALOM

1. §. Bevezetés

1. A végtelen dimenziós, általános bilineáris metrikájú, speciálisan a hermitikus indefinit metrikájú lineáris terek iránti érdeklődés a negyvenes évek elején kezdődött. E terek vizsgálatához az elméleti fizikusok és a matematikusok különböző irányokból csaknem egyidejűleg jutottak el. Indefinit metrikájú terek a kvantummechanikában először P. DIRAC-nál [1] és W. PAULI-nál [2] szerepeltek a negyvenes évek elején. Körülbelül ugyanakkor, konkrét dinamikai feladatokból kiindulva, SZ. L. SZOBOLJEV szükségesnek találta az ilyenfajta terek hermitikus operátorainak tanulmányozását. Ezekben a feladatokban a tér metrikáját (a „skaláris szorzatot") olyan végtelen hermitikus alak értelmezte, amelyben a negatív négyzetek száma ($\varkappa$) véges („véges rangú indefinitás"). 1944-ben megjelent L. SZ. PONTRJAGIN alapvető jelentőségű [3] munkája az ilyen véges $\varkappa$ rangú indefinit metrikájú terek ($\Pi_\varkappa$ terek) hermitikus (önadjungált) operátorairól. Ugyanebben a dolgozatban megvizsgálásra került a $\Pi_\varkappa$ terek geometriájának néhány kérdése is. A valós Π_1 tereket a Hilbert-tér ún. Lorentz-transzformációinak elméletével kapcsolatban M. G. KREJN [4] tanulmányozta. 1948-ban M. G. KREJN e terek geometriájára vonatkozóan további eredményeket ért el a végtelen dimenziós Lobacsevszkij-terek csavarvonalai elméletének kidolgozása során (lásd még [8]). Végül I. SZ. JOHVIDOV kandidátusi disszertációjában [6], majd I. SZ. JOHVIDOV és M. G. KREJN a [7], [8] monográfiában a $\Pi_\varkappa$ $(0<\varkappa<\infty)$ terek általános axiomatikus tárgyalását adta meg, és a $\Pi_\varkappa$ terek operátorai néhány osztályának vizsgálata mellett e terek geometriájára vonatkozóan is új eredményeket kaptak.

Másrészt még 1947-ben M. I. VISIK [9] rámutatott a $\Pi_\varkappa$-nál általánosabb terekben (nevezetesen a „végtelen rangú" hermitikusan indefinit metrikával el-

* *Успехи математических наук* **17**, (1962), № 4 3—56.

látott terekben) végezhető vetítések elmélete és bizonyos önadjungált parciális differenciálegyenletekhez tartozó peremértékfeladatok megoldása közötti kapcsolatra. Később ezt az ötletet R. NEVANLINNA is felvetette és ezzel összefüggésben több dolgozatban [10]—[13] elkezdte az általános hermitikusan indefinit metrikájú terekben értelmezhető vetítések elméletének kialakítását. A metrikáról feltette, hogy majorálható valamely HILBERT-féle metrikával (lásd alább, 2. §, 5. pont).

R. NEVANLINNA vizsgálatait tanítványa, I. S. LOUHIVAARA folytatta [14], [15], majd felhasználta őket a másodrendű önadjungált parciális differenciáloperátorok korlátos tartományra vonatkozó általánosított Dirichlet-feladatánál a megoldás létezésének és egyértelműségének bizonyítására [16]. F. BROWDER [17], [18] és W. LITTMAN]19] hamarosan általánosította I. S. LOUHIVAARA eredményeit nem-önadjungált operátorokra és nemkorlátos tartományokra. Mindezen eredmények áttekintését az olvasó megtalálhatja a [20] munkában. A fent említett művek geometriai eredményeit nemrég I. S. LOUHIVAARA is összefoglalta a [21] cikkben.

2. A végtelen rangú hermitikusan indefinit metrikával ellátott terek között különleges helyet foglalnak el az úgynevezett J-terek, vagyis olyan Hilbert-terek, amelyekben az (x, y) közönséges skaláris szorzaton kívül értelmezve van egy (Jx, y) alakkal megadott indefinit metrika is, ahol $J=P_+ - P_-$, P_+ és P_- pedig (általában végtelen dimenziós) merőleges vetítések operátorai, $P_+ + P_- = I$. Éppen ezek a terek gyakran szerepelnek az elméleti és matematikai fizika feladataiban. A $\Pi_\varkappa$ terek a J-terek speciális esetei ($\varkappa = \min\{\dim P_+, \dim P_-\} < \infty$).

A J-tereket absztrakt formában JU. P. GINZBURG vezette be [22]—[24]. Ő a nem-önadjungált operátorok karakterisztikus függvényeinek M. SZ. LIVSIC [25], [26] és M. SZ. BRODSZKIJ [26], [27] által kidolgozott elméletével összefüggő feladatokból indult ki. Általánosítva V. P. POTAPOVnak [28] a (véges dimenziójú) analitikus J-nemnyújtó mátrixfüggvények multiplikatív szerkezetére vonatkozó eredményeit a megfelelő operátorfüggvényekre JU. P. GINZBURG előtt felmerült annak szükségessége, hogy tanulmányozza a J-terek geometriájának alapvető tényeit és e terek bizonyos operátorosztályait. JU. P. GINZBURG-gal majdnem egy időben és tőle függetlenül R. S. PHILLIPS [29] is találkozott a J-terekkel disszipatív hiperbolikus differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálata során. R. S. PHILLIPS miközben perem-altereket szerkeszt ezekhez a rendszerekhez, bizonyos J-tér ún. nemnegatív, nempozitív és semleges altereit tekinti, speciálisan az ilyen típusú alterek közül a maximálisakat. Ugyanezekkel a kérdésekkel találkozott H. LANGER [30], [31] a J-terek önadjungált operátorainak tanulmányozása során. A J-terek altereinek teljes osztályozását JU. P. GINZBURG adta meg [32], [33] (lásd a jelen munka 6. §-át).

3. Az ötvenes években az elméleti fizikában időről időre újra felmerült az indefinit metrika vizsgálatának szükségessége. Így 1950-ben K. BLEULER [34] és S. N. GUPTA [35] a kvantumelektrodinamika problémáira alkalmazták az indefinit metrikát. Ugyanerre a kérdésre vonatkoznak S. N. GUPTA további munkái (lásd [40]). Az indefinit metrikának a kvantumelektrodinamikában való alkalmazásával külön fejezet foglalkozik A. I. AHIJEZER és V. B. BERESZTYECKIJ ismert könyvében [36].

Az indefinit metrikájú terek iránt újult (és kezdetben igen jelentős) érdeklődést váltottak ki a fizikusok részéről W. HEISENBERG [37], W. PAULI és G. KÄLLÉN [38], N. N. BOGOLJUBOV, B. V. MEDVEGYEV és M. K. POLIVANOV [39] munkái, valamint számos egyéb dolgozat,[1] amely a terek kvantumelméletének felépítésével foglalkozott (az úgynevezett „kísértet-állapotok elmélete" stb.). Nekünk nincsenek adataink, amelyek alapján megítélhetnénk, hogy az indefinit metrikájú terek alkalmazása hozzájárult-e a kvantumtérelmélet felépítésének útjában álló akadályok eltávolításához, annál is kevésbé, mert az utóbbi időben a fizikusok körében néhány kétkedő kijelentés hangzott el ezzel kapcsolatban[2]. Minthogy azonban ez az irányzat igen kiterjedt irodalmat szült, amely tisztán matematikai tényeket is tartalmaz, felmerült annak a szükségessége, hogy valamilyen módon megértsük és összegezzük őket. Az első ilyenfajta kísérleteket maguk a fizikusok végezték (S. N. GUPTA [40], R. ASCOLI és E. MINARDI [41], A. UHLMANN [42], [43], L. K. PANDIT [44], NAGY KÁZMÉR [45]).

E munkák némelyikében, [40]—[43], különböző módszereket ajánlottak az általános hermitikusan indefinit metrikával ellátott terek axiomatikus bevezetésére, vizsgálták a terek geometriájának elemeit, valamint alkalmazták az ilyen terekben értelmezett „hermitikus operátorokat". Sajnos meg kell jegyezni, hogy ezeknek a műveknek a matematikai színvonala nem magas, egyesek közülük pedig egyszerűen matematikai hibákat tartalmaznak, mégpedig néha igen durva hibákat (lásd alább, 5. §, 3. pont).

Sok ilyen műben közös az a (matematikai) hiányosság, hogy szerzőik önkényesen használják az „indefinit metrikájú Hilbert-tér" kifejezést, és ennek a kifejezésnek magukban a művekben nagyon homályos tartalom felel meg. Arról van szó, hogy rendszerint tekintenek egy lineáris teret egy rajta értelmezett hermitikusan indefinit alakkal, de mindenféle topológia nélkül, úgyhogy a „Hilbert-tér" kifejezés csak arra való, hogy valamilyen geometriai képzettársítást eredményezzen, ami idővel magukat a szerzőket is félrevezeti. Megjegyezzük, hogy itt egyáltalán nem érintünk egyéb durva hibákat, amelyek abból származnak, hogy bizonyos kijelentéseket, amelyek csak véges dimenziójú terekre igazak, átvisznek végtelen dimenziójúakra, és hogy a Hilbert-térbeli unitér és önadjungált operátorok elméletéből számos tényt kiterjesztenek az indefinit metrikájú terek megfelelő operátoraira ([40]—[42]). A jelen cikk egyik szerzője ezeket a hibákat részben már bírálat tárgyává tette (lásd *Referativnij Zsurnal, Matematika* (1961), 8 Б 459—462 számú referátumok).

Egyúttal meg kell mondani, hogy az említett munkák hibás voltuk ellenére (vagy éppen azért) a matematikusok részéről új érdeklődést váltottak ki az elmélet ezen ága iránt. Mindenesetre az utóbbi időben több új dolgozat jelent meg BOGNÁR JÁNOS [46], [47], JU. P. GINZBURG [32], [33], I. SZ. JOHVIDOV [48], [49] és H. LANGER [30], [31] tollából, amelyekben a hermitikusan indefinit metrikájú és általános bilineáris metrikájú terek geometriája további kidolgozást nyert. Másrészt amig a $\Pi_\varkappa$ terek geometriájára vonatkozó vizsgálatokat a [7], [8] monográfia összefoglalta, addig általánosabb terekre vonatkozó hasonló munka a legutóbbi időkig nem készült. Ebben az irányban az első és eddig egyetlen kísérlet E. SCHEIBE nemrég megjelent cikke [50] volt. Ennek kétségtelen érdeme, hogy a hermitikusan bilineáris metrikájú (speciálisan a J-metrikával ellátott) terek geometriája alapjainak

[1] E művek viszonylag teljes áttekintése megtalálható NAGY KÁZMÉR [45] cikkében; ugyanott igen bőséges irodalomjegyzék is van.

[2] *Megjegyzés a korrektúránál.* A legutóbbi időben jelent meg F. A. BEREZIN [64] cikke, amely ismét felhasználja az indefinit metrikát a kvantumtérelmélet kérdéseinek vizsgálatára.

szigorú matematikai tárgyalását adja. E. SCHEIBE [50] dolgozata azonban szélesebb körök számára nehezen hozzáférhető kiadványban jelent meg és nagy hézagok vannak benne, mert a szerző, úgy látszik, egyáltalán nem ismeri a szovjet matematikusok munkáit. Azonkívül, bár a tárgyalásmód általában szigorú, E. SCHEIBE dolgozatának utolsó paragrafusában (8. §) hibákat követett el számos tétel megfogalmazásában és bizonyításában (lásd alább, 3. §, 6. pont).

4. Az itt következő áttekintésnek az a célja, hogy kitöltse a matematikai irodalomban meglevő hézagot és az általános bilineáris metrikával ellátott terek geometriájának a lehetőség szerint teljes és következetes kifejtését adja. Reméljük, hogy ez hasznos lesz azoknak a matematikusoknak és elméleti fizikusoknak, akik olyan kérdések iránt érdeklődnek, amelyekkel kapcsolatban felmerül az indefinit metrika vizsgálatának szükségessége.

A cikk tartalma a tartalomjegyzékből látható. Feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a Banach- és Hilbert-terek általános elméletének alapjait. Ugyanakkor, E. SCHEIBE dolgozatához hasonlóan, munkánkban felhasználjuk a lokálisan konvex topologikus vektorterek elméletének apparátusát azzal a különbséggel, hogy mindazt, amit a cikk olvasásához ezekről a terekről tudni kell, a 2. § 2. pontjában (apróbetűs rész) röviden ismertetjük.

A dolgozatban foglalt tételek közül egyesek most kerülnek először közlésre. Ezeket bizonyítással kísérjük. A bizonyítás szerepel azokban az esetekben is, amikor a szerzőknek ismert állításokat sikerült bizonyos mértékben élesíteni. Ez vonatkozik speciálisan a 2. és 3. § bizonyos állításaira, amelyek szeparált topológia („nemelfajuló metrika") esetében közvetlenül adódnak a dualitás elméletének N. BOURBAKI [51] művében (ennek a műnek az ismeretét nem tételezzük fel) megtalálható általános tételeiből. Az általános esetben viszont ez az út számos kiegészítő megfontolást igényel.

Annak érdekében, hogy a tárgyalás menetét ne zavarjuk meg, a dolgozat alapvető részében nem érintjük az egyes fogalmak keletkezésének és fejlődésének történetét, sem azt a kérdést, hogy a különböző eredmények kitől származnak. A megfelelő utalásokat a cikk végén gyűjtöttük össze („Megjegyzések és irodalmi utalások").

Befejezésül megemlítjük, hogy számos, a cikkben foglalt új eredményt kimondtunk abban a két közös előadásunkban, amelyet a IV. Össz-szövetségi Matematikai Kongresszuson 1961 júliusában (lásd [52]) és az odesszai Tudósok Házának mechanikai és matematikai szekciójában 1961. december 18-án tartottunk.

2. §. Különböző topológiák bilineáris metrikájú terekben

1. Legyen adva egy $\mathfrak{E}$ komplex lineáris tér és egy rajta értelmezett $G(x, y)$ bilineáris alak:

$$G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) =$$

$$= \alpha_1 \overline{\beta}_1 G(x_1, y_1) + \alpha_2 \overline{\beta}_1 G(x_2, y_1) + \alpha_1 \overline{\beta}_2 G(x_1, y_2) + \alpha_2 \overline{\beta}_2 G(x_2, y_2).$$

Itt x_1, x_2, y_1, y_2 az $\mathfrak{E}$ tér elemei, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ pedig komplex számok. Ebben az esetben *G-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ térről* vagy röviden *G-térről* fogunk beszélni.

Legérdekesebb az az eset, amikor a $G(x, y)$ alak hermitikus:

$$G(y, x) = \overline{G(x, y)} \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

de általában indefinit (G^h-*tér*).

Megemlítjük, hogy a véges dimenziójú G-terek elméletét már régen kidolgozták (G. FROBENIUS [53]) és elég részletesen megtalálható a lineáris algebrával foglalkozó tankönyvekben (lásd például [54], X. fej.). Ezért a további tárgyalás során általában feltesszük, hogy az $\mathfrak{E}$ tér végtelen dimenziójú.

Azt mondjuk, hogy az $x(\in \mathfrak{E})$ vektor *balról (jobbról) G-ortogonális* az $y \in \mathfrak{E}$ vektorra, ha $G(x, y) = 0$ (illetve $G(y, x) = 0$). Ezek a definíciók természetes módon kiterjeszthetők az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti részhalmazaira. A G^h-terek esetében a baloldali és jobboldali G-ortogonalitás fogalma nyilván egybeesik. Azt, hogy egy $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ halmazai G-ortogonálisak egymásra, a továbbiakban szimbolikusan így fogjuk írni: $G(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 0$.

Az $x_0(\in \mathfrak{E})$ vektort $\mathfrak{E}$ *baloldali izotróp vektorának* nevezzük, ha x_0 balról G-ortogonális $\mathfrak{E}$-re: $G(x_0, \mathfrak{E}) = 0$. Analóg módon értelmezhetők *az $\mathfrak{E}$ tér jobboldali izotróp vektorai.* Hermitikus G-metrika esetén egyszerűen $\mathfrak{E}$ *izotróp vektorairól* fogunk beszélni. Ha $\mathfrak{E}$-nek van nullától különböző izotróp vektora, az azt jelenti, hogy a G alak az $\mathfrak{E}$ téren elfajul. Az ilyen $\mathfrak{E}$ tereket *elfajuló G-tereknek* nevezzük. Az $\mathfrak{E}$ G-tér összes baloldali (jobboldali) izotróp vektorai egy $\mathfrak{E}_0$ lineált (lineáris sokaságot) alkotnak, *az $\mathfrak{E}$ tér baloldali (jobboldali) izotrop lineálját*[3].

Legyen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ tetszés szerinti lineál. Az $\mathfrak{L}$ lineálon tekintett $G(x, y)$ alak $\mathfrak{L}$-en egy G-metrikát indukál, amelyre nézve $\mathfrak{L}$-ről kiderülhet, hogy elfajuló vagy nemelfajuló, függetlenül attól, hogy az egész $\mathfrak{E}$ tér elfajuló-e. Világos, hogy ha $\mathfrak{L}$ elfajuló, akkor $\mathfrak{L} \supset \mathfrak{L}_0$, ahol $\mathfrak{L}_0(\neq \{0\})$ az *$\mathfrak{L}$ lineál izotróp lineálja.*

2. A $G(x, y)$ alakon kívül az $\mathfrak{E}$ térben értelmezve lehet valamilyen τ topológia is. Mi csak úgynevezett lokálisan konvex topológiákat fogunk tekinteni. Emlékeztessünk ezzel kapcsolatban néhány alapvető definícióra.

Az $\mathfrak{E}$ lineáris téren értelmezett $p(x)$ funkcionált *félnormának* nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal (x, x_1, x_2 az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti elemei, λ tetszőleges komplex szám):

$$\alpha) \quad p(x) \geqq 0,$$

$$\beta) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$

$$\gamma) \quad p(x_1 + x_2) \leqq p(x_1) + p(x_2).$$

Legyen adva $\mathfrak{E}$-ben egy $p_\alpha(x)$ ($\alpha \in A$) félnormákból álló (véges vagy végtelen) rendszer. Az $x_0 \in \mathfrak{E}$ pont $\mathfrak{U}(x_0) = \mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x_0)$ *konvex környezetének* nevezzük mindazon $x_0 \in \mathfrak{E}$ pontok összességét, amelyekre teljesülnek a

$$p_{\alpha_j}(x - x_0) < \delta \qquad (j = 1, 2, \dots, k)$$

egyenlőtlenségek, ahol $\delta > 0$ és $\alpha_j \in A$ ($j = 1, 2, \dots, k$) rögzítettek. Az összes $\mathfrak{U}(x)$ ($x \in \mathfrak{E}$) konvex környezetek rendszerét az $\mathfrak{E}$ térben értelmezett τ *lokálisan konvex topológiának,* magát az $\mathfrak{E}$ teret pedig *lokálisan konvex lineáris topologikus térnek* nevezzük. A τ topológiát meghatározó $\mathfrak{U}(x)$ környezeteket röviden *τ-környezeteknek* fogjuk hívni.

[3] Véges dimenziójú $\mathfrak{E}$ tér esetén a bal oldali és jobb oldali izotróp lineál dimenziója mindig megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}$ tér úgynevezett defektusával (lásd pl. [54], 324. oldal).

Legyen $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$. Az $x_0(\in\mathfrak{E})$ pontot az $\mathfrak{M}$ *halmaz τ-érintkezési pontjának* nevezzük, ha az x_0 pont bármelyik τ-környezete tartalmaz $\mathfrak{M}$-beli pontot. Az $\mathfrak{M}$ halmaz τ-érintkezési pontjainak összességét az $\mathfrak{M}$ halmaz *τ-lezárásának* nevezzük és az $\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$ jellel jelöljük. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{M}\subset\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$. Ha $\mathfrak{M}=\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)}$, akkor az $\mathfrak{M}$ halmazt *τ-zártnak* mondjuk.

Ha az $\mathfrak{E}$ lineáris térben két topológia, τ' és τ'' van értelmezve és ezek olyan tulajdonságúak, hogy bármelyik $x(\in\mathfrak{E})$ pont bármelyik τ''-környezete tartalmazza ugyanennek a pontnak egy τ'-környezetét, akkor azt mondjuk, hogy a τ' topológia *erősebb,* mint a τ'' topológia ($\tau'\geqq\tau''$), vagy hogy τ'' *gyengébb,* mint τ' ($\tau''\leqq\tau'$). Ha egyidejűleg $\tau'\geqq\tau''$ és $\tau''\geqq\tau'$, akkor a τ', τ'' topológiákat *ekvivalensnek* mondjuk ($\tau'=\tau''$).

Az $f(x)$ $(x\in\mathfrak{E})$ számértékű függvényt (funkcionált) az $x_0\in\mathfrak{E}$ pontban a *τ topológiára nézve folytonosnak* („*τ-folytonosnak*") mondjuk, ha bármilyen $\varepsilon>0$ számhoz található olyan $\mathfrak{U}(x_0)$ τ-környezet, hogy minden $x\in\mathfrak{U}(x_0)$ pontra érvényes az

$$| f(x)-f(x_0) | <\varepsilon$$

egyenlőtlenség. Lineáris (vagyis additív és homogén) $f(x)$ funkcionálnak az egész $\mathfrak{E}$ térben való τ-folytonosságához, mint rendesen, elégséges az $x=0$ pontban való τ-folytonosság.

A továbbiakban alkalmasabb lesz számunkra a lineáris funkcionálok τ-folytonosságának egy másik definíciója, amelyben nem τ-környezetekről, hanem magukról a $p_\alpha(x)$ $(\alpha\in A)$ félnormákról van szó. Ez a definíció a következő állításból adódik:

1°. *Ahhoz, hogy az $f(x)$ lineáris funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren folytonos legyen a $p_\alpha(x)$ $(\alpha\in A)$ félnormák rendszere által meghatározott τ topológiára nézve, szükséges és elégséges, hogy bizonyos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\in A$ véges indexrendszerre és $M>0$ számra minden $x\in\mathfrak{E}$ esetén teljesüljön az*

$$|f(x)| \leqq M \max_{1\leqq k\leqq n} p_{\alpha_k}(x) \tag{2. 1}$$

egyenlőtlenség.

Valóban, ha $f(x)$-re fennáll a (2. 1) egyenlőtlenség, akkor tetszés szerinti $\varepsilon>0$ számot választva $|f(x)| <\varepsilon$ minden $x\in\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(0)$ pontra, ahol $\delta=\varepsilon/M$, és így $f(x)$ τ-folytonos.

Fordítva, legyen $f(x)$ lineáris és τ-folytonos funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren. Akkor van olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in A$ indexrendszer és $\delta>0$ szám, hogy $q(x)=\max\limits_{1\leqq k\leqq n} p_{\alpha_k}(x)<\delta$ esetén $|f(x)| <1$. Most legyen x az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora. Ha $q(x)\neq 0$, akkor tekintsük az $y=\dfrac{\delta}{2q(x)}x$ vektort; minthogy $q(y)=\dfrac{\delta}{2}<\delta$, fennáll $|f(y)| <1$, és így az $M=\dfrac{2}{\delta}$ választás mellett teljesül (2. 1). Ha viszont $q(x)=0$, akkor $q(\lambda x)=\lambda q(x)=0$ bármely $\lambda>0$ számra, tehát $|f(\lambda x)|<1$, $|f(x)| <\dfrac{1}{\lambda}$, következésképpen $f(x)=0$. Ily módon ebben az esetben is érvényes a (2. 1) egyenlőtlenség. Az 1°. állítást ezzel bebizonyítottuk.

A lokálisan konvex τ topológiát *szeparáltnak* nevezzük, ha bármely $x\neq 0$ ponthoz található olyan $\alpha\in A$ index, hogy $p_\alpha(x)\neq 0$. Könnyen látható, hogy a τ topológia szeparáltsága ekvivalens a $\overline{\{0\}}^{(\tau)}=\{0\}$ egyenlőséggel, ahol $\{0\}$ az a halmaz, amely az egyetlen $0\in\mathfrak{E}$ elemből áll.

Bennünket a továbbiakban speciálisan azok a lokálisan konvex terek fognak érdekelni, amelyekben a szeparált topológiát megszámlálhatóan sok $p_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ félnorma értelmezi. Könnyű igazolni, hogy ezek a lokálisan konvex terek[4] *metrizálhatók,* amennyiben topológiájuk megadható a következő *távolság* segítségével:

$$\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \qquad (x, y\in\mathfrak{E}).$$

Az így értelmezett metrika eltolással szemben invariáns:

$$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y) \qquad (x, y, z\in\mathfrak{E}). \tag{2.2}$$

[4] És csak ezek (lásd [51], 97. old.).

Ha a vizsgált $\mathfrak{E}$ tér erre a metrikára vonatkozóan teljes, akkor *Fréchet-térnek* (*$\mathfrak{F}$-térnek*) nevezzük[5].

Ha az $\mathfrak{E}$ tér lokálisan konvex τ topológiáját véges számú $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ félnorma értelmezi, akkor ezeket az egyetlen $q(x) = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} p_k(x)$ félnormával helyettesítve nyilvánvalóan az eredetivel ekvivalens topológiát kapunk. Ebben az esetben a τ topológiát és az $\mathfrak{E}$ teret *félnormálhatónak* fogjuk mondani. Ha egy félnormálható topológia szeparált, akkor a topológiát meghatározó $q(x)$ félnorma közönséges *norma* ($q(x) = \|x\|$), és $\mathfrak{E}$ *normált tér*. Ha $\mathfrak{E}$ teljes erre a normára vonatkozóan, akkor az $\mathfrak{E}$ tér *Banach-tér* (*$\mathfrak{B}$-tér*), ami az $\mathfrak{F}$-tér speciális esete.

Még speciálisabb eset, ha $\mathfrak{E}$ *Hilbert-tér* (*$\mathfrak{H}$-tér*) az (x, y) skaláris szorzattal és az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normával (feltéve, hogy $\mathfrak{E}$ teljes erre a normára vonatkozóan). Foglalkoznunk kell majd úgynevezett *pre-Hilbert-terekkel* is, vagyis olyan félnormálható $\mathfrak{E}$ terekkel, amelyeknek a $q(x) = \sqrt{(x, x)}$ félnormával megadható τ topológiája vagy nem szeparált ((x, y) pozitív szemidefinit skaláris szorzat $\mathfrak{E}$-ben), vagy ha szeparált (azaz (x, y) definit), akkor az $\mathfrak{E}$ normált tér általában nem teljes az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ normára vonatkozóan.

3. Legyen tehát értelmezve az $\mathfrak{E}$ G-térben egy lokálisan konvex (ezt a jelzőt a továbbiakban sehol sem fogjuk kiírni) τ topológia. Azt mondjuk, hogy a τ topológia *balról (jobbról) felülmúlja az adott G-metrikát*, ha az összes $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$, (illetve $h_{x_0}(y) = \overline{G(x_0, y)}$) lineáris funkcionálok τ-folytonosak az $\mathfrak{E}$ téren. Ha egy τ topológia balról is, jobbról is felülmúlja a G-metrikát, akkor azt mondjuk, hogy τ *felülmúlja a G-metrikát*. Hermitikus G-metrika esetén ez a három definíció egybeesik. A G-metrikát balról felülmúló topológiára nyilvánvaló és a továbbiakban sokszor alkalmazásra kerülő példa az úgynevezett $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ *gyenge topológia*, amelyet maga a G-metrika indukál a

$$p_y(x) = |G(x, y)| \qquad (y \in \mathfrak{E})$$

félnormák rendszere segítségével. Analóg módon, az $\mathfrak{E}$ térbeli jobbról felülmúló τ_0^j gyenge topológiát a

$$q_x(y) = |G(x, y)| \qquad (x \in \mathfrak{E})$$

félnormák rendszere értelmezi. Magától értetődik, hogy hermitikus G-metrika esetén $\tau_0^b = \tau_0^j \equiv \tau_0$. Azonkívül *ha $\mathfrak{E}$ nemelfajuló, akkor a τ_0 topológia szeparált.* Ugyanez vonatkozik a τ_0^b (τ_0^j) topológiára, ha $\mathfrak{E}$ a megfelelő oldalról nemelfajuló, vagyis ha $\mathfrak{E}$-nek nincs nullától különböző baloldali (jobboldali) izotróp vektora.

A 2. pontban felsorolt definíciókból közvetlenül adódik az alábbi állítás:

2°. *τ_0^b a leggyengébb azok közül a topológiák közül, amelyek az adott G-metrikát balról felülmúlják.*

Hasonló állítás érvényes a τ_0^j és a τ_0 topológiára.

4. Minket a továbbiakban főleg a G-metrikát felülmúló *Hilbert-féle* topológia ($\mathfrak{H}$-topológia) fog érdekelni. Ez a topológia, ha létezik $\mathfrak{E}$-ben, egyértelműen meg van határozva. Sőt, igaz a következő tétel:

2. 1. tétel. *Balról (jobbról) nemelfajuló G-metrikájú $\mathfrak{E}$ térben (ekvivalenciától eltekintve) legfeljebb egy balról (jobbról) felülmúló Fréchet-topológia értelmezhető.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{E}$-ben két Fréchet-topológia van értelmezve, τ' és τ'', amelyek például balról felülmúlják a G-metrikát. Ezt a két topológiát egy-egy

[5] Megemlítjük, hogy S. BANACH [55] könyvében (F) típusú tereknek nevezi azokat a lineáris teljes metrikus tereket, amelyekben a vektorok összeadásának és vektor skalárral való szorzásának művelete folytonos, továbbá a távolságnak megvan a (2. 2) tulajdonsága. Ily módon minden $\mathfrak{F}$-tér (F) típusú tér.

távolságfüggvény, $\varrho'(x, y)$ és $\varrho''(x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{E})$ határozza meg, amelyek rendelkeznek a (2. 2) tulajdonsággal. Tekintsünk egy új τ''' metrikus topológiát, amelyet a szintén (2. 2) tulajdonságú

$$\varrho'''(x, y) = \varrho'(x, y) + \varrho''(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 3}$$

távolság határoz meg. Könnyű belátni, hogy a τ''' topológia erősebb a τ', τ'' topológiáknál:

$$\tau' \leqq \tau''', \quad \tau'' \leqq \tau'''.$$

A τ' (ill. τ'', τ''') topológiával ellátott $\mathfrak{E}$ teret a továbbiakban $\mathfrak{E}_1$ (ill. $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$) fogja jelölni.

Az $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ terek Fréchet-terek, azaz (F)' típusúak. Annak bebizonyításához, hogy $\mathfrak{E}_3$ is (F) típusú, igazolni kell még $\mathfrak{E}_3$ teljességét. Legyen $\{x_n\} \subset \mathfrak{E}_3$ valamely τ'''-fundamentális sorozat. (2. 3) következtében ez a sorozat a τ', τ'' topológiákban is fundamentális, minthogy pedig az $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ terek teljesek, az $\{x_n\}$ sorozatnak van bennük x', ill. x'' limesze. A τ' és a τ'' topológia balról felülmúlja a G-metrikát, tehát tetszés szerinti $y \in \mathfrak{E}$ elemre fennáll

$$\lim_{n \to \infty} G(x_n, y) = G(x', y) = G(x'', y).$$

Az $\mathfrak{E}$ tér balról nemelfajuló lévén, ebből következik, hogy $x' = x'' \equiv x$, és ez a vektor az $\{x_n\}$ sorozat τ'''-limesze. Ezzel bebizonyítottuk $\mathfrak{E}_3$ teljességét.

Most tekintsük azt az I_{13} operátort, amely mindegyik $x \in \mathfrak{E}_3$ vektornak ugyanezt az $x \in \mathfrak{E}_1$ vektort felelteti meg. Az I_{13} operátor az $\mathfrak{E}_3$ teret lineárisan és kölcsönösen egyértelműen képezi le $\mathfrak{E}_1$-re, továbbá $\tau' \leqq \tau'''$ miatt a leképezés folytonos. Minthogy az $\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_1$ terekre érvényes Banachnak az inverz operátorra vonatkozó klasszikus tétele [55], az $I_{31} = I_{13}^{-1}$ operátor is folytonos, ebből pedig következik, hogy $\tau' \geqq \tau'''$ és így $\tau' = \tau'''$. Pontosan így igazolható az is, hogy $\tau'' = \tau'''$, tehát végeredményben $\tau' = \tau''$. A tételt ezzel bebizonyítottuk.

A 2. 1. tétel semmit sem mond arról, hogy létezik-e az $\mathfrak{E}$ térben legalább egy Fréchet-topológia, amely a G-metrikát (balról, jobbról) felülmúlja. Amint az alábbi példa mutatja, ilyen topológia nem mindig létezik.

Legyen az $\mathfrak{E}$ tér az x változó összes x^t alakú függvényeinek lineáris burka, ahol $0 \leqq x \leqq 1$ és $0 \leqq t \leqq 1$. Tekintsük az $\mathfrak{E}$ térben a következő módon értelmezett G-metrikát. Rendeljük hozzá minden α irracionális számhoz $(0 < \alpha < 1)$ az

$$\alpha = [m_1, m_2, \ldots] = \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \ldots}}$$

végtelen lánctört kifejtést, ahol $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ természetes számok. Azonkívül rendezzük valahogy sorozatba az összes racionális számokat: $r_1, r_2, \ldots$; $0 \leqq r_k \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Legyen most tetszés szerinti a [0, 1] intervallumba eső irracionális α, β és racionális r_j, r_k számokra

$$G(x^\alpha, x^\beta) = 0, \qquad G(x^{r_j}, x^{r_k}) = 0,$$

$$G(x^{r_k}, x^\alpha) = G(x^\alpha, x^{r_k}) = m_k \qquad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

ahol $\alpha = [m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots]$. Az x^t függvények lineáris kombinációira terjesszük ki G értelmezését úgy, hogy hermitikus bilineáris alakot kapjunk, és tekintsük a G-metrikát az $\mathfrak{E}$ téren.

Megmutatjuk, hogy *nincs olyan megszámlálhatóan sok félnormával megadható τ topológia, amely felülmúlná az adott G-metrikát.* Indirekt bizonyítás céljából tegyük fel, hogy van ilyen félnormákból álló $\{p_n(x)\}_1^\infty$ rendszer. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p_1(x) \leqq \leqq p_2(x) \leqq \ldots$ $(x \in \mathfrak{E})$. Akkor a $h_u(v) = \overline{G(u, v)}$ $(u \in \mathfrak{E})$ funkcionálok τ-folytonosságából és az 1°. állításból következik, hogy találhatók olyan pozitív $C(u)$ és természetes n_u számok, amelyekre minden $v \in \mathfrak{E}$ esetén

$$|G(u, v)| \leqq C(u) p_{n_u}(v).$$

Speciálisan

$$|G(x^\alpha, x^{r_k})| \leqq C(x^\alpha) p_{n(\alpha)}(x^{r_k}) \qquad (n(\alpha) \equiv n_{x^\alpha}).$$

Vezessük be a $\varphi_{nk} = p_n^2(x^{r_k})$ jelölést. Akkor $\alpha = [m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots]$ esetén

$$m_k^2 \leqq C^2(x^\alpha) \varphi_{n(\alpha)k}.$$

Most tekintsük azt az $\alpha = [m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots]$ irracionális számot, amelyre

$$m_k = \left[\sum_{i, j \leqq k} \varphi_{ij} \right] + k,$$

ahol $[a]$ az a-ban foglalt legnagyobb egész szám. Ha $k > n(\alpha)$, akkor $m_k > \varphi_{n(\alpha)k}$, tehát

$$m_k^2 \leqq C^2(x^\alpha) m_k \qquad (k > n(\alpha)),$$

ami elég nagy k értékekre lehetetlenség.

5. Azt fogjuk mondani, hogy a félnormálható τ topológia *majorálja a G-metrikát,* ha

$$|G(x, y)| \leqq C p(x) p(y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

ahol $p(x)$ az $\mathfrak{E}$ G-tér τ topológiáját leíró félnorma és $C > 0$. *Ha egy τ topológia majorálja a G-metrikát, akkor felül is múlja.* Ennek a fordítottja általában nem igaz, amint az alábbi példa mutatja.

Tekintsünk a $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben egy $A = A^*$ nemkorlátos önadjungált operátort, amelynek értelmezési tartománya $\vartheta(A) \equiv \mathfrak{E}$. Vezessünk be $\mathfrak{E}$-ben egy G^h-metrikát a

$$G(x, y) = (Ax, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E})$$

képlet segítségével. Könnyen belátható, hogy $\mathfrak{E}$-nek az a topológiája, amelyet az $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma értelmez, felülmúlja, de nem majorálja ezt a G-metrikát.

Teljes normált terekben azonban más a helyzet. Nevezetesen igaz a következő tétel.

2. 2. TÉTEL. *Ha egy Banach-féle topológia ($\mathfrak{B}$-topológia) felülmúlja a G-metrikát, akkor majorálja is.*

Bizonyítás. Értelmezze az $\mathfrak{E}$ G-tér $\mathfrak{B}$-topológiáját az $\|x\|$ $(x \in \mathfrak{E})$ norma. Minthogy ez a topológia felülmúlja a G-metrikát, fennáll a

$$|G(x, y)| \leqq C(y) \|x\| \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 4}$$

egyenlőtlenség, ahol $C(y) = \sup\limits_{\|x\|=1} |G(x, y)|$. Tekintettel arra, hogy a $p_y(x) = |G(x, y)|$ $(x \in \mathfrak{E})$ funkcionálok konvexek és $\mathfrak{B}$-folytonosak, I. M. GELFAND ismert lemmája értelmében (lásd pl. [56], 59. oldal) a $C(y)$ funkcionál is $\mathfrak{B}$-folytonos, vagyis

$$|C(y)| \leqq \text{const. } \|y\| \qquad (y \in \mathfrak{E}).$$

Ezt a becslést a (2. 4) képletbe behelyettesítve kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy ha a τ topológia majorálja a G-metrikát, akkor a $G(x, y)$ alak mint x és y kétváltozós függvénye folytonos. A 2. 2. tételből speciálisan következik, hogy ha $G(x, y)$ $\mathfrak{B}$-folytonos külön az x és külön az y változóban, akkor kétváltozós függvényként is folytonos. Ez nemcsak $\mathfrak{B}$ terekre, hanem $\mathfrak{F}$ terekre is igaz (vö. [50]), amint az egy igen általános tételből ([51], III. fej. 4. 1. §, 2. állítás) adódik.

Ha a G-metrikát majoráló τ topológia az $\mathfrak{E}$ térben pre-Hilbert-féle és ezt a topológiát a $H(x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{E})$ skaláris szorzat értelmezi, akkor a H alakot az adott G-metrika *hermitikusan nemnegatív majoránsának* nevezzük. Ily módon a $H(x, y)$ alak akkor és csak akkor lesz a G-metrika hermitikusan nemnegatív majoránsa, ha

$$|G(x, y)|^2 \leqq CH(x, x) H(y, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}, \ C > 0).$$

Kimutatható ([56], 64. oldal), hogy ennek a feltételnek a teljesüléséhez elégséges a

$$|G(x, x)| \leqq C_1 H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E}, \ C_1 > 0)$$

becslés fennállása.

Ha $x \neq 0$ esetén $H(x, x) > 0$, akkor a *G-metrika hermitikusan pozitív majoránsáról* fogunk beszélni. Világos, hogy az $\mathfrak{E}$ G-térben minden ilyen majoráns szeparált pre-Hilbert-topológiát indukál, amely általában nem teljes. Az $\mathfrak{E}$ teret a szokásos módon teljessé téve ebben a topológiában egy $\tilde{G}$-metrikával ellátott $\tilde{\mathfrak{E}}$ Hilbert-teret kapunk, ahol $\tilde{G}(x, y)$ a $G(x, y)$ alak $\tilde{\mathfrak{E}}$-ra való folytonos kiterjesztése. Az ily módon megszerkesztett $\tilde{\mathfrak{E}}$ $\tilde{G}$-tér azonban elfajuló lehet abban az esetben is, amikor $G(x, y)$ nemelfajuló. A 3. § 4. pontjában egy fontos esetet fogunk megemlíteni, amikor a fenti teljessé tétel nem vezet a G-metrika elfajulására.

6. Rövidség kedvéért állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban az olyan G-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ teret, amelyet egy $\mathfrak{B}$ tér ($\mathfrak{H}$ tér) topológiája felülmúl, egyszerűen *G-metrikával ellátott Banach-térnek (Hilbert-térnek)*, vagy még rövidebben *($\mathfrak{B}$, G)-térnek* (*($\mathfrak{H}$, G)-térnek*) fogjuk nevezni.

Amint az 5. pontban kiderítettük, ahhoz, hogy egy $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{B}$ tér ($\mathfrak{B}$, G)-tér legyen, szükséges és elégséges a

$$|G(x, y)| \leqq C\|x\| \, \|y\| \qquad (C > 0; \ x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 5}$$

egyenlőtlenség fennállása. Most feleltessük meg mindegyik $x \in \mathfrak{E}$ vektornak a

$$h_x = h_x(y) = \overline{G(x, y)} \in \mathfrak{E}^*$$

lineáris funkcionált, ahol szokás szerint $\mathfrak{E}^*$ az $\mathfrak{E}$ (komplex) $\mathfrak{B}$ tér konjugált tere.

Tekintsük azt a G^b lineáris operátort, amely az $\mathfrak{E}$ teret $\mathfrak{E}^*$-ba képezi le és az $x \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a $h_x \in \mathfrak{E}^*$ funkcionált rendeli hozzá: $h_x = G^b x$. A G^b operátort *a $G(x, y)$ alak baloldali Gram-operátorának* nevezzük az $\mathfrak{E}$ téren. A (2. 5.) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\|G^b x\| = \|h_x\| = \sup_{\|y\|=1} |G(x, y)| \leqq C\|x\| \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

vagyis G^b korlátos operátor. Ha a $h \in \mathfrak{E}^*$ funkcionálokra és az $y \in \mathfrak{E}$ vektorokra bevezetjük a

$$\overline{h(y)} = (h, y)$$

jelölést, akkor a $G(x, y)$ alakra a következő előállítást kapjuk:

$$G(x, y) = \overline{h_x(y)} = (h_x, y) = (G^b x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}),$$

ami igazolja terminológiánkat.

Teljesen analóg módon bevezethetjük *a $G(x, y)$ alak G^j jobboldali Gram-operátorát az $\mathfrak{E}$ téren, így a*

$$G(x, y) = (x, G^j y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E})$$

előállítást kapjuk. Itt a G^j lineáris folytonos operátor mindegyik $y \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a $G^j y = f_y = f_y(x) = G(x, y) \in \mathfrak{E}^*$ lineáris funkcionált rendeli hozzá, (x, f) pedig az

$$f(x) = \overline{(f, x)} \qquad (x \in \mathfrak{E}, f \in \mathfrak{E}^*)$$

számot jelenti.

Abban a speciális esetben, amikor a G-metrika hermitikus, nyilvánvaló, hogy $G^b = G^j \equiv G$. Ebben az esetben egyszerűen *a $G(x, y)$ alak $\mathfrak{E}$ térbeli G Gram-operátoráról* fogunk beszélni:

$$G(x, y) = (Gx, y) = (x, Gy) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

7. A fent bevezetett definíciók különösen természetessé válnak, ha az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{H}, G)$-tér. Ebben az esetben $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}$ és az $(x, f) = \overline{(f, x)}$ szimbólum a közönséges skaláris szorzatot jelöli $(x, f \in \mathfrak{E})$, úgyhogy a

$$G(x, y) = (G^b x, y) = (x, G^j y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}) \tag{2. 6}$$

képlet a Hilbert-térbeli korlátos bilineáris funkcionálok előállításáról szóló ismert tételt ([56], 63. oldal) fejezi ki, a G^b, G^j korlátos operátorok pedig egymás adjungáltjai:

$$(G^b)^* = G^j, \quad (G^j)^* = G^b.$$

A (2. 6) képletből többek között az is látható, hogy az $\mathfrak{E}$ tér balról (jobbról) nemelfajuló volta ekvivalens azzal, hogy a G^b (G^j) operátornak a $\lambda = 0$ szám nem sajátértéke.

Most térjünk át a $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek részletesebb tárgyalására. Ebben az esetben $G = G^*$ önadjungált operátor az $\mathfrak{E}$ Hilbert-térben. Ezen operátor $\sigma(G)$ spektruma valós számokból álló korlátos zárt halmaz. Ha $0 \notin \sigma(G)$, akkor a G operátor folytonos inverzzel rendelkezik és spektrális felbontása a következő alakú:

$$G = \int_m^{-\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda + \int_\varepsilon^M \lambda \, dE_\lambda \qquad (\varepsilon > 0, \ E_m = 0, \ E_M = I). \tag{2. 7}$$

3°. *Ha $0 \notin \sigma(G)$, akkor az $\mathfrak{E}$ térben az (x, y) skaláris szorzattal meghatározott τ Hilbert-topológia helyettesíthető egy vele ekvivalens, és valamilyen $(x, y)'$ skaláris szorzattal meghatározott τ' Hilbert-topológiával, amelyre nézve a $G(x, y)$ alak Gram-operátora*

$$G' = P_+ - P_- \equiv J$$

alakú, ahol P_+ és P_- két ortogonális projektor (az ortogonalitás az $(x, y)'$ skaláris szorzatra vonatkozóan áll fenn), és $P_+ P_- = 0$, $P_+ + P_- = I$.

A bizonyítás azonnal adódik a következő választás segítségével: $P_- = E_0$, $P_+ = I - E_0$, ahol E_λ a G operátor fentebb bevezetett spektrálserege, és

(2. 8) $$(x, y)' = (GP_+x, y) - (GP_-x, y) = (GJx, y) \qquad (x,y \in \mathfrak{E}).$$

A (2. 7), (2. 8) képletekből könnyen nyerhető, hogy

$$\varepsilon(x, x) \leqq (x, x)' \leqq \|GJ\|(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E}),$$

vagyis hogy a τ, τ' topológiák ekvivalensek.

Az, hogy a P_+ (és egyben a P_-) projektor az $(x, y)'$ skaláris szorzatra vonatkozóan ortogonális (önadjungált), közvetlenül igazolható: minthogy G felcserélhető a $P_+ = I - E_0$ operátorral, fennáll

$$(P_+x, y)' = (GP_+x, y) = (P_+Gx, y) = (Gx, P_+y) = (x, P_+y)'.$$

Végül könnyen látható, hogy $J^2 = I$, és ezért

$$G(x, y) = (Gx, y) = (GJ^2x, y) = (Jx, y)' \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

A most vizsgált eset, amikor a $G(x, y)$ alak hermitikus Gram-operátora $G = J = P_+ - P_-$ alakú, a továbbiakban fontos szerepet játszik (lásd a 6. §-t). Az $\mathfrak{E}$ Hilbert-teret ebben az esetben *J-metrikával ellátott térnek* vagy *J-térnek* fogjuk nevezni.

Végül előfordulhat, hogy a megadott J-metrika olyan, hogy $\varkappa = \min(\dim P_+, \dim P_-) < \infty$. A $\varkappa$ számot a J-metrika *indefinitási rangjának* nevezzük, és az ilyen J-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ teret $\Pi_\varkappa$-val jelöljük (meghatározottság kedvéért a továbbiakban fel fogjuk tenni, hogy $\varkappa = \dim P_+$).

A $\Pi_\varkappa$ tér axiomatikusan is leírható, ezt a 3. § 4. pontjában fogjuk ismertetni. Azonkívül, mint alább meglátjuk, a 6. § egyik eredménye lehetővé teszi, hogy az összes J-terek családjában a $\Pi_\varkappa$ tereket másképpen is jellemezzük (6. 5. tétel).

8. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{E}$ tér τ topológiája a *G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis*, ha τ balról (jobbról) felülmúlja a G-metrikát és fennáll a Fréchet—Riesz-tétel: bármely lineáris τ-folytonos $f(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ funkcionál előállítható

(2. 9) $$f(x) = G(x, y_0)$$

(ill. $f(x) = \overline{G(y_0, x)}$) alakban valamilyen $y_0 \in \mathfrak{E}$ segítségével.

Nyilvánvaló, hogy ezen előállítások egyértelműsége ekvivalens az $\mathfrak{E}$ térnek a megfelelő oldalról nemelfajuló voltával.

2. 3. TÉTEL. *A $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ $\left(\tau_0^j(\mathfrak{E}, G)\right)$ topológia a leggyengébb a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis topológia.*

A bizonyítást a $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiára végezzük el. Ha az $f(x)$ lineáris funkcionál folytonos ebben a topológiában, akkor az 1°. állítás alapján találhatók olyan $y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{E}$ vektorok és olyan M szám, hogy

$$|f(x)| \leqq M \max_{1 \leqq i \leqq n} |G(x, y_i)|.$$

Ebből következik, hogy ha

(2.10) $$G(x, y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

akkor $f(x) = 0$. Ha (2. 10) érvényes minden $x \in \mathfrak{E}$ mellett, akkor $f = 0$, következésképpen az $y_0 = 0$ választás esetén teljesül a (2. 9) összefüggés.

Most tegyük fel, hogy a (2. 10) képlet nem minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre igaz. Tekintsük a következő n-dimenziós vektorok halmazát:

$$\bar{g}_x = \{G(x, y_1), \ldots, G(x, y_n)\}.$$

Legyenek $x_1, \ldots, x_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ olyanok, hogy a $\bar{g}_{x_1}, \ldots, \bar{g}_{x_n}$ vektorok lineárisan függetlenek és hogy tetszés szerinti x-re a $\bar{g}_x$ vektor $x_1, \ldots, x_k$ lineáris kombinációja:

$$\bar{g}_x = \lambda_1 \bar{g}_{x_1} + \ldots + \lambda_k \bar{g}_{x_k} \qquad (\lambda_j = \lambda_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, k).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$G(x, y_i) = G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(2. 11)

$$G(x - (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k), y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebből, amint azt a bizonyítás elején kifejtettük, adódik az

(2. 12) $$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k)$$

egyenlőség.

Most tegyük fel, hogy $\mu_1, \ldots, \mu_n$ kielégíti a

$$\mu_1 G(x_j, y_1) + \ldots + \mu_n G(x_j, y_n) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

egyenletrendszert, amely kompatibilis, mivel az együtthatókból képezett sorvektorok lineárisan függetlenek. Ekkor érvényes a

(2. 13) $$G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k)$$

egyenlőség. Viszont a (2. 11) képletből következik, hogy

(2. 14) $$G(x, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n) = G(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n).$$

A (2. 12), (2. 13), (2. 14) összefüggések felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszés szerinti x-re

$$f(x) = G(x, \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n),$$

vagyis az

$$y_0 = \bar{\mu}_1 y_1 + \ldots + \bar{\mu}_n y_n$$

jelölés mellett fennáll (2. 9).

Mivel a 2°. állítás alapján τ_0^b a leggyengébb, a G-metrikát balról felülmúló topológia, a 2. 3. tételt bebizonyítottuk.

A G-metrikával kompatibilis topológia, amint a továbbiakban meg fogjuk mutatni, általában nincs egyértelműen meghatározva. Abban az alkalmazások szempontjából fontos esetben, amikor a tér G-metrikával ellátott reflexív $\mathfrak{B}$ tér (($\mathfrak{B}^r$, G)-*tér*), meg fogjuk adni a legerősebb ilyen topológiát. Ehhez szükségünk lesz a következő tételre.

2. 4. TÉTEL[6]. *Ha az $\mathfrak{E}$ térben a τ', τ'' lokálisan konvex topológiák balról (jobbról) kompatibilisak a G-metrikával és τ' félnormálható, akkor*

(2. 15) $$\tau' \geqq \tau''.$$

[6] A 2. 4. tétel igaz marad akkor is, ha τ' megszámlálhatóan sok félnormával írható le, azaz metrizálható (vö. az [51], IV. fej., 2. §, 6. állítással, ahol az egész tárgyalás szeparált topológiákra vonatkozik; ebben az esetben τ' az úgynevezett MACKEY-féle topológia).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a τ' topológiát a $p(x)$ félnorma, a τ'' topológiát pedig a $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in A)$ félnormákból álló rendszer értelmezi és hogy ezek a topológiák balról kompatibilisak a G-metrikával. Ha (2. 15) nem teljesül, akkor van olyan $\mathfrak{U}^{(\varepsilon)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(0)$ τ''-környezet, hogy bármilyen $\mathfrak{V}^{\delta}(0)$ τ'-környezetre az

$$\mathfrak{N}_\delta = \mathfrak{V}^\delta(0) \setminus \mathfrak{U}^{(\varepsilon)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(0)$$

halmaz nem üres.

Legyen $x_n \in \mathfrak{N}_{\frac{1}{n}}$. Nyilván található olyan $k_0 \leqq k$ természetes szám, hogy végtelen sok n_i természetes számra fennálljanak a

$$p(x_{n_i}) < \frac{1}{n_i}, \qquad p_0(x_{n_i}) \equiv p_{\alpha_{k_0}}(x_{n_i}) \geqq \varepsilon$$

egyenlőtlenségek. Legyen $y_i = n_i x_{n_i}$. Akkor

$$p(y_i) < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{2. 16}$$

$$p_0(y_i) \geqq \varepsilon n_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2. 17}$$

Most tekintsük az $\mathfrak{E}$ térben azt az $\mathfrak{L}_0$ lineált, amely a $p_0(x) = 0$ egyenletet kielégítő $x \in \mathfrak{E}$ vektorokból áll. Képezzük az $\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}/\mathfrak{L}_0$ faktor-teret, és tetszés szerinti $X \in \tilde{\mathfrak{E}}$ elem normáját értelmezzük az $\|X\| = p_0(x)$ képlettel, ahol $x \in X$. Könnyen belátható, hogy $\|X\|$-nak ez a definíciója egyértelmű és ily módon $\tilde{\mathfrak{E}}$ normált térré válik. Legyen $F(X)$ tetszés szerinti lineáris folytonos funkcionál az $\tilde{\mathfrak{E}}$ téren $(F \in \tilde{\mathfrak{E}}^*)$: $|(F(X)| \leqq \|F\| \|X\|$. Értelmezzünk egy $f(x)$ lineáris funkcionált az $\mathfrak{E}$ téren a következőképpen:

$$f(x) = F(X), \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$|f(x)| \leqq \|F\| \; p_0(x),$$

tehát az 1°. állítás alapján $f(x)$ τ''-folytonos. Ennélfogva található olyan y_0, amelyre $f(x) \equiv G(x, y_0)$, és így az $f(x)$ funkcionál τ'-folytonos. Megint felhasználva az 1°. állítást azt kapjuk, hogy valamilyen $M_f > 0$ számmal

$$|f(x)| \leqq M_f p(x)$$

minden $x \in \mathfrak{E}$ elemre. Következésképpen (2.16) alapján $|f(y_i)| \leqq M_f$, tehát

$$|F(Y_i)| \leqq M_f \qquad (y_i \in Y_i \in \tilde{\mathfrak{E}}, \; i = 1, 2, \ldots).$$

Ily módon tetszés szerinti rögzített $F \in \tilde{\mathfrak{E}}^*$ mellett az $\{F(Y_i)\}$ számhalmaz korlátos, úgyhogy a BANACH—STEINHAUS-tétel (lásd [57], 255. oldal) értelmében az $\{Y_i\}$ halmaz korlátos az $\tilde{\mathfrak{E}}$ térben. Ez azonban ellentmond a (2. 17) összefüggésekből adódó

$$\|Y_i\| \geqq \varepsilon n_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenségeknek. A kapott ellentmondásból következik a (2. 15) reláció helyessége. Ezzel a 2. 4. tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha két félnormálható topológia balról (jobbról) kompatibilis a G-metrikával, akkor ezek a topológiák ekvivalensek egymással.*

Most tegyük fel, hogy az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{B}, G)$-tér, és legyen G^b és G^j a $G(x, y)$ alak bal oldali ill. jobb oldali Gram-operátora (lásd a 6. pontot). Definiáljunk $\mathfrak{E}$-ben két félnormálható topológiát: a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiát a $p^b(x)=\|G^b x\|$ félnorma, a $\tau_1^j(\mathfrak{E}, G)$ topológiát pedig a $p^j(x)=\|G^j x\|$ félnorma segítségével.

2. 5. TÉTEL. *Ha az $\mathfrak{E}$ tér $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, akkor $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ $\left(\tau_1^j(\mathfrak{E}, G)\right)$ a legerősebb a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis lokálisan konvex topológia.*

Bizonyítás. Az, hogy $\tau_1^b=\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról felülmúlja a G-metrikát, az alábbi egyenlőtlenség-sorozatból következik (a jelöléseket lásd a 6. pontban):

$$|G(x, y)|=|h_x(y)|\leqq\|h_x\|\,\|y\|=\|G^b x\|\,\|y\|=\|y\|p^b(x).$$

Most legyen $f(x)$ tetszés szerinti τ_1^b-folytonos funkcionál az $\mathfrak{E}$ téren:

$$|f(x)|\leqq C_f p^b(x). \tag{2. 18}$$

Értelmezzünk a G^b operátor $\mathfrak{R}(G^b)(\subset\mathfrak{E}^*)$ értékkészletén egy $F(h)$ funkcionált az

$$F(h)=f(x) \quad \text{ha} \quad h=G^b x \tag{2. 19}$$

képlet segítségével. Az F funkcionál egyértékű, ugyanis a $G^b x_1=G^b x_2$ egyenlőségből következik, hogy $p^b(x_1-x_2)=\|G^b(x_1-x_2\|=0$, vagyis (2. 18) miatt $f(x_1)=f(x_2)$. Az F funkcionál lineáris volta nyilvánvaló. Minthogy $h\in\mathfrak{R}(G^b)$, $h=G^b x$ esetén

$$|F(h)|=|f(x)|\leqq C_f\|G^b x\|=C_f\|h\|,$$

a HAHN—BANACH-tétel komplex terekre vonatkozó analogonját (lásd [51], 110. oldal) felhasználva F-et folytonos funkcionálként kiterjeszthetjük az egész $\mathfrak{E}^*$ térre. Az $\mathfrak{E}$ tér reflexivitása folytán található olyan $y_0\in\mathfrak{E}$ vektor, hogy $h\in\mathfrak{E}^*$ esetén

$$F(h)=\overline{h(y_0)}.$$

A (2. 19) összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy minden $x\in\mathfrak{E}$ elemre

$$f(x)=\overline{h(y_0)}=(h, y_0)=(G^b x, y_0)=G(x, y_0),$$

vagyis az f funkcionálra érvényes a (2. 9) előállítás. Ily módon a τ_1^b topológia balról kompatibilis a G-metrikával, és minthogy τ_1^b félnormálható, a 2. 4. tétel értelmében ez a legerősebb ilyen tulajdonságú topológia.

KÖVETKEZMÉNY. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{B}^r, G)$-térben egy lokálisan konvex τ topológia a G-metrikával balról (jobbról) kompatibilis legyen, szükséges és elégséges a*

$$\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)\leqq\tau\leqq\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$$

$$\left(\tau_0^j(\mathfrak{E}, G)\leqq\tau\leqq\tau_1^j(\mathfrak{E}, G)\right)$$

összefüggések fennállása.

Megemlítjük, hogy amint a

$$G(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\, dt \qquad (x, y \in \mathfrak{C})$$

alak útján G-metrikával felruházott $\mathfrak{C} = C(0, 1)$ tér példája mutatja, a 2.5. tételben lényeges az a követelmény, hogy $\mathfrak{C}$ reflexív legyen.

3. §. G-terek lineáljai és alterei

1. Legyen $\mathfrak{C}$ valamilyen G-tér. Ezt a teret először tisztán algebrai szempontból fogjuk vizsgálni, vagyis mindenféle topológiától elvonatkoztatva. Egyszerűség kedvéért a G-metrikát hermitikusnak fogjuk tekinteni, bár az olvasó meggyőződhet majd róla, hogy megfontolásaink nagyrészt helyesek maradnak az általános esetben is, hacsak a „G-ortogonális, izotróp, nemelfajuló stb." kifejezéseket a „balról (jobbról) G-ortogonális, izotróp, nemelfajuló stb." kifejezésekkel helyettesítjük. Azokban a pontokban viszont, ahol lényeges, hogy a G-metrika hermitikus legyen (mint például a 2., 3. és 4. pontban), ezt a körülményt külön hangsúlyozni fogjuk.

Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{C})$ nemelfajuló lineált *maximális nemelfajuló* lineálnak mondjuk, ha nincs benne $\mathfrak{C}$-nek egyetlen más nemelfajuló lineáljában sem. Igaz a következő *maximalitási elv:*

1°. *Minden nemelfajuló* $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{C})$ *lineál benne van egy maximális nemelfajuló lineálban.*

Csakugyan, ha $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ egy $\mathfrak{C}$-beli lineálokból álló, az $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_\beta$ inkluzióra nézve teljesen rendezett rendszer, akkor $\bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{L}_\alpha$ ismét lineál, méghozzá nemelfajuló, ha mindegyik $\mathfrak{L}_\alpha (\alpha \in A)$ nemelfajuló.

Ezek szerint az összes nemelfajuló lineálok halmaza az inkluzióra nézve induktíve rendezett, és így az 1°. állítás Zorn lemmájából adódik.

Az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{C})$ halmaz *G-ortogonális komplementumának* azoknak az $\mathfrak{C}$-beli vektoroknak az $\mathfrak{M}'$ összességét nevezzük, amelyek G-ortogonálisak $\mathfrak{M}$-re. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{M}'$ lineál. Ha $\mathfrak{L}$ lineál az $\mathfrak{C}$ térben, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$ az $\mathfrak{L}$ lineál izotróp lineálja, úgyhogy $\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor nemelfajuló, ha $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{0\}$. A G-ortogonális komplementumoknak vannak bizonyos nyilvánvaló tulajdonságai, mint például:

$$\mathfrak{L} \subset (\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}''. \tag{3.1}$$

$$\text{Ha} \quad \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}, \quad \text{akkor} \quad \mathfrak{L}' \supset \mathfrak{M}' \quad \text{és} \quad \mathfrak{L}'' \subset \mathfrak{M}''. \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{L}''' = \mathfrak{L}', \tag{3.3}$$

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{M})' = \mathfrak{L}' \cap \mathfrak{M}', \tag{3.4}$$

$$(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})' \supset \mathfrak{L}' + \mathfrak{M}'. \tag{3.5}$$

Az utolsó két képletben, és a továbbiakban mindig, a „$+$" jel a halmazok algebrai összeadását jelöli, vagyis $\mathfrak{L} + \mathfrak{M}$ az $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ halmazok lineáris burka. Ha itt $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \{0\}$, akkor $\mathfrak{L} + \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \dotplus \mathfrak{M}$, vagyis az összeg direkt összeg. A (3. 1)—(3. 5) képletek nyilván nemcsak lineálokra, hanem tetszés szerinti $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{C}$ halmazokra is érvényesek.

Az $\mathfrak{E}_0=\mathfrak{E}'$ lineál az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja (2. §, 1. pont), és bármelyik $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ lineálra

$$\mathfrak{L}'\supset\mathfrak{E}_0. \tag{3.6}$$

2°. *Az $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor maximális nemelfajuló lineál, ha*

$$\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{E}_0=\mathfrak{E}. \tag{3.7}$$

Valóban, az, hogy $\mathfrak{L}$ nemelfajuló, közvetlenül következik az $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{E}_0$ izotrop lineáljának definíciójából, valamint a (3. 7) direkt felbontásból, és fennáll $\mathfrak{L}'=\mathfrak{E}_0$. Ha $\mathfrak{L}_1$ nemelfajuló lineál és $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}_1$, akkor $\mathfrak{L}_1'\subset\mathfrak{L}'=\mathfrak{E}_0$, úgyhogy (3. 6) értelmében $\mathfrak{L}_1'=\mathfrak{E}_0$. De $\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_1'=\{0\}$, ennélfogva $\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{E}_0=\{0\}$ és így $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}$, azaz $\mathfrak{L}$ maximális nemelfajuló lineál.

Fordítva, ha $\mathfrak{L}$ maximális nemelfajuló lineál, akkor $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{E}_0=\{0\}$. Állítsuk elő az $\mathfrak{E}$ teret

$$\mathfrak{E}=(\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{E}_0)\dotplus\mathfrak{M}=(\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{M})\dotplus\mathfrak{E}_0$$

alakú direkt összegként (lásd pl. [58], 2. old.), ahol $\mathfrak{M}$ valamilyen lineál. A fent bizonyítottak szerint ebből következik, hogy $\mathfrak{L}\dotplus\mathfrak{M}$ maximális nemelfajuló lineál, mivel azonban már $\mathfrak{L}$ ilyen tulajdonságú volt, $\mathfrak{M}=\{0\}$, és ezzel a (3. 7) összefüggést igazoltuk.

Az 1°. és 2°. állításból kitűnik, hogy az $\mathfrak{E}_0$ izotróp lineálnak az $\mathfrak{E}$ térből (3. 7) alakú felbontás segítségével történő „kiválasztása" nem egyértelmű. Egyébként ez már abban az esetben is nyilvánvaló, amikor az $\mathfrak{E}$ tér véges dimenziójú (mondjuk, kétdimenziós) és az $\mathfrak{E}_0$ izotróp lineál egydimenziós[7].

2. Hermitikus G-metrika esetén a $G(x,x)$ szám minden $x\in\mathfrak{E}$ elemre valós. Attól függően, hogy pozitív, negatív vagy nullával egyenlő, az x vektort *pozitívnak, negatívnak*, illetve *semlegesnek* fogjuk nevezni. Az olyan $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineált, amelynek minden $x(\neq 0)$ vektora pozitív (negatív, semleges), *pozitív (negatív, semleges)* lineálnak mondjuk. $\mathfrak{E}$ pozitív és negatív lineáljait közös néven *definit* lineáloknak nevezzük. Természetes módon értelmezhetők az $\mathfrak{E}$ tér *nemnegatív* és *nempozitív*, valamint *maximális* pozitív (negatív, nemnegatív, nempozitív, semleges) lineáljai. A lineálok imént felsorolt fajtáinak mindegyikére érvényes, és az 1°. állítással teljesen analóg módon bizonyítható a megfelelő *maximalitási elv*.

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{E}$ tér előállítható

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0\dotplus\mathfrak{E}_+\dotplus\mathfrak{E}_-$$

G-ortogonális direkt összeg alakjában, ahol $\mathfrak{E}_0$ az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja, $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ pedig pozitív, ill. negatív lineál. Minden ilyen felbontást az $\mathfrak{E}$ tér *kanonikus felbontásának* nevezünk. Könnyen látható, hogy egy *kanonikus felbontás $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ komponensei maximális pozitív, ill. negatív lineálok az $\mathfrak{E}$ térben.*

A kanonikus felbontás igen egyszerű példáját szolgáltatja az a $(\mathfrak{H}, G^h)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelyben

$$G(x,y)=(Gx,y)$$

[7] Az utóbbi körülmény nem akadályozta meg A. UHLMANN-t abban ([42], 2. §), hogy a (3. 7) felbontás egyértelműségét állítsa.

és a G Gram-operátor korlátos hermitikus operátor $\mathfrak{E}$-ben. Ha G spektrális felbontása

$$G = \int_m^M \lambda\, dE_\lambda \qquad (E_{\lambda-0} = E_\lambda;\quad m < \lambda \leqq M)$$

alakú, akkor a

$$P_- = \int_m^0 dE_\lambda, \qquad P_0 = E_{+0} - E_0, \qquad P_+ = \int_{+0}^M dE_\lambda$$

ortogonális projektorok három, egymásra (a Hilbert-féle $\mathfrak{H}$-metrika értelmében) merőleges $\mathfrak{E}_0 = P_0\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$ alteret határoznak meg. Könnyű belátni, hogy az így kapott $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ alterek a Hilbert-tér kanonikus (tehát a G-metrikára nézve is ortogonális) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$ felbontását értelmezik (lásd pl. [11]). Abban a speciális esetben, amikor $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$ és ezenfelül a G operátor spektruma nem metszi a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ számközt, ez a példa már szerepelt a 2. § 7. pontjában és ennek segítségével jutottunk el a J-metrika fogalmához.

3. A G^h-típusú $\mathfrak{E}$ terek kanonikus felbontásának kérdése szoros kapcsolatban áll a 2. § 5. pontjában említett majoráns-problémával. Valóban, ha

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_- \tag{3.8}$$

az $\mathfrak{E}$ tér egy kanonikus felbontása, akkor az a $H(x, y)$ hermitikus bilineáris alak, amelyet a

$$H(x, y) = G(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_+;$$
$$H(x, y) = -G(x, y), \qquad x, y \in \mathfrak{E}_-;$$
$$H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_+) = H(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_-) = H(\mathfrak{E}_+, \mathfrak{E}_-) = 0$$

összefüggések értelmeznek, a $G(x, y)$ alak nemnegatív majoránsa. Speciálisan ha $\mathfrak{E}_0 = \{0\}$, akkor $H(x, y)$ hermitikusan pozitív majoráns. Ha $\mathfrak{E}_0 \neq \{0\}$, akkor hermitikusan pozitív majoráns nyerése céljából elég a $H(x, y)$ alakhoz tetszés szerinti, az $\mathfrak{E}$ téren hermitikusan pozitív alakot hozzáadni.

Tehát *a* (3. 8) *kanonikus felbontás útján az adott G-metrika hermitikusan pozitív majoránsaihoz jutunk.* Ezek szerint a nem majorálható G-metrikára vonatkozó példa, amelyet a 2. § 4. pontjában ismertettünk, többek között azt mutatja, hogy *vannak G-terek, amelyek nem bonthatók fel kanonikusan*[8]. Ezzel kapcsolatban felmerül a probléma: *van-e mindegyik G^h-térnek, amelynek a G-metrikája majorálható, legalább egy kanonikus felbontása*? Erre a kérdésre a válasz, amint a 2. pontban láttuk, igenlő, ha az adott G-metrikához található olyan hermitikusan pozitív $H(x,y)$ majoráns, amely az $\mathfrak{E}$ térben egy teljes Hilbert-topológiát indukál. Ha azonban $H(x, y)$ (nem teljes) pre-Hilbert-topológiát indukál, akkor a feladat lényegesen bonyolultabbá válik.

4. Legyen $\mathfrak{E}$ nemelfajuló G^h-tér, amelynek van

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$$

kanonikus felbontása. Az $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ terek szeparált pre-Hilbert-terek a $G(x, y)$, ill.

[8] *Megjegyzés a korrektúránál.* Mint megtudtuk, „felbonthatatlan" térre ennél egyszerűbb példa szerepel a [65] dolgozatban, amely még 1946-ból származik. Ennek a példának az elemzése azt mutatja, hogy a benne megszerkesztett G-metrika nem majorálható (vö. 2. § 4. és 5. pont).

$-G(x, y)$ skaláris szorzatra nézve. Ha ez a két tér teljes, akkor $\mathfrak{E}$ (teljes) Hilbert-tér az

$$\text{(3. 9)} \quad \begin{cases} (x, y) = G(x_+, y_+) - G(x_-, y_-) & (x, y \in \mathfrak{E}), \\ x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-; \quad x_+, y_+ \in \mathfrak{E}_+; & x_-, y_- \in \mathfrak{E}_- \end{cases}$$

skaláris szorzatra vonatkozóan, és $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ egymásra merőleges (zárt) alterek. Ezek szerint a vizsgált esetben az $\mathfrak{E}$ tér egyszerűen J-metrikával ellátott Hilbert-tér (lásd 2. §, 7. pont).

Ha viszont az $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ terek közül legalább az egyik nem teljes, akkor a nem teljes tereket a szokásos módon teljessé téve és a $G(x, y)$ alakot folytonosan kiterjesztve ismét J-metrikával ellátott térre jutunk. Nyilván ugyanezt a teret kapjuk, ha rögtön az egész $\mathfrak{E}$ teret tesszük teljessé a (3. 9) skaláris szorzatra vonatkozóan és a $G(x, y)$ alakot (3. 9)-re nézve folytonosan terjesztjük ki.

Az ismertetett eljárás többek között lehetővé teszi, hogy a $\Pi_\varkappa$ terekre (lásd 2. §, 7. pont) új módon tekintsünk. Ezek a terek axiomatikusan is leírhatók a következőképpen. Legyen megadva egy G^h-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelynek az alábbi tulajdonságai vannak:

I. $\mathfrak{E}$ nemelfajuló.

II. $\mathfrak{E}$ tartalmaz $\varkappa$-dimenziós $(0 < \varkappa < \infty)$ pozitív lineált és nem tartalmaz ennél magasabb dimenziójú pozitív lineált, (feltesszük, hogy $2\varkappa \leqq \dim \mathfrak{E} \leqq \infty$).

Ebből a két kikötésből azonnal adódik (lásd pl. a [7] dolgozatot) az $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$ kanonikus felbontás, ahol $\dim \mathfrak{E}_+ = \varkappa$. Ha $\mathfrak{E}_-$ teljes Hilbert-tér (az $\|x\| = |G(x, x)|^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathfrak{E}_-$ normára nézve), akkor az $\mathfrak{E}$ tér $\Pi_\varkappa$ típusú. Ellenkező esetben úgy jutunk $\Pi_\varkappa$ térhez, hogy az $\mathfrak{E}$ teret előbb teljessé tesszük az imént leírt módon (vö. [7], 1. 4. tétel).

5. Legyen τ tetszés szerinti, az adott G-metrikát felülmúló (2. §, 3. pont) topológia az $\mathfrak{E}$ G-térben. Minthogy mindegyik $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ (ill. $h_{x_0}(y) = G(x_0, y)$) funkcionál τ-folytonos, *bármelyik* $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ *halmaz* $\mathfrak{M}'$ *G-ortogonális komplementuma* τ*-zárt* (2. §, 2. pont). Továbbá könnyen látható, hogy

$$\text{(3. 10)} \qquad (\overline{\mathfrak{M}}^{(\tau)})' = \overline{(\mathfrak{M}')}^{(\tau)} = \mathfrak{M}'.$$

Megemlítjük, hogy ez az összefüggés érvényes marad akkor is, ha a baloldalon az $\mathfrak{M}$ halmazt lineáris burkával helyettesítjük. Egyébként az alább következő 3. 1. tételben is az $\mathfrak{L}$ lineál helyett vehetünk tetszés szerinti $\mathfrak{E}$-beli halmazt, de akkor az $\overline{\mathfrak{L}}_{(\tau)}$ szimbólumon az $\mathfrak{L}$ halmaz τ-zárt lineáris burkát kell érteni.

3. 1. TÉTEL. *Ha* τ *tetszés szerinti, a G-metrikával kompatibilis topológia az* $\mathfrak{E}$ *térben,* $\mathfrak{L}$ *pedig tetszés szerinti lineál* $\mathfrak{E}$*-ben, akkor* $\mathfrak{L}''$ *megegyezik az* $\mathfrak{L}$ *lineál* τ*-lezárásával:*

$$\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy a valamely G-metrikával kompatibilis τ topológiák felülmúlják ezt a metrikát (2. §, 8. pont) és így a jelen pont elején mondottak értelmében $\mathfrak{L}'$ és $\mathfrak{L}''$ τ-zárt. Másrészt $\mathfrak{L}'' \supset \mathfrak{L}$, tehát

$$\mathfrak{L}'' \supset \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}.$$

Az ellenkező irányú inkluzió fennállásának igazolása céljából tekintsünk egy $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ pontot. Ekkor van olyan $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0)$ τ-környezet, amelyet a

$$p_{\alpha_i}(x-x_0) < \delta \qquad (i=1, \ldots, k)$$

egyenlőtlenség-rendszer határoz meg (a $p_\alpha(x)$ $(\alpha \in A)$ félnormák értelmezik a τ topológiát az $\mathfrak{E}$ térben (2. §, 2. pont)) és amelyre az $\mathfrak{U}^{\delta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}(x_0) \cap \mathfrak{L}$ halmaz üres. Más szóval, ha bevezetünk egy $p(x)$ félnormát a

$$p(x) = \sup_{1 \leqq i \leqq k} p_{\alpha_i}(x)$$

képlet segítségével, akkor

$$\inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x'-x_0) \geqq \delta. \tag{3.11}$$

Tekintsük az $\mathfrak{E}$ téren a

$$q(x) = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x-x') \tag{3.12}$$

funkcionált és bizonyítsuk be, hogy $q(x)$ félnorma. Valóban:

α) $q(x) \geqq 0$.

β) $q(\lambda x) = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - x') = \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(\lambda x - \lambda x') = |\lambda| \inf_{x' \in \mathfrak{L}} p(x-x') = |\lambda|\, q(x)$.

γ) Ha $x_1, x_2 \in \mathfrak{E}$, akkor bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz találhatók olyan $x_1', x_2' \in \mathfrak{L}$ vektorok, hogy

$$p(x_1 - x_1') < q(x_1) + \varepsilon, \quad p(x_2 - x_2') < q(x_2) + \varepsilon.$$

Legyen $x' = x_1' + x_2' \in \mathfrak{L}$. Akkor

$$q(x_1 + x_2) \leqq p(x_1 + x_2 - x') \leqq p(x_1 - x_1') + p(x_2 - x_2') < q(x_1) + q(x_2) + 2\varepsilon,$$

és minthogy ε tetszés szerinti,

$$q(x_1 + x_2) \leqq q(x_1) + q(x_2).$$

Most tekintsük az $\mathfrak{L}_0 = \{x_0\}$ egydimenziós lineált, és értelmezzünk $\mathfrak{L}_0$-on egy $f(x)$ lineáris funkcionált az

$$f(\alpha x_0) = \alpha\delta$$

egyenlőséggel. Minthogy $q(\alpha x_0) = |\alpha|\, q(x_0)$, továbbá (3. 11) és (3. 12) értelmében $q(x_0) \geqq \delta$, az $\mathfrak{L}_0$ lineálon fennáll az

$$|f(x)| \leqq q(x) \tag{3.13}$$

egyenlőtlenség. A HAHN—BANACH-tétel szerint $f(x)$-et a (3. 13) összefüggés megtartásával folytatni lehet az egész $\mathfrak{E}$ térre. A (3. 12) definícióból következik, hogy $q(x) \leqq p(x)$, és így (2. § 1°.) $f(x)$ τ-folytonos. Minthogy τ kompatibilis G-vel, található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, amelyre

$$f(x) = G(x, y_0).$$

(3. 12) folytán $x \in \mathfrak{L}$ esetén $q(x) = 0$, tehát (3. 13) értelmében minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra $G(x, y_0) = f(x) = 0$, vagyis $y_0 \in \mathfrak{L}'$. A $G(x_0, y_0) = f(x_0) = \delta \neq 0$ összefüggések azt mu-

tatják, hogy $x_0 \notin (\mathfrak{L}')' = \mathfrak{L}''$. Ily módon bebizonyítottuk, hogy $x_0 \notin \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)}$ esetén $x_0 \notin \mathfrak{L}''$, vagyis

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} \supset \mathfrak{L}''.$$

A tételt bebizonyítottuk.

Következményként nyerjük az alábbi állítást:

3°. *Az $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$ egyenlőséghez szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál τ-zárt legyen, ahol τ egy a G-metrikával kompatibilis topológia.*

Az $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$ egyenlőség másfajta elégséges feltételeit később, a 4. §-ban fogjuk tárgyalni.

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{L}$ *lineál τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben*, ha

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}.$$

4°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál τ-sűrű legyen $\mathfrak{E}$-ben (τ egy G-vel kompatibilis topológia $\mathfrak{E}$-ben), szükséges és elégséges, hogy teljesüljön az*

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}' (= \mathfrak{E}_0) \tag{3.14}$$

egyenlőség, ahol $\mathfrak{E}_0$ az $\mathfrak{E}$ tér izotróp lineálja. Speciálisan ha $\mathfrak{E}$ nemelfajuló, akkor (3. 14) *az*

$$\mathfrak{L}' = \{0\}$$

alakot ölti.

Valóban, ha $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$, akkor $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{E}'' = \mathfrak{E}$, azaz $\overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$. Megfordítva, ha $\mathfrak{L}'' = \overline{\mathfrak{L}}^{(\tau)} = \mathfrak{E}$, akkor $\mathfrak{L}''' = \mathfrak{E}'$, következésképpen (lásd a (3. 3) képletet) $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}'$.

5°. *Az $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ összeg akkor és csak akkor τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben (a τ topológiáról ugyanazt tesszük fel, mint a 4°. állításban), ha $\mathfrak{L}''$ mindegyik izotróp vektora az $\mathfrak{E}$ térnek is izotróp vektora (vagyis $\mathfrak{L}'' \cap (\mathfrak{L}'')' = \mathfrak{E}_0$). Speciálisan ha $\mathfrak{E}$ nemelfajuló, akkor a feltétel arra redukálódik, hogy $\mathfrak{L}''$ nemelfajuló.*

A bizonyítás a 4°. állításból és a (3. 4), (3. 3) szabályokból adódik.

Az $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{E}$ *egyenlőség* kritériumaival a 4. § jelentős részében foglalkozunk majd (definit $\mathfrak{L}$ lineálok esetében pedig az 5. §-ban is).

6. Ebben a pontban a G^h-terek semleges lineáljainak (lásd 2. pont) a tulajdonságaival foglalkozunk. Bizonyítást csak azokban az esetekben közlünk, amikor az eredmények újak. A többi tény bizonyítását az olvasó megtalálhatja E. Scheibe [50] dolgozatában, ahonnan mi is merítettük őket.

6°. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor lesz $\mathfrak{L}'$ izotróp lineálja, ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál és $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$.*

Hogy megkönnyítsük ennek és a következő állításoknak az igazolását, emlékeztetünk arra, hogy mindegyik $\mathfrak{L}$ semleges lineálra jellemző az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$ összefüggés.

3. 2. Tétel. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ semleges lineál akkor és csak akkor maximális semleges lineál, ha $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$, és $\mathfrak{L}'$ szemidefinit (azaz nemnegatív vagy nempozitív) lineál.*

Következmény. *Bármelyik $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ maximális semleges lineál vagy maximális nemnegatív lineál, vagy maximális nempozitív lineál, vagy pedig egyszerre mindkét tulajdonsággal rendelkezik.*

Valóban, ha feltesszük az ellenkezőt, akkor azonnal adódik, hogy $\mathfrak{L}'$ tartalmaz pozitív és negatív vektorokat is, ami ellentmond a 3. 2. tételnek.

Az olyan $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ semleges lineálokat, amelyek egyidejűleg maximális nemnegatív és maximális nempozitív lineálok, *hipermaximálisaknak* fogjuk nevezni.

3. 3. TÉTEL. *Az $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ lineál akkor és csak akkor hipermaximális semleges lineál, ha $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$.*

Bizonyítás. Mint minden semleges lineálra, az $\mathfrak{L}$ hipermaximális lineálra is teljesül az $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}'$ összefüggés, továbbá $\mathfrak{L}$ maximalitása miatt $\mathfrak{L}'$ szemidefinit (3. 2. tétel). Minthogy pedig $\mathfrak{L}$ hipermaximális, nyilván $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'$. Ekkor $\mathfrak{L}$ semleges lineál, és a 3. 2. tétel értelmében maximális semleges lineál. De $\mathfrak{L}$ hipermaximális is, mert különben $\mathfrak{L}'$ tartalmazna pozitív vagy negatív vektort. A tételt bebizonyítottuk.

A további állítások során két $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1\subset\mathfrak{E}$ semleges lineálból álló párokat fogunk vizsgálni. Minden ilyen párra érvényesek az alábbi azonosságok:

$$(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)\cap(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}'+\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1', \tag{3. 15}$$

$$\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}')\cap(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1'). \tag{3. 16}$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{L}$ és az $\mathfrak{L}_1$ semleges lineál egymással *ferdén kapcsolt,* ha

$$\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1'=\{0\}.$$

A (3. 15) azonosságból rögtön adódik a következő állítás:

7°. *Az $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1(\subset\mathfrak{E})$ semleges lineálok akkor és csak akkor ferdén kapcsoltak, ha az $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ lineál nemelfajuló.*

A (3.16) azonosságból viszont a következőt nyerjük:

8°. *Az $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1(\subset\mathfrak{E})$ semleges lineálokra az*

$$\alpha)\quad \mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'=\mathfrak{E}$$

és a

$$\beta)\quad \mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1'=\mathfrak{E}$$

állítás egymással ekvivalens.

Megemlítjük, hogy az α) (vagy β)) állításból nemelfajuló $\mathfrak{E}$ tér esetében az alábbi következményeket kapjuk:

γ) *$\mathfrak{L}'$ és $\mathfrak{L}_1'$ egymással ferdén kapcsolt, vagyis $\mathfrak{L}'\cap\mathfrak{L}_1''=\mathfrak{L}''\cap\mathfrak{L}_1'=\{0\}$;*
δ) *$\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$ nemelfajuló és $(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)''=\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1$;*
ε) *$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}_1''$, továbbá $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{L}_1$ ferdén kapcsolt;*
ζ) *$(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'$ nemelfajuló és*

$$\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)';\quad \mathfrak{L}_1'=\mathfrak{L}_1+(\mathfrak{L}+\mathfrak{L}_1)'.$$

Az E. SCHEIBE [50] dolgozatának 8. §-ában található 6. tétel azonban, amely szerint nemelfajuló $\mathfrak{E}$ térben az $\alpha)-\zeta)$ állítások mindannyian ekvivalensek, nyilvánvalóan téves.

Valóban, a $\zeta)\to\varepsilon)\to\gamma)$ és $\delta)\to\varepsilon)$ inkluziók ugyan viszonylag könnyen igazolhatók, a $\gamma)\to\beta)$, $\gamma)\to\varepsilon)$ állítások azonban nem helytállók, amiről könnyű meggyőződni akár olyan $\mathfrak{E}$ térre vonatkozó egyszerű példák segítségével is, amelyek (Hilbert-féle) J-terek. Elegendő például, ha veszünk olyan $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1\subset\mathfrak{E}$ (zárt) semleges altereket, amelyek teljesítik a β) (vagy az ε)) feltételt, azután tetszés szerinti, $\mathfrak{L}$-ben, ill. $\mathfrak{L}_1$-ben sűrű, nem zárt lineálokkal helyettesítjük őket. Ekkor a β) és ε) összefüggés többé nem teljesül, γ) viszont érvényben marad (E. SCHEIBE bizonyításában éppen ott a hiba, hogy nyilvánvalónak tekinti a $\gamma) \rightarrow \beta$) inkluziót). Megjegyezzük, hogy a 4°. állítás értelmében a γ) összefüggésből csak az következik, hogy az $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1'$ összegek τ-sűrűek $\mathfrak{E}$-ben (τ tetszés szerinti, G-vel kompatibilis topológia). A $\delta) \rightarrow \alpha$) következtetés is helytelen, ennek megcáfolása azonban bizonyos segédeszközöket igényel, amelyeket a 6. § 3. pontjában fogunk ismertetni.

Az [50] dolgozat 8. §-ában szereplő 6. tétel hibás volta néhány téves állításra vezetett az említett munka ezután következő 7. és 8. tételében. Az utóbbi tételek azonban tartalmaznak helytálló kijelentéseket is, amelyeket most röviden ismertetünk.

Tekintünk egy nemelfajuló, G^h típusú $\mathfrak{E}$ teret, amelynek van kanonikus $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{+} \mathfrak{E}_-$ felbontása. Jelölje $Q_\pm$ azokat az operátorokat („G-vetítéseket"), amelyek minden $x \in \mathfrak{E}$ vektorhoz a megfelelő $x_\pm \in \mathfrak{E}_\pm$ összetevőket rendelik hozzá. A $T = Q_+ - Q_-$ operátor nyilván involúció tulajdonságú: $T^2 = I$, az azonosság operátora. Azonkívül T invariánsan hagyja a G alakot („G-izometria"):

$$G(Tx, Ty) = G(x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

3. 4. TÉTEL. *Az imént megszerkesztett involúciónak a következő tulajdonságai vannak:*

1) *Bármely $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál esetén $\mathfrak{L}$ és $T\mathfrak{L}$ algebrai dimenziója (a Hamel-bázisok számossága* [58]*) megegyezik. Ha az $\mathfrak{L}$ lineál semleges (vagy maximális semleges, vagy $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}''$), akkor $T\mathfrak{L}$ is ugyanilyen tulajdonságú.*

2) *Ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál, akkor a $Q_\pm$ vetítések segítségével történő $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{E}_\pm$ leképezések kölcsönösen egyértelműek. Az $\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}$ lineálnak van kanonikus felbontása, mégpedig*

$$\mathfrak{L} + T\mathfrak{L} = Q_+\mathfrak{L} \dot{+} Q_-\mathfrak{L},$$

ahol $Q_+\mathfrak{L}$ és $Q_-\mathfrak{L}$ egymással G-izometrikus (vagyis izomorf, beleértve a G-metrika változatlanul hagyását is), ha a $Q_-\mathfrak{L}$ lineálon megfordítjuk a G-metrika előjelét.

3) *Ha $\mathfrak{L}$ semleges lineál; akkor $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})''$ nemelfajuló, más szóval az $(\mathfrak{L} + T\mathfrak{L}) + (\mathfrak{L} + T\mathfrak{L})'$ lineál τ-sűrű $\mathfrak{E}$-ben* (vö. az 5°. állítással).

Ily módon a T involúció módot nyújt arra, hogy az $\mathfrak{L}$ semleges lineálhoz megszerkesszünk egy vele ferdén kapcsolt $T\mathfrak{L}$ semleges lineált. Speciálisan ez a módszer mindig alkalmazható a nemelfajuló, $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ terekben, mivel az utóbbiaknak van kanonikus felbontásuk. Speciálisan J-terekben egyszerűen $T = J$ (lásd 6. §, vö. még a [7] munka 2. 3. lemmájával).

7. Áttérve a $(\mathfrak{H}, G)$ típusú $\mathfrak{E}$ terek lineáljainak a vizsgálatára, mindenekelőtt foglalkozzunk az alterekkel, vagyis a ($\mathfrak{H}$-metrikában) zárt $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}$ lineálokkal. Legyen $P_\mathfrak{M}$ az $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{M}$-re való merőleges vetítése. Tekintsük az $\mathfrak{M}$ alteret önmagába leképező $G_\mathfrak{M} = P_\mathfrak{M} G$ korlátos operátort, ahol G az adott G-metrika Gram-operátora $\mathfrak{E}$-ben (2. §, 6. pont). Könnyen belátható, hogy a G-metrika az $\mathfrak{M}$ altéren egy $G_\mathfrak{M}$-metrikát indukál, úgyhogy az $\mathfrak{M}$ altér $(\mathfrak{H}, G_\mathfrak{M})$-tér. Másrészt $\mathfrak{M}$ tekinthető lokálisan konvex topologikus térnek arra a $\tau_1(\mathfrak{M}, G_\mathfrak{M})$ (2. §, 8. pont) topológiára nézve, amelyet a

$$p_\mathfrak{M}(x) = \|G_\mathfrak{M} x\|$$

félnorma értelmez.

Az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ alteret *szabályosnak*[9] nevezzük, ha $p_{\mathfrak{M}}(x)$ norma, továbbá az $\mathfrak{M}$ altéren a $p_{\mathfrak{M}}(x)$, $\|x\|$ normák ekvivalensek. Ebből a definícióból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

9°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{M}$-hez tartozó $G_{\mathfrak{M}}$ Gram-operátornak legyen folytonos inverze.*

Amint BANACH klasszikus tételéből következik, ezt a kritériumot másképpen is meg lehet fogalmazni: *az $\mathfrak{M}$ altér akkor és csak akkor szabályos, ha $p_{\mathfrak{M}}(x)$ norma az $\mathfrak{M}$ altéren és $\mathfrak{M}$ teljes ebben a normában.*

Az altereknek egy másik fontos osztályát értelmezi a következő definíció: az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ alteret *relatíve szabályosnak* nevezzük, ha a $p_{\mathfrak{M}}(x) = \|G_{\mathfrak{M}}x\|$, $p_{\mathfrak{E}}(x) = \|Gx\|$ félnormák egymással ekvivalens $\tau_1(\mathfrak{M}, G_{\mathfrak{M}})$, $\tau_1(\mathfrak{E}, G)$ topológiákat értelmeznek $\mathfrak{M}$-en.

10°. *Minden $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ szabályos altér relatíve szabályos. Az ellenkező irányú állítás akkor és csak akkor érvényes, ha az egész $\mathfrak{E}$ tér szabályos.*

Az első állítás a

$$\|G_{\mathfrak{M}}x\| = \|P_{\mathfrak{M}}Gx\| \leqq \|Gx\| \leqq \|G\|\,\|x\|$$

becslésekből adódik, amelyekhez szabályos $\mathfrak{M}$ esetén az $\alpha\|x\| \leqq \|G_{\mathfrak{M}}x\|$ $(\alpha > 0)$ egyenlőtlenség járul. Megfordítva, ha minden relatíve szabályos $\mathfrak{M}$-re fennáll $\alpha\|x\| \leqq$ $\leqq \|G_{\mathfrak{M}}x\|$ $(\alpha > 0,\ x \in \mathfrak{M})$, akkor az $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\alpha\|x\| \leqq \|Gx\| \leqq \|G\|\,\|x\|,$$

vagyis $\mathfrak{E}$ szabályos. Végül ha tudjuk, hogy $\mathfrak{M}$ relatíve szabályos, $\mathfrak{E}$ pedig szabályos, akkor világos, hogy $\mathfrak{M}$ is szabályos.

A szabályosság és a relatív szabályosság fogalmát másképp is ki lehet fejezni. Az $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ sorozatot $\mathfrak{M}$-*ben aszimptotikusan izotrópnak* nevezzük, ha $(Gx_n, y) \to 0$ $(n \to \infty)$ egyenletesen minden $y \in \mathfrak{M}$, $\|y\| = 1$ vektorra. Abból, hogy $\|G_{\mathfrak{M}}x\| =$ $= \sup\limits_{\|y\|=1,\ y \in \mathfrak{M}} |(G_{\mathfrak{M}}x, y)|$, következik:

11°. *Az $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ sorozat akkor és csak akkor aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{M}$-ben, ha* $\lim\limits_{n \to \infty} \|G_{\mathfrak{M}}x_n\| = 0$.

Ebből közvetlenül nyerjük az alábbiakat:

12°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ altér relatíve szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy minden sorozat, amely $\mathfrak{M}$-ben aszimptotikusan izotróp, $\mathfrak{E}$-ben is aszimptotikusan izotróp legyen.*

13°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{M}(\subset \mathfrak{E})$ altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy minden olyan $\{x_n\}$ sorozat, amely aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{M}$-ben, nullához tartson.*

Megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{M}$-ben aszimptotikusan izotróp $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ sorozatok definíciójában sehol sem használtuk fel azt a tényt, hogy $\mathfrak{M}$ altér. Kiterjesztve a definíciót tetszés szerinti $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineálokra és a 12°., 13°. állításokban az $\mathfrak{M}$ alteret az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineállal helyettesítve ezeket az állításokat felhasználhatjuk *az $\mathfrak{E}$ tér relatíve szabályos és szabályos lineáljainak* értelmezésére.

3. 5. TÉTEL. *Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál és (Hilbert-féle) lezárása, $\overline{\mathfrak{L}}$, csak egyidejűleg lehet szabályos (ill. relatíve szabályos).*

[9] Nem-hermitikus G-metrika esetén különbséget kell tenni a $\|G_{\mathfrak{M}}^{*}x\|$, $\|G_{\mathfrak{M}}x\|$ félnormák között (vö. [32]) és ennek megfelelően külön vizsgálni a „jobbról szabályos" és a „balról szabályos" altereket. Egyszerűség kedvéért mi ismét a $G^* = G$ esetre szorítkozunk.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden sorozat, amely aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben, aszimptotikusan izotróp $\bar{\mathfrak{L}}$-ban is. Valóban, legyen $\{x_n\}(\subset \mathfrak{L})$ aszimptotikusan izotróp sorozat $\mathfrak{L}$-ben. Tetszés szerinti $\tilde{y} \in \bar{\mathfrak{L}}$ ($\|\tilde{y}\| = 1$) vektorhoz található $\{y_m\} \subset \mathfrak{L}$, $\|y_m\| = 1$ $(m = 1, 2, \dots)$ approximáló sorozat ($\lim\limits_{m\to\infty} \|y_m - \tilde{y}\| = 0$). Minthogy $\{x_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben, bármilyen $\varepsilon > 0$ számra és minden $m = 1, 2, \dots$ értékre

$$|(Gx_n, y_m)| < \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon).$$

Ebben az egyenlőtlenségben (minden rögzített $n > N_\varepsilon$ érték mellett) elvégezve az $m \to \infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$|(Gx_n, \tilde{y})| \leqq \varepsilon \qquad (n > N_\varepsilon),$$

vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} (Gx_n, \tilde{y}) = 0$ az $\tilde{y}$ ($\|\tilde{y}\| = 1$) változóra nézve egyenletesen.

Most legyen $\bar{\mathfrak{L}}$ szabályos altér, $\{x_n\}$ pedig egy aszimptotikusan izotróp sorozat $\mathfrak{L}$-ben. Akkor az imént bizonyítottakból és a 13°. állításból nyerjük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ és így az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos. Ha viszont $\bar{\mathfrak{L}}$ relatíve szabályos, akkor ugyanilyen megfontolás és a 12°. állítás segítségével azt kapjuk, hogy $\mathfrak{L}$ is relatíve szabályos.

Megfordítva, legyen az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos (relatíve szabályos), és legyen $\{x_n\}$ az $\bar{\mathfrak{L}}$ altérben aszimptotikusan izotróp sorozat. Vegyünk fel $\mathfrak{L}$-ben egy $\{\tilde{x}_n\}$ sorozatot, amelyre $\|x_n - \tilde{x}_n\| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Tetszés szerinti $y \in \mathfrak{L}(\|y\| = 1)$ vektorra fennáll:

$$|(G_{\bar{\mathfrak{L}}}\tilde{x}_n, y)| \leqq |(G_{\bar{\mathfrak{L}}}x_n, y)| + |(G_{\bar{\mathfrak{L}}}(\tilde{x}_n - x_n), y)|.$$

A jobb oldalon álló összeg mindkét tagja $n \to \infty$ esetén y-ra nézve egyenletesen nullához tart: az első azért, mert $\{x_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\bar{\mathfrak{L}}$-ban, a második pedig a

$$|(G_{\bar{\mathfrak{L}}}(\tilde{x}_n - x_n), y)| \leqq \|G_{\bar{\mathfrak{L}}}\| \, \|\tilde{x}_n - x_n\| < \frac{1}{n} \|G_{\bar{\mathfrak{L}}}\| \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenség miatt. Ily módon az $\{\tilde{x}_n\}$ sorozat aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{L}$-ben. Szabályos $\mathfrak{L}$ esetén ebből következik, hogy $\|\tilde{x}_n\| \to 0$ ha $n \to \infty$, tehát $\|x_n\| \to 0$, vagyis $\bar{\mathfrak{L}}$ szabályos. Ha $\mathfrak{L}$ relatíve szabályos, akkor $\{\tilde{x}_n\}$ aszimptotikusan izotróp $\mathfrak{E}$-ben. A 11°. állítás szerint ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|G\tilde{x}_n\| = 0$. De akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \|Gx_n\| = 0$ is fennáll, úgyhogy $\bar{\mathfrak{L}}$ is relatíve szabályos. A tételt teljesen bebizonyítottuk.

Hogy a szabályos és a relatíve szabályos lineálok és alterek milyen szerepet játszanak a $(\mathfrak{H}, G)$-terekben, azt később fogjuk megmagyarázni (lásd 4. §, 2. pont, 5. §, 5. pont, 6. §, 1., 3. és 4. pont).

4. §. A G-vetítés elmélete

1. Ismert dolog, hogy milyen fontos szerepet játszik a vektorok alterekre való merőleges vetítésének a művelete a Hilbert-terek elméletében. Ebben a paragrafusban részletesen tanulmányozni fogjuk az analóg műveletet G-terekben.

Legyen $\mathfrak{E}$ G-tér, $\mathfrak{L}$ pedig lineál $\mathfrak{E}$-ben. Azt mondjuk, hogy az $y_1(\in \mathfrak{L})$ vektor *az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L}$ lineálra való jobb oldali (bal oldali) G-vetülete*, ha az $y_0 - y_1$ vektor jobbról (balról) G-ortogonális $\mathfrak{L}$-re, azaz ha $G(x, y_0 - y_1) = 0$ $(G(y_0 - y_1, x) = 0)$ minden $x \in \mathfrak{L}$ esetén.

A következő tétel általános szkémát ad, amelynek segítségével a G-vetületek[10] létezésére vonatkozó további tételek nyerhetők.

4. 1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$, és τ egy G-vel balról kompatibilis topológia $\mathfrak{L}$-en. Akkor ahhoz, hogy létezzék az y_0 vektornak $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy az*

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$$

funkcionál τ-folytonos legyen.

Bizonyítás. Ha y_1 az y_0 vektor jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor $G(x, y_0 - y_1) = 0$ minden $x \in \mathfrak{L}$ elemre, és így

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_1) \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Minthogy τ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ lineálon, az $f_{y_0}(x)$ funkcionál τ-folytonos.

Most tegyük fel, hogy valamely $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektorra az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ-folytonos. Akkor tekintettel arra, hogy a τ topológia balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ lineálon, található olyan $y_1 \in \mathfrak{L}$, hogy minden $x \in \mathfrak{L}$ esetén $f_{y_0}(x) = G(x, y_1)$, $G(x, y_0) = G(x, y_1)$, $G(x, y_0 - y_1) = 0$, vagyis y_1 az y_0 vektor G-vetülete $\mathfrak{L}$-re.

Speciálisan ha a 2. §-ban bevezetett jelölésmód szerint $\tau_0^b = \tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ az $\mathfrak{L}$ lineálon a G-metrikával balról kompatibilis leggyengébb topológia (lásd a 2. 3. tételt), akkor a 4. 1. tételből következik:

1°. *Ahhoz, hogy egy $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak létezzék az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineálra való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x)$ funkcionál τ_0^b-folytonos legyen $\mathfrak{L}$-en.*

Ha az $\mathfrak{L}$ lineál $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, vagyis ha $\mathfrak{L}$-en megadható olyan reflexív Banach-topológia, amely az $\mathfrak{L}$ lineálon felülmúlja a G-metrikát, akkor a 2. 5. tétel felhasználásával kapjuk:

2°. *Az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineálra való jobboldali G-vetülete létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x)$ funkcionál $\mathfrak{L}$-en folytonos legyen a $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ topológiára nézve* (lásd 2. §, 8. pont).

Ha az $\mathfrak{L}$ lineál $(\mathfrak{B}^r, G)$-tér, akkor természetesen a 2°. és az 1°. állítás egyaránt alkalmazható. A 2. 5. tétel értelmében a 2°. állítás használata olyankor kényelmes, amikor a G-vetület létezését, az 1°. állítsé pedig a 2. 3. tétel alapján olyankor, amikor a G-vetület nem-létezését kell bebizonyítani.

Abban az esetben, amikor az $\mathfrak{E}$ tér és az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ lineál $(\mathfrak{H}, G)$-tér, az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $\mathfrak{L}$ altérre való G-vetíthetőségének kritériuma más alakban is megfogalmazható. Ebből a célból jelölje $P_{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{E}$ térnek $\mathfrak{L}$-re való Hilbert-féle merőleges vetítését,

[10] Ezután minden tételt jobb oldali G-vetületekre fogalmazunk meg. Baloldali G-vetületekre teljesen analóg állítások érvényesek.

$G_{\mathfrak{L}}$ pedig az $\mathfrak{L}$ altéren tekintett $G(x, y) = (Gx, y)$ alak bal oldali Gram-operátorát (3. §, 7. pont):

$$G(x, y) = (G_{\mathfrak{L}}x, y) \qquad (x, y \in \mathfrak{L}).$$

A 2°. állítás alapján ahhoz, hogy az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektornak legyen jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-en, szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$-folytonos legyen az $\mathfrak{L}$ altéren, vagyis folytonos legyen $\mathfrak{L}$-en a következő félnormára nézve:

$$p^b(x) = \sup_{\|y\|=1,\, y \in \mathfrak{L}} |G(x, y)| = \sup_{\|y\|=1,\, y \in \mathfrak{L}} |(G_{\mathfrak{L}}x, y)| = \|G_{\mathfrak{L}}x\| =$$

$$= \sqrt{(G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}x, x)} = \|H_{\mathfrak{L}}x\| = \sup_{\|y\|=1,\, y \in \mathfrak{L}} |H_{\mathfrak{L}}(x, y)|$$

$$\big(H_{\mathfrak{L}}(x, y) = (H_{\mathfrak{L}}x, y); \quad x, y \in \mathfrak{L}\big),$$

ahol $H_{\mathfrak{L}}$ tetszés szerinti önadjungált operátor $\mathfrak{L}$-en, amelyre $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$; speciálisan lehet $H_{\mathfrak{L}} = \sqrt{G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}}$. De a 2. 5. tétel folytán az $\mathfrak{L}$ altéren a $\|H_{\mathfrak{L}}x\|$ félnorma által indukált $\tau_1(\mathfrak{L}, H_{\mathfrak{L}})$ topológia ezen az altéren kompatibilis a $H_{\mathfrak{L}}$-metrikával. Ebből adódik, hogy az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre való jobb oldali G-vetülete akkor és csak akkor létezik, ha az $\mathfrak{L}$-en tekintett $f_{y_0}(x)$ funkcionál előállítható $f_{y_0}(x) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1)$ $(y_1 \in \mathfrak{L})$ alakban, vagyis ha minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra fennáll

$$(Gx, y_0) = (H_{\mathfrak{L}}x, y_1), \quad (x, P_{\mathfrak{L}}G^* y_0) = (x, H_{\mathfrak{L}}y_1).$$

Az utóbbi akkor és csak akkor lehetséges, ha $P_{\mathfrak{L}}G^* y_0 \in \Re(H_{\mathfrak{L}})$. Ezek szerint igaz az alábbi állítás:

3°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{H}, G)$-térben az y_0 vektornak létezzék az $\mathfrak{L}$ altérre való jobb oldali G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy*

$$\int_m^M \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0\|^2 < \infty \tag{4.1}$$

legyen, ahol $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(E_m^{(\mathfrak{L})} = 0,\ E_M^{(\mathfrak{L})} = P_{\mathfrak{L}})$ a $H_{\mathfrak{L}}^2 = G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$ feltételnek eleget tevő $H_{\mathfrak{L}}$ önadjungált operátor „egységfelbontása".

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathfrak{L}$ egy hermitikus G-metrikával ellátott tér, akkor lehet $H_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}$, úgyhogy ebben az esetben $E_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ a $G_{\mathfrak{L}}$ operátor „egységfelbontása". Viszont $\mathfrak{L}$-en nem hermitikus G-metrika esetén a (4. 1) feltételnél alkalmasabb a következő:

$$\int_m^{M^2} \frac{1}{\lambda}\, d\|\tilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})} G^* y_0\|^2 < \infty,$$

ahol $\tilde{E}_\lambda^{(\mathfrak{L})}$ $(0 \leqq \lambda \leqq M^2)$ a $G_{\mathfrak{L}}^* G_{\mathfrak{L}}$ operátor „egységfelbontása". A G-vetület létezésére vonatkozó egyéb kritériumok találhatók a jelen paragrafus 4. pontjában, valamint az 5. §-ban.

Megemlítjük, hogy a G-vetület egyértelműségének kérdése általános G-metrika esetén sem okoz semmi nehézséget és pontosan úgy oldható meg, mint a véges dimenziójú esetben (vö. [12]). Nevezetesen, könnyű igazolni, hogy *ahhoz, hogy egy* $y \in \mathfrak{E}$ *vektornak az* $\mathfrak{L}$ *lineálra legfeljebb egy jobb oldali G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges, hogy* $\mathfrak{L}$ *jobbról nemelfajuló legyen.* Ha viszont ez a feltétel nem teljesül és y_1 az y vektor valamelyik jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor y-nak $\mathfrak{L}$-re való bármely másik $\tilde{y}_1$ jobb oldali G-vetülete az

$$\tilde{y}_1 = y_1 + x_0$$

képlet segítségével található meg, ahol x_0 az $\mathfrak{L}$ lineál tetszés szerinti jobb oldali izotróp vektora.

2. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{E}$ G-tér $\mathfrak{L}$ lineálja *(jobb oldali) vetítésre nézve teljes,* ha minden $y(\in \mathfrak{E})$ vektornak létezik $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetülete.

4. 2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *lineál vetítésre nézve teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy a* $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$, $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ *topológiák ekvivalensek legyenek* $\mathfrak{L}$*-en.*

Bizonyítás. Legelőször megjegyezzük, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálon

$$\tau_0^b(\mathfrak{E}, G) \geqq \tau_0^b(\mathfrak{L}, G). \tag{4.2}$$

Valóban, minden

$$\mathfrak{U}(0) = \{x \in \mathfrak{L}, |G(x, y_1)| < \varepsilon, \ldots, |G(x, y_n)| < \varepsilon;\ y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{L}\}$$

alakú $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-környezet egyúttal a 0 pont $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-környezete $\mathfrak{L}$-ben.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes. Ekkor minden $\mathfrak{L}$-ben fekvő $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-környezet, amely a $|G(x, y_i)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ y_i \in \mathfrak{E})$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő $x \in \mathfrak{L}$ vektorokból és csak azokból áll, $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-környezet is, amelyet a $|G(x, y_i')| < \varepsilon$ egyenlőtlenség-rendszer jellemez, ahol y_i' az y_i $(i = 1, \ldots, n)$ vektor $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetülete. Ezek szerint $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G) \geqq \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$, és a (4. 2) összefüggésből következik, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálon $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G) = \tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$. A tételben szereplő feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Megfordítva, legyen az $\mathfrak{L}$ lineálon a $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$ és a $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$ topológia egymással ekvivalens. Legyen y az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora. Akkor az

$$f_y(x) = G(x, y) \qquad (x \in \mathfrak{L})$$

funkcionál $\tau_0^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos, következésképpen $\tau_0^b(\mathfrak{L}, G)$-folytonos is. Ebből az 1°. állítás alapján adódik, hogy y-nak van jobb oldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re. A tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor $\mathfrak{L}$ egy $(\mathfrak{B}^r, G)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér altere, más kritérium is adható arra, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes legyen. Nevezetesen igaz a következő tétel.

4. 3. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{E}$ $(\mathfrak{B}^r, G)$*-tér* $\mathfrak{L}$ *altere vetítésre nézve teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy az* $\mathfrak{L}$*-en tekintett* $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$, $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ *topológiák egymással ekvivalensek legyenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes. Bebizonyítjuk, hogy $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ altéren. Minthogy mindegyik $f_y(x) = G(x, y)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos, azt kell még megmutatni, hogy bármely az $\mathfrak{L}$ altéren $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos $f(x)$ lineáris funkcionál előállítható

$$f(x) = G(x, y_f) \tag{4.3}$$

alakban, ahol $y_f \in \mathfrak{L}$.

Tegyük fel, hogy a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiát a $p(x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ félnorma értelmezi és az $f(x)$ funkcionál $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos $\mathfrak{L}$-en, vagyis érvényes az

$$(4.4) \qquad |f(x)| \leqq Cp(x) \qquad (x \in \mathfrak{L})$$

egyenlőtlenség. A Hahn—Banach-tétel komplex terekre vonatkozó alakja értelmében $f(x)$ kiterjeszthető az egész $\mathfrak{E}$ térre a (4. 4) összefüggés megtartásával; az így folytatott $f(x)$ tehát az egész $\mathfrak{E}$ téren $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$-folytonos funkcionál. Minthogy a $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológia balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{E}$ téren (2. 5. tétel), található olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, hogy

$$f(x) = G(x, y_0) \qquad (x \in \mathfrak{E}).$$

Ha y_f az $y_0$vektor jobboldali G-vetülete $\mathfrak{L}$-re, akkor $\mathfrak{L}$-en fennáll a (4. 3) egyenlőség és így $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ balról kompatibilis G-vel az $\mathfrak{L}$ altéren. Minthogy a $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$ topológia ugyanilyen tulajdonságú, a 2. 4. tétel következménye alapján a $\tau_1^b(\mathfrak{L}, G)$, $\tau_1^b(\mathfrak{E}, G)$ topológiák ekvivalensek $\mathfrak{L}$-en. A tételben szereplő feltétel szükségességét bebizonyítottuk. Ami a feltétel elégséges voltát illeti, az pontosan úgy igazolható, mint az előző tételnél.

Visszaemlékezve a relatíve szabályos altér definíciójára (3. §, 7. pont) a 4. 3. tételt például $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ terekre így lehet megfogalmazni: *az* $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ *altér vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha relatíve szabályos.* Ebből speciálisan következik (lásd a 3. §, 10°. állítást), hogy *a szabályosság az* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ *altér vetítésre vonatkozó teljességének elégséges feltétele.*

3. A vetítésre vonatkozó teljesség fogalmával szorosan kapcsolatos az $\mathfrak{E}$ G-tér G-ortogonális lineálok összegeként való előállításának a kérdése. Annak érdekében, hogy a tárgyalást ne bonyolítsuk, ebben a pontban az $\mathfrak{E}$ térben hermitikus G-metrika esetére fogunk szorítkozni.

4°. *Ha* $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *két egymásra G-ortogonális lineál* $(G(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 0)$ *és*

$$(4.5) \qquad \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \mathfrak{E},$$

akkor $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *vetítésre nézve teljes. Ha ezenkívül* $\mathfrak{E}$ *nemelfajuló, akkor* $\mathfrak{M}$ *és* $\mathfrak{N}$ *is nemelfajuló és* $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}$ (*itt* $\mathfrak{M}'$ *az* $\mathfrak{M}$ *lineál G-ortogonális komplementuma* $\mathfrak{E}$*-ben* (lásd 3. §, 1. pont)).

Bizonyítás céljából vegyünk egy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ vektort. A (4. 5) összefüggésből következik, hogy $x = x_1 + x_2$, ahol $x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, vagyis $G(\mathfrak{M}, x - x_1) = 0$. Tehát x_1 az x vektor $\mathfrak{M}$-re való G-vetülete és így $\mathfrak{M}$ vetítésre nézve teljes. Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{E}$ nemelfajuló. Akkor $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{N}$ szintén nemelfajuló azért, mert $\mathfrak{M}$ vagy $\mathfrak{N}$ bármelyik izotróp vektora az $\mathfrak{E}$ térben is izotróp lenne. Az $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}$ egyenlőség igazolása céljából elég megmutatni, hogy $G(x, \mathfrak{M}) = 0$ esetén $x \in \mathfrak{N}$. Ez valóban így van, mert különben fennállna $x = x_1 + x_2$, $0 \neq x_1 \in \mathfrak{M}$, $x_2 \in \mathfrak{N}$, $G(x_1, \mathfrak{M}) = 0$, és x_1 az $\mathfrak{M}$ lineál izotróp vektora lenne.

Az alábbi állítás bizonyos értelemben az előbbinek a megfordítása.

5°. *Ha az* $\mathfrak{L}$ *lineál vetítésre nézve teljes* $\mathfrak{E}$*-ben, akkor*

$$(4.6) \qquad \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{E},$$

következésképpen $\mathfrak{L}'$ *is vetítésre nézve teljes. Továbbá, ha* $\mathfrak{E}$ *nemelfajuló, akkor* $\mathfrak{L}$ *és* $\mathfrak{L}'$ *is nemelfajuló, és a* (4. 6) *összeg direkt összeg. Azonkívül* $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$.

Valóban, ha $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes és x az $\mathfrak{C}$ tér tetszés szerinti vektora, x_1 pedig e vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete, akkor $x=x_1+(x-x_1)$ $(x_1\in\mathfrak{L},\ x-x_1\in\mathfrak{L}')$, és a (4. 6) egyenlőséget bebizonyítottuk. Az 5°. állítás többi részei közvetlenül adódnak a 4°. állításból.

Látjuk, hogy ha $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes lineál az $\mathfrak{C}$ nemelfajuló G-térben, akkor

$$\mathfrak{L}''=\mathfrak{L}. \tag{4. 7}$$

Emlékeztetünk arra, hogy a 3. § 3°. állításában megadtuk a (4. 7) egyenlőség érvényességének szükséges és elégséges feltételét. A (4. 7) összefüggésből és a 3. 1. tételből a következőket nyerjük:

6°. *Minden vetítésre nézve teljes lineál zárt a nemelfajuló $\mathfrak{C}$ tér bármelyik a G-metrikával kompatibilis, és így bármelyik a G-metrikát felülmúló topológiájában.*

4. Legyen $\mathfrak{L}$ valamilyen lineál az $\mathfrak{C}$ G-térben. Azt a $Q_{\mathfrak{L}}$ operátort, amely mindegyik $x\in\mathfrak{C}$ vektornak megfelelteti e vektor $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetületeinek a halmazát (amely üres is lehet), *$\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetítésnek* fogjuk nevezni.

7°. *Ha $\mathfrak{L}$ egy $(\mathfrak{H}, G)$ típusú $\mathfrak{C}$ tér T korlátos lineáris operátorának az értékkészlete, akkor az $\mathfrak{L}$-re való jobb oldali G-vetítés $Q_{\mathfrak{L}}$ operátorát a következő képlettel lehet kiszámítani*[11]*:*

$$Q_{\mathfrak{L}}=T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^* \tag{4. 8}$$

$$\big(G(x, y)=(Gx, y);\ x, y\in\mathfrak{C}\big).$$

A bizonyításhoz megjegyezzük, hogy ha $x\in\mathfrak{C}$ és $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$, akkor tetszés szerinti $z\in\mathfrak{L}$ $(z=Th_1,\ h_1\in\mathfrak{C})$ vektorra

$$(Gz, y-x)=0, \qquad (GTh_1, y-x)=0,$$

innen pedig

$$T^*G^*y=T^*G^*x.$$

Minthogy $y\in\mathfrak{L}$, valamilyen $h\in\mathfrak{C}$ vektorra $y=Th$. Ennélfogva $T^*G^*Th=$ $=T^*G^*x$, tehát $h\in(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$ és

$$y=Th\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*\ G^*x.$$

Megfordítva, ha egy $x\in\mathfrak{C}$ vektorra $y\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$, akkor $y\in\mathfrak{L}$, $y=Th$, ahol

$$h\in(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x, \qquad T^*G^*Th=T^*G^*x.$$

Ha $z=Th_1$ az $\mathfrak{L}$ lineál tetszés szerinti vektora $(h_1\in\mathfrak{C})$, akkor

$$(Gz, y-x)=(GTh_1, y-x)=(GTh_1, Th-x)=(h_1, T^*G^*Th-T^*G^*x)=0,$$

következésképpen $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$. Ily módon bebizonyítottuk, hogy $y\in Q_{\mathfrak{L}}x$ akkor és csak akkor, ha minden $x\in\mathfrak{C}$ vektorra $y\in T(T^*G^*T)^{-1}T^*G^*x$, ebből pedig következik a 7°. állítás helyessége.

Tekintsünk most egy tetszés szerinti $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{C}$ (zárt) alteret, és legyen $P_{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ altérre való Hilbert-féle merőleges vetítés operátora. Mivel $P_{\mathfrak{L}}$ értékkészlete $\mathfrak{L}$, a 6°. állítás

[11] Itt A^{-1} azt az operátort jelenti, amely mindegyik $x\in\mathfrak{C}$ vektornak megfelelteti az összes olyan y vektorok (esetleg üres) halmazát, amelyekre $Ay=x$.

felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$Q_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}(P_{\mathfrak{L}}G^*P_{\mathfrak{L}})^{-1}P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Tekintsük a $G_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}}GP_{\mathfrak{L}}$ operátort, vagyis az $\mathfrak{L}$ altéren vizsgált $G(x, y)$ alak Gram-operátorát (3. §, 7. pont). Fennáll $P_{\mathfrak{L}}(P_{\mathfrak{L}}G^*P_{\mathfrak{L}})^{-1} = G_{\mathfrak{L}}^{*-1}$, tehát

$$Q_{\mathfrak{L}} = G_{\mathfrak{L}}^{*-1}P_{\mathfrak{L}}G^*.$$

Innen közvetlenül adódnak az alábbi eredmények a G-vetületek létezéséről és egyértelműségéről ($\mathfrak{H}$, G) típusú $\mathfrak{E}$ térben.

α) Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ tér mindegyik vektorának az $\mathfrak{L}$ altérre legfeljebb egy jobb oldali G-vetülete legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ altéren $G_{\mathfrak{L}}^*x = 0$ csak $x = 0$ esetén álljon.

β) Ahhoz, hogy az $x \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre legalább egy jobb oldali G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges a $P_{\mathfrak{L}}G^*x \in \mathfrak{R}(G_{\mathfrak{L}}^*)$ összefüggés fennállása.

γ) Az $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{E})$ altér vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy

$$\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{L}}G^*) \subset \mathfrak{R}(G_{\mathfrak{L}}^*)$$

legyen.

Néha előfordul, hogy célszerű az *α), β), γ)* állításokat némiképp eltérő alakban használni. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a $G(x, y) = (Gx, y)$ alak hermitikus, és legyen a G operátornak az $\mathfrak{E}$ tér

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$$

$\mathfrak{H}$-ortogonális összegként való előállításához tartozó mátrixa

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

alakú.

Akkor:

α') Ahhoz, hogy $\mathfrak{E}$ mindegyik vektorának az $\mathfrak{L}$ altérre legfeljebb egy G-vetülete legyen, szükséges és elégséges, hogy G_{11} ne vegye fel a nulla értéket $\mathfrak{L}$-en (kivéve a 0 helyet).

β') Ahhoz, hogy az $x \in \mathfrak{E}$ vektornak az $\mathfrak{L}$ altérre legalább egy G-vetülete létezzék, szükséges és elégséges a

$$G_{12}P_{\mathfrak{M}}x \in \mathfrak{R}(G_{11})$$

összefüggés fennállása.

γ') Az $\mathfrak{L}$ altér vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy

$$\mathfrak{R}(G_{12}) \subset \mathfrak{R}(G_{11})$$

legyen.

A *β')* állítás felhasználásával könnyű példát szerkeszteni olyan ($\mathfrak{H}$, G) típusú, nemelfajuló $\mathfrak{E}$ térben fekvő valódi $\mathfrak{L}$ altérre, amelynek G-ortogonális komplementuma, $\mathfrak{L}'$ egyedül a 0 vektorból áll. Ehhez elég, ha a G-metrikát úgy választjuk, hogy G_{11}, G_{22} és G_{12} ne vegye fel a nulla értéket értelmezési tartományán és $\mathfrak{R}(G_{11}) \cap \mathfrak{R}(G_{12}) = \{0\}$ legyen (ezeket a feltételeket legegyszerűbb úgy teljesíteni, hogy a dim $\mathfrak{M}=1$ választással élünk; ekkor G_{12} alkalmas megválasztásával még az is könnyen elérhető, hogy a G-metrika az $\mathfrak{E}$ téren pozitív legyen).

Ily módon azt látjuk, hogy az $\mathfrak{L}\dot{+}\mathfrak{L}'$ direkt összeg nem szükségképpen sűrű az $\mathfrak{E}$ Hilbert-térben, tehát a 3. § 5°. állításában lényeges, hogy a τ topológia kompatibilis legyen G-vel (és nem elég, ha csak felülmúlja G-t).

5. §. Definit lineálok hermitikusan bilineáris metrikájú terekben

Az egész 5. § folyamán feltesszük, hacsak külön nem kötjük ki az ellenkezőjét, hogy az $\mathfrak{E}$ G-térben értelmezett G-metrika hermitikus.

1. Legyen $\mathfrak{L}$ tetszés szerinti definit lineál az $\mathfrak{E}$ G-térben. Vezessük be a negatív, ill. pozitív $\mathfrak{L}$ lineálokra a sign $\mathfrak{L}=-1$ ill. $+1$ jelölést. Az a körülmény, hogy a $G(x,y)$ alak az $\mathfrak{L}$ lineálon definit, lehetővé teszi, hogy $\mathfrak{L}$-en bevezessünk egy $\tau_2=\tau_2(\mathfrak{L}, G)$ szeparált pre-Hilbert-*topológiát* az

$$(5.1)\qquad (x,y)=\operatorname{sign}\mathfrak{L}\cdot G(x,y) \qquad (x,y\in\mathfrak{L})$$

képlettel értelmezett skaláris szorzat segítségével. Ezek szerint a τ_2-norma

$$|x| = |G(x,x)|^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in\mathfrak{L})$$

alakú. Teljesen nyilvánvaló, hogy a τ_2-topológia felülmúlja (és majorálja) a G-metrikát $\mathfrak{L}$-en (2. §, 5. pont).

Minthogy a τ_2-topológia a definit lineálokon nagyon természetes topológia, érdeklődésre tarthat számot, ha e lineálokra vonatkozó néhány feladatot (G-vetítés, vetítésre vonatkozó teljesség, szabályosság stb.) ezzel a topológiával összefüggésben oldunk meg. Ennek során, úgy mint a 4. §-ban, ismét az $f_{y_0}(x)=G(x,y_0)$ ($x\in\mathfrak{L}$, y_0 az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti rögzített eleme) alakú lineáris funkcionálok folytonosságának a kérdéséből indulunk ki, de most a τ_2-topológiára vonatkozóan.

Ha az $f_y(x)=G(x,y)$ funkcionál tetszés szerinti $y\in\mathfrak{E}$ esetén τ_2-folytonos $\mathfrak{L}$-en, akkor az $\mathfrak{L}$ definit lineált *regulárisnak* fogjuk mondani. Ha viszont létezik csak egy olyan $y_0\in\mathfrak{E}$ elem is, hogy az $f_{y_0}(x)$ ($x\in\mathfrak{L}$) funkcionál nem folytonos a τ_2-topológiában, akkor az $\mathfrak{L}$ lineált *szingulárisnak* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy minden véges dimenziójú definit lineál, úgyszintén a definit G-metrikával ellátott terekben bármelyik lineál reguláris. Általában azonban ez nincs így (lásd alább a 4. pontot).

5. 1. tétel. *Legyen $\mathfrak{L}(\subset\mathfrak{E})$ definit lineál. Annak, hogy az $f_{y_0}(x)=G(x,y_0)$ ($x\in\mathfrak{L}$, $y_0\in\mathfrak{E}$) funkcionál τ_2-folytonos legyen, a következő a szükséges és elégséges feltétele:*

$$(5.2)\qquad m(y_0)=\inf_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) > -\infty \qquad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}=1),$$

$$(5.2')\qquad M(y_0)=\sup_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) < \infty \qquad (\operatorname{sign}\mathfrak{L}=-1).$$

Ennélfogva az $\mathfrak{L}$ definit lineál akkor és csak akkor reguláris, ha minden $y_0\in\mathfrak{E}$ vektorra teljesül az (5. 2) (*illetve* (5. 2')) *feltétel.*

Egy τ_2-folytonos $f_{y_0}(x)$ funkcionál normája kifejezhető az $m(y_0)$, $M(y_0)$ mennyiségekkel az

(5. 3) $$|f_{y_0}|^2 = G(y_0, y_0) - m(y_0) \qquad (\text{sign } \mathfrak{L} = 1),$$

illetve

(5. 3') $$|f_{y_0}|^2 = M(y_0) - G(y_0, y_0) \qquad (\text{sign } \mathfrak{L} = -1)$$

képlet szerint.

A bizonyítást nyilván elég pozitív lineál (sign $\mathfrak{L} = 1$) esetére szorítkozva végezni, mert a sign $\mathfrak{L} = -1$ eset visszavezethető erre a kiindulási G-metrika előjelének egyszerű megfordítása útján.

Szükségesség. Legyen az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos, vagyis

$$|G(x, y_0)| \leqq C|x| \qquad (x \in \mathfrak{L}).$$

Akkor bármelyik $x \in \mathfrak{L}$ vektorra (lásd az (5. 1) képletet)

$$\begin{aligned} G(x-y_0, x-y_0) &= (x, x) - 2 \operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0) \geqq \\ &\geqq |x|^2 - 2C|x| + G(y_0, y_0) = \\ &= (|x| - C)^2 + G(y_0, y_0) - C^2 \geqq G(y_0, y_0) - C^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) > -\infty.$$

Megjegyezzük, hogy speciálisan a $C = |f_{y_0}|$ választással azt kapjuk, hogy

(5. 4) $$m(y_0) \geqq G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2.$$

Elégségesség. Legyen $m(y_0) = \inf_{x \in \mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) > -\infty$. Akkor tetszés szerinti $x \in \mathfrak{L}$ $(|x| = 1)$ vektorra fennáll

$$m(y_0) \leqq G(x-y_0, x-y_0) = 1 - 2 \operatorname{Re} G(x, y_0) + G(y_0, y_0),$$

és így

(5. 5) $$\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqq \tfrac{1}{2} C_0,$$

ahol $C_0 = 1 + G(y_0, y_0) - m(y_0)$. Az (5. 5) képletben x helyébe $(-x)$-et írva (a korábbiak értelmében $|-x| = 1$)

(5. 6) $$-\operatorname{Re} G(x, y_0) \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Az (5. 5), (5. 6) képleteket egybevetve azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{L}$ $(|x| = 1)$ vektorra

(5. 7) $$|\operatorname{Re} G(x, y_0)| \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Itt x helyébe $(-ix)$-et írva (megint $|-ix| = 1$) adódik:

(5. 8) $$|\operatorname{Im} G(x, y_0)| \leqq \tfrac{1}{2} C_0.$$

Végül az (5. 7), (5. 8) képletekből következik, hogy

$$|G(x, y_0)| \leqq C_0 \qquad (x \in \mathfrak{L}, |x| = 1),$$

vagyis az $f_{y_0}(x)=G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos.

A tétel utolsó állításának (az (5. 3) összefüggésnek) a bebizonyítása céljából vegyünk egy $\{x_n\}\subset \mathfrak{L}$ sorozatot, amely eleget tesz a következő három feltételnek:

a) $|x_n|=|f_{y_0}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ — normálás.

b) Tetszés szerinti $\varepsilon>0$ számra $n>N(\varepsilon)$ esetén

$$|f_{y_0}(x_n)| = |G(x_n, y_0)|\geqq |f_{y_0}|^2-\frac{\varepsilon}{2}$$

(az $|f_{y_0}|$ norma definíciója szerint ez lehetséges).

c) $\operatorname{Re} G(x_n, y_0)=|G(x_n, y_0)|$ $\quad (n=1, 2, \ldots)$;

ez úgy érhető el, hogy mindegyik x_n vektort megszorozzuk az $\exp\{-i \arg G(x_n, y_0)\}$ skalárral (eközben az a), b) tulajdonságok nem vesznek el).

Mármost $n>N(\varepsilon)$ esetén az a), b), c) összefüggések alapján

$$m(y_0) \leqq G(x_n-y_0, x_n-y_0) = |f_{y_0}|^2-2|G(x_n, y_0)|+G(y_0, y_0) \leqq$$

$$\leqq |f_{y_0}|^2-2|f_{y_0}|^2+\varepsilon+G(y_0, y_0) = G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2+\varepsilon.$$

Minthogy az $\varepsilon>0$ szám tetszés szerinti,

$$m(y_0) \leqq G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2,$$

és ezt az (5. 4) képlettel összevetve kapjuk:

$$m(y_0) = G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2. \tag{5. 3}$$

Az 5. 1. tételt maradéktalanul bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ahhoz, hogy egy $y_0(\in\mathfrak{E})$ vektornak az $\mathfrak{L}$ definit lineálra legyen G-vetülete, szükséges és elégséges, hogy a véges* $\inf_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) = m(y_0)$ *(illetve* $\sup_{x\in\mathfrak{L}} G(x-y_0, x-y_0) = M(y_0)$*) érték valamilyen $x_0\in\mathfrak{L}$ elemen éressék, és éppen ez az elem az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete.*

Csakugyan, legyen x_0 az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete ($\operatorname{sign}\mathfrak{L}=+1$). Akkor minden $x\in\mathfrak{L}$ elemre

$$f_{y_0}(x)=G(x, y_0)=G(x, x_0)=(x, x_0),$$

azaz $|f_{y_0}|=|x_0|$. Innen (5. 3) értelmében

$$m(y_0) = G(y_0, y_0)-|f_{y_0}|^2 = G(y_0, y_0)-G(x_0, x_0) = G(x_0-y_0, x_0-y_0).$$

Megfordítva, legyen $m(y_0) = G(x_0-y_0, x_0-y_0)$ $(x_0\in\mathfrak{L})$. Először is vegyük észre, hogy ha valamilyen $z\in\mathfrak{E}$ vektorra $m(z)=G(z, z)$, akkor (5. 3) miatt $|f_z|=0$, vagyis $f_z(x)=G(x, z)=0$ $(x\in\mathfrak{L})$. Másodszor nyilvánvaló, hogy minden $x\in\mathfrak{L}$ vektorra $m(y_0) = m(y_0-x)$. Ennélfogva

$$m(y_0-x_0) = m(y_0) = G(y_0-x_0, y_0-x_0),$$

tehát $G(x, y_0-x_0) = 0$ $(x\in\mathfrak{L})$, azaz x_0 az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ lineálra való G-vetülete.

Az 5. 1. tétel most nyert következményéből közvetlenül adódik a megfelelő kritérium a definit lineálok vetítésre vonatkozó teljességére, de ennek a kimondását elhagyjuk.

2. Az 5. 1. tétel és következménye az $\mathfrak{L}$ definit lineálra való G-vetíthetőség egy új kritériumához és $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességének a megfelelő kritériumához vezet.

5. 2. TÉTEL. *Az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $\mathfrak{L}$ definit lineálra való x_0 G-vetületének létezéséhez szükséges és elégséges, hogy az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonos legyen és valamely $x_0 \in \mathfrak{L}$ vektorra bekövetkezzék az $|x_0| = |f_{y_0}|$ és a*

$$G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2 \operatorname{sign} \mathfrak{L} \tag{5. 9}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Megint a sign $\mathfrak{L} = 1$ esetre szorítkozunk.

Triviális, hogy az (5. 9) feltétel szükséges, ugyanis az $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor $x_0 \in \mathfrak{L}$ G-vetületére

$$f_{y_0}(x) = G(x, y_0) = G(x, x_0) = (x, x_0) \qquad (x \in \mathfrak{L}),$$

innen pedig $|f_{y_0}| = |x_0|$ és $G(x_0, y_0) = (x_0, x_0) = |f_{y_0}|^2$.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy $x_0 \in \mathfrak{L}$, $|x_0| = |f_{y_0}|$ és $G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2$. Akkor figyelembe véve az (5. 3) képletet

$$G(x_0 - y_0, x_0 - y_0) = |x_0|^2 - 2|f_{y_0}|^2 + G(y_0, y_0) = G(y_0, y_0) - |f_{y_0}|^2 = m(y_0),$$

és az 5. 1. tétel következménye alapján x_0 az y_0 vektor $\mathfrak{L}$-re való G-vetülete.

KÖVETKEZMÉNY. *Az $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ definit lineál vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{L}$ reguláris legyen és tetszés szerinti $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektorhoz található legyen olyan x_0 $(|x_0| = |f_{y_0}|)$, amelyre teljesül az (5. 9) feltétel.*

Megjegyzés. Az 5. 2. tételben szereplő feltétel elégséges voltát (és így az egész tételt is) közvetlenül, az 5. 1. tétel elkerülésével is be lehet bizonyítani.

Valóban, a FRÉCHET—RIESZ-tétel értelmében a τ_2-folytonos $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál felírható $f_{y_0}(x) = (x, \tilde{x}_0)$ alakban, ahol $\tilde{x}_0$ valamilyen „ideális" elem abban az $\tilde{\mathfrak{L}}$ Hilbert-térben, amelyet a szeparált $\mathfrak{L}$ pre-Hilbert-tér teljessé tétele útján kapunk. Ilyenkor, amint ismeretes, fennáll az $|f_{y_0}| = |\tilde{x}_0|$ egyenlőség. Másrészt feltevésünk szerint van olyan $x_0 \in \mathfrak{L}$ vektor, amelyre $|x_0| = |f_{y_0}|$ és $G(x_0, y_0) = |f_{y_0}|^2 = |\tilde{x}_0|^2$. De akkor

$$|f_{y_0}|^2 = G(x_0, y_0) = (x_0, \tilde{x}_0) \leqq |x_0|\,|\tilde{x}_0| = |f_{y_0}|^2,$$

vagyis $\tilde{x}_0$ és x_0 egymással kollineáris: $\tilde{x}_0 = \lambda x_0 \in \mathfrak{L}$. Könnyű belátni, hogy az adott esetben $\lambda = 1$, úgyhogy $G(x, y_0) = (x, x_0) = G(x, x_0)$ minden $x \in \mathfrak{L}$ vektorra.

Az 5. 2. tétel bizonyításának az imént ismertetett változata azzal az előnnyel jár, hogy sehol sincs benne kihasználva a G-metrika hermitikus volta. Definit lineálokról és ezek τ_2-topológiájáról pedig tetszés szerinti G-terekben is lehet beszélni. Ebben az esetben az 5. 2. tételben G-vetület helyett jobb oldali G-vetület értendő. Analóg tétel érvényes a bal oldali G-vetületekre.

A FRÉCHET—RIESZ-tételből rögtön következik, hogy *az $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{E})$ definit lineál regularitása és τ_2-teljessége elégséges $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességéhez.* Ugyanakkor a τ_2-teljesség, eltérően a regularitástól, a vetítésre vonatkozó teljességnek nem szükséges feltétele, amint az triviális példákból látható[12].

3. Az 5. 1. tétel, amely kritériumot ad az $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) definit lineál regularitására, nyitva hagyja azt a kérdést, léteznek-e szinguláris (azaz nem reguláris) lineálok. Amint a későbbiekben ki fog derülni, szinguláris lineálokra, legalábbis $\Pi_\varkappa$ terekben, aránylag régóta ismeretesek példák (lásd [8]). A legutóbbi időkben azonban ez a kérdés újra felkeltette az érdeklődést egyes hibás állításokkal kapcsolatban, amelyek több elméleti fizikai cikkben szerepeltek.

A. Uhlmann [42] cikkében teljesen jogosan bírálja R. Ascoli és E. Minardi [41] dolgozatát azért, hogy ezek a szerzők figyelmen kívül hagyták a nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-tér kanonikus felbontásának többértelműségét. Ugyanakkor maga A. Uhlmann R. Ascoli és E. Minardi nyomán megismétli azt a téves kijelentést, hogy bármelyik $\mathfrak{E}$ G-tér izotróp lineálra és maximális nemelfajuló lineálra való felbontása egyértelmű, amiről korábban már volt szó (3. §, 1. pont).

Bár az „indefinit metrikájú Hilbert-tér" elnevezést (lásd 1. §, 3. pont) ugyanolyan helytelenül használja, mint néhány más szerző, A. Uhlmann ([42], [43]) eltér elődeitől abban, hogy elismeri a szóban forgó terek szigorú axiomatizálásának és meghatározott topológia bevezetésének a szükségességét. Nevezetesen nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-terek vizsgálatára szorítkozik és kiegészítő követelmény gyanánt bevezet egy posztulátumot, amely az általunk elfogadott terminológiával így hangzik:

(U) *Az $\mathfrak{E}$ tér bármelyik $\mathfrak{L}$ definit lineáljával együtt az $\mathfrak{L}$ lineál τ_2-teljes burkát, $\tilde{\mathfrak{L}}$-ot is tartalmazza.*

Az (U) posztulátumból kiindulva Uhlmann eljut az $\mathfrak{E}$ tér

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_- \tag{5. 10}$$

kanonikus felbonthatóságáról szóló tételhez, ahol $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ két τ_2-teljes, egymásra G-ortogonális definit lineál (sign $\mathfrak{E}_\pm = \pm 1$). Ily módon az derül ki, hogy $\mathfrak{E}$ lényegében J-tér. Amint azonban a későbbiek folyamán (6. §, 6. 5. tétel) rámutatunk, az utóbbi körülmény végtelen dimenziós $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ esetén összeegyeztethetetlen az (U) posztulátummal.[13]

Az A. Uhlmann által az (5. 10) kanonikus felbontás létezésére adott bizonyítás elemzése azt mutatja, hogy az elkövetett hibák forrása a következő: a bizonyítás során burkoltan fel van téve, hogy minden τ_2-teljes definit lineál reguláris. Amint az alább felsorolt tételekből (többek között az 5. 5. tételből) látható, ez az állítás hamis.

4. Ebben a pontban több, szinguláris lineálokra vonatkozó tételt ismertetünk, elhagyva azokat a bizonyításokat, amelyek már korábban megjelentek.

5. 3. Tétel ([47], [49]). *Minden nemelfajuló, végtelen dimenziós, indefinit G-metrikával ellátott $\mathfrak{E}$ G-tér tartalmaz szinguláris lineált.*

Megemlítjük, hogy az a feltétel, hogy $\mathfrak{E}$ nemelfajuló (eltérően a két másik kikötéstől, a végtelen-dimenziósságtól és a G-metrika indefinit voltától), nem lényeges. Az a fontos, hogy ha az $\mathfrak{E}$ teret felbontjuk izotróp ($\mathfrak{E}_0$) és nemelfajuló ($\mathfrak{E}_1$) lineálra ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \dotplus \mathfrak{E}_1$) (lásd 3. §, 1. pont), akkor $\mathfrak{E}_1$ dimenziója ne legyen véges.

5. 4. Tétel ([49]). *Legyen $\mathfrak{L}$ definit lineál a nemelfajuló $\mathfrak{E}$ G-térben. Ahhoz, hogy $\mathfrak{L}$ szinguláris legyen, szükséges és elégséges az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$ inkluzió, ahol $\mathfrak{E}_1$ olyan lineál, amely teljessé téve Π_1 térré* (lásd 3. §, 4. pont) *válik, és az $\mathfrak{L}$ lineálnak ezen Π_1 tér normája szerinti $\overline{\mathfrak{L}}$ lezárása elfajuló altér.*

[12] Például elég tekinteni egy $\mathfrak{E}$ G-teret, amelynek kanonikus előállítása (lásd 3. §, 2. pont) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$, ahol $\mathfrak{E}_+$ szeparált, nemteljes pre-Hilbert-tér (a τ_2-topológiában). Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{E}_+$ (és ugyanúgy $\mathfrak{E}_-$) vetítésre nézve teljes.

[13] Az $\mathfrak{E} = \Pi_\varkappa$ esetet, amikor az (U) posztulátum teljesül, ebben a vonatkozásban triviálisnak kell tekinteni.

Az 5. 4. tételben említett $\mathfrak{C}_1$ lineált a feltétel szükségességének bizonyítása során ténylegesen meg lehet szerkeszteni: $\mathfrak{C}_1$ az $\mathfrak{L}$ lineálnak és annak az $y_0 \in \mathfrak{C}$ vektornak a lineáris burka, amelyre az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál nem τ_2-folytonos. A feltétel elégséges voltának bizonyítása pedig, hasonlóan az 5. 3. tétel [49] bizonyításához, a következő kisegítő állításokra támaszkodik.

1°. *Legyen $\mathfrak{C}$ tetszés szerinti normált G^h-tér a G-metrikát majoráló $\|x\|$ $(x \in \mathfrak{C})$ normával:*

$$(5.11) \qquad |G(x, y)| \leqq C\|x\|\,\|y\| \qquad (x, y \in \mathfrak{C}).$$

Ha $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{C})$ definit lineál, akkor az $f_{y_0}(x) = G(x, y_0)$ funkcionál τ_2-folytonosságához szükséges, hogy az y_0 vektor G-ortogonális legyen az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér minden izotróp vektorára (ahol $\bar{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ lineál lezárása az $\mathfrak{C}$ térben az $\|x\|$ norma szerint).

Valóban, tegyük fel, hogy $x_0(\neq 0)$ az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér izotróp vektora és $G(x_0, y_0) \neq 0$. Approximáljuk az x_0 vektort egy $\{x_n\} \subset \mathfrak{L}$ sorozattal: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$. Az (5. 11) majorálás miatt

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |G(x_n, x_n)|^{\frac{1}{2}} = |G(x_0, x_0)|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty} f_{y_0}(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n, y_0) = G(x_0, y_0) \neq 0,$$

vagyis az $f_{y_0}(x)$ funkcionál nem folytonos a τ_2-topológiában.

Megjegyzés. Amint a bizonyításból látható, az 1°. állítás igaz marad akkor is, ha a G-metrikát valamilyen félnormálható topológia majorálja (lásd 2. §, 5. pont). Emlékeztetünk arra, hogy abban az esetben, amikor az $\mathfrak{C}$ tér $(\mathfrak{B}, G)$ típusú, az (5. 11) becslés ekvivalens azzal a kikötéssel, hogy a $\mathfrak{B}$-topológia felülmúlja a G-metrikát (2. 2. tétel). Ha pedig $\mathfrak{C} = \Pi_\varkappa$, akkor meg lehet mutatni [49], hogy az 1°. állításban szereplő feltétel elégséges is az $f_{y_0}(x)$ funkcionál τ_2-folytonosságához.

2°. *Ha $\mathfrak{L}$ definit lineál egy nemelfajuló, normált és az* (5. 11) *tulajdonsággal rendelkező $\mathfrak{C}$ G^h-térben, továbbá az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{C}$-beli $\bar{\mathfrak{L}}$ lezárása elfajuló, akkor $\mathfrak{L}$ szinguláris.*

Ez közvetlenül következik az 1°. állításból, ha számításba vesszük, hogy $\bar{\mathfrak{L}}$ bármelyik $x_0(\neq 0)$ izotróp vektorához $\mathfrak{C}$ nemelfajuló volta miatt található olyan $y_0 \in \mathfrak{C}$ vektor, hogy $G(x_0, y_0) \neq 0$.

Az 1°. és 2°. állítás az 5. 3. tétel bizonyítása során lehetővé teszi az $\mathfrak{L}$ szinguláris lineál tényleges megszerkesztését.

Egy $\mathfrak{C}$ G-tér τ_2-teljes szinguláris lineáljainak általános jellemzését a következő tétel adja meg.

5. 5. TÉTEL ([49]). *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L}$ $(\subset \mathfrak{C})$ szinguláris lineál τ_2-teljes legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineálnak egy Π_1 térbe való (az 5. 4. tétel szerint lehetséges) G-izometrikus beágyazása után a Π_1-beli $\bar{\mathfrak{L}}$ lezárás előállítható legyen $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \dot{+} \{x_0\}$ alakú direkt összegként, ahol $\{x_0\}$ az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér $x_0(\neq 0)$ izotróp vektora által kifeszített egydimenziós altér.*

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy τ_2-teljes szinguláris lineálok léteznek, legalábbis tetszés szerinti indefinit G^h-metrikával ellátott végtelen dimenziós

$\mathfrak{H}$-térben, és ez ellentmond A. UHLMANN 3. pontban említett hipotézisének. Valóban, feltevéseink mellett az $\mathfrak{E}$ tér mindig tartalmaz (zárt) szemidefinit $\mathfrak{M}$ altereket, amelyeknek izotróp lineáljai egydimenziósak. Ha $\mathfrak{M}$ ilyen altér, és $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} + \{x_0\}$ ennek előállítása az $\{x_0\}$ izotróp lineál és egy $\mathfrak{M}$-ben sűrű $\mathfrak{L}$ lineál direkt összegeként (lásd [8], 421. oldal), akkor a 2°. állítás értelmében $\mathfrak{L}$ szinguláris, az 5. 5. tétel szerint pedig $\mathfrak{L}$ τ_2-teljes.

5. Befejezésül felsorolunk néhány állítást normált G^h-terek és speciálisan $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek definit lineáljainak és altereinek τ_2-teljességéről és regularitásáról.

5. 6. TÉTEL. *Nemelfajuló és normált $\mathfrak{E}$ G^h-térben, amelyben teljesül az (5. 11) feltétel, tetszés szerinti $\mathfrak{L}$ definit lineál és lezárása, $\overline{\mathfrak{L}}$ csak egyidejűleg lehet reguláris.*

Bizonyítás. Az, hogy ha $\overline{\mathfrak{L}}$ reguláris (tehát definit is), akkor $\mathfrak{L}$ szintén reguláris, triviális.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{L}$ reguláris definit lineál. A 2°. állítás alapján az $\overline{\mathfrak{L}}$ altér nemelfajuló (definit). Ha $\overline{\mathfrak{L}}$ szinguláris volna, akkor létezne olyan $y_0 \in \mathfrak{E}$ vektor, $\alpha > 0$ szám és $\{x_n\} \subset \overline{\mathfrak{L}}$ sorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ és

$$|G(x_n, y_0)| > \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Most elég venni egy $\{x_n'\} \subset \mathfrak{L}$ sorozatot, amelyre például $\|x_n - x_n'\| < \dfrac{\alpha}{2\|y_0\| Cn}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; így (5. 11) felhasználásával kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n'| = 0,$$

$$|G(x_n', y_0)| \geqq |G(x_n, y_0)| - |G(x_n - x_n', y_0)| > \frac{\alpha}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál szinguláris, ellentétben a feltevéssel.

Áttérve a $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekre, fel fogjuk használni az alterek és lineálok szabályosságának a 3. § 7. pontjában bevezetett fogalmát. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 3. § 9°. állításából következik az alábbi:

3°. *Egy $(\mathfrak{H}, G^h)$-térbeli $\mathfrak{M}$ definit altér akkor és csak akkor τ_2-teljes, ha szabályos.*

Valóban, ha $G_{\mathfrak{M}}$ az $\mathfrak{M}$ altéren tekintett G-metrika Gram-operátora (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\operatorname{sign} \mathfrak{M} = +1$), akkor $G_{\mathfrak{M}}$ és $G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}}$ csak egyidejűleg lehet folytonosan invertálható. De $G_{\mathfrak{M}}$ folytonos invertálhatósága $\mathfrak{M}$ szabályosságával ekvivalens, $G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}}$ folytonos invertálhatósága pedig az $\mathfrak{M}$ altér τ_2-teljességével ekvivalens. Az utóbbi közvetlenül adódik BANACH tételéből és az

$$|x|^2 = (Gx, x) = (G_{\mathfrak{M}} x, x) = (G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x, G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x) = \|G_{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}} x\|^2 \qquad (x \in \mathfrak{M})$$

összefüggésből.

5. 7. TÉTEL. *Nemelfajuló, $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ térben a τ_2-teljes $\mathfrak{L}$ definit lineál regularitásához szükséges és elégséges, hogy $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{H}$-zárt) altér legyen.*

Bizonyítás. Elégségesség. Legyen $\mathfrak{L}$ τ_2-teljes definit altér $\mathfrak{E}$-ben. A 3°. állítás értelmében $\mathfrak{L}$ szabályos altér. De akkor $\mathfrak{L}$ vetítésre nézve teljes (4. §, 2. pont) és így reguláris (5. 2. tétel, következmény).

Szükségesség. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}$ reguláris, de nem zárt, és lezárása $\bar{\mathfrak{L}}$. Az $\bar{\mathfrak{L}}\setminus\mathfrak{L}$ halmaz nem üres. Vegyünk egy $y_0 \in \bar{\mathfrak{L}}\setminus\mathfrak{L}$ vektort. Minthogy a τ_2-teljesség és a regularitás miatt az $\mathfrak{L}$ lineál vetítésre nézve teljes (2. pont), képezhetjük az y_0 vektornak az $\mathfrak{L}$ lineálra való $x_0(\in\mathfrak{L})$ G-vetületét. A $z_0 = y_0 - x_0$ $(\in\bar{\mathfrak{L}})$ vektor G-ortogonális $\mathfrak{L}$-re, tehát $\bar{\mathfrak{L}}$-ra is. Speciálisan $(Gz_0, z_0) = (Gz_0, y_0 - x_0) = 0$. Másrészt $\mathfrak{L}$ regularitása miatt az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér definit (2°. állítás), ennélfogva $z_0 = 0$, $y_0 = x_0 \in \mathfrak{L}$. Ellentmondásba kerültünk az $y_0 \in \bar{\mathfrak{L}}\setminus\mathfrak{L}$ feltevéssel. A tételt bebizonyítottuk.

A 6. §-ban meg fogjuk mutatni (lásd a 4. pontot), hogy J-terekben az 5. 7. tétel bizonyos értelemben megfordítható: *definit (zárt) altér akkor és csak akkor reguláris, ha τ_2-teljes (azaz szabályos* — lásd a 3°. állítást)[14].

Ebből a következő állítás adódik:

4°. *J-térbeli $\mathfrak{L}$ definit lineálokra a regularitás és a szabályosság fogalma egybeesik.*

Valóban, ha $\mathfrak{L}$ reguláris definit lineál $\mathfrak{E}$-ben, akkor lezárása, $\bar{\mathfrak{L}}$ is reguláris (5. 6. tétel), tehát szabályos. De akkor $\mathfrak{L}$ is szabályos (3. 5. tétel).

Megfordítva, ha az $\mathfrak{L}$ lineál szabályos, akkor $\bar{\mathfrak{L}}$ is szabályos. $\mathfrak{L}$ definit volta miatt $\bar{\mathfrak{L}}$ szemidefinit, és minthogy szabályos is, $\bar{\mathfrak{L}}$ definit (3. §, 9°.). Minthogy továbbá $\bar{\mathfrak{L}}$ vetítésre nézve teljes is (4. §, 2. pont), az $\bar{\mathfrak{L}}$ altér reguláris (5. 2. tétel, következmény), és vele együtt az $\mathfrak{L}$ lineál is reguláris.

6. §. J-metrikával ellátott terek

Ebben a paragrafusban részletesen fogjuk tanulmányozni a J-tereket (2. §, 7. pont), vagyis azokat a $(\mathfrak{H}, G^h)$-tereket, amelyekben a G-metrikát megadó Gram-operátor alakja $G \equiv J = P_+ - P_-$ (P_+ és P_- Hilbert-féle merőleges vetítések operátorai, $P_+ + P_- = I$). Amint a 2. § 3°. állításában megmutattuk, bármelyik $(\mathfrak{H}, G^h)$-típusú $\mathfrak{E}$ tér, amelynek a G Gram-operátora korlátosan invertálható, J-térré alakítható át azáltal, hogy a Hilbert-féle metrikáját ($\mathfrak{H}$-metrikáját) bizonyos vele ekvivalens metrikával helyettesítjük.

1. A továbbiak szempontjából lényeges a következő nyilvánvaló állítás (lásd 2. §, 8. pont):

1°. *Egy $\mathfrak{E}$ J-tér $\mathfrak{H}$-topológiája kompatibilis a J-metrikával $\mathfrak{E}$-n, tehát a $\mathfrak{H}$-topológia azonos a τ_1-topológiával az $\mathfrak{E}$ téren.*

Innen és a 3. 1. tételből adódik:

2°. *Egy $\mathfrak{E}$ J-tér tetszés szerinti $\mathfrak{L}$ lineáljára $\mathfrak{L}'' = \bar{\mathfrak{L}}$, ahol $\bar{\mathfrak{L}}$ az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{H}$-lezárása. Speciálisan, ha $\mathfrak{L}$ altér, akkor $\mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}$.*

Felhasználva az 1°. és a 3. § 5°. állítását, meggyőződhetünk a következő állítás helyességéről:

3°. *Ha $\mathfrak{L}$ lineál az $\mathfrak{E}$ J-térben, akkor ahhoz, hogy $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ sűrű legyen $\mathfrak{E}$-ben ($\overline{\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'} = \mathfrak{E}$), szükséges és elégséges, hogy az $\bar{\mathfrak{L}}(=\mathfrak{L}'')$ altér nemelfajuló legyen.*

[14] Magától értetődik, hogy $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekben ez már nem igaz. Elegendő tekinteni egy olyan $(\mathfrak{H}, G^h)$ típusú $\mathfrak{E}$ teret, amelynek a G Gram-operátora pozitív és G^{-1} nem korlátos. Akkor maga $\mathfrak{E}$ reguláris, de nem szabályos (nem τ_2-teljes).

Speciálisan ha $\mathfrak{L}$ *altér, akkor* $\overline{\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'}=\mathfrak{E}$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathfrak{L}$ *nemelfajuló.*

A 4. § 6°. állításából következik, hogy egy $\mathfrak{E}$ J-térbeli $\mathfrak{L}$ nem-zárt lineál nem lehet vetítésre nézve teljes. Ami viszont a zárt lineálokat, vagyis az $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ altereket illeti, $\mathfrak{L}$ vetítésre vonatkozó teljességéhez szükséges és elégséges (4. 3. tétel), hogy $\mathfrak{L}$-en a $\tau_1(\mathfrak{L}, J)$, $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$ topológiák egymással ekvivalensek legyenek, minthogy pedig az 1°. állítás alapján az $\mathfrak{E}$ téren $\tau_1(\mathfrak{E}, J)$ egybeesik a $\mathfrak{H}$-topológiával, bebizonyítottuk az alábbi állítást:

4°. *Az* $\mathfrak{E}$ *J-tér* $\mathfrak{L}$ *altere vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha szabályos* (3. §, 7. pont).

Definit $\mathfrak{L}$ alterek esetén az 5. § 3°. állítása értelmében a fenti 4°. állítást így lehet átfogalmazni:

5°. *Definit altér vetítésre nézve akkor és csak akkor teljes, ha* τ_2*-teljes.*

2. Vezessük be az $\mathfrak{E}_+=P_+\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_-=P_-\mathfrak{E}$ jelöléseket. Akkor fennáll az

$$\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_+\oplus\mathfrak{E}_-$$

egyenlőség, és ez az $\mathfrak{E}$ térnek egy kanonikus felbontása (3. §, 2. pont).

6°. *Legyen* $\mathfrak{L}$ *tetszés szerinti nemnegatív (nempozitív) lineál az* $\mathfrak{E}$ *J-térben. Akkor a* P_+ (P_-) *vetítő operátor az* $\mathfrak{L}$ *lineált lineáris és* $\mathfrak{H}$*-homeomorf módon (azaz kölcsönösen egyértelműen és a* $\mathfrak{H}$*-topológiára nézve mindkét irányban folytonosan) képezi le a* $P_+\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_+$ $(P_-\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}_-)$ *lineálra.*

A bizonyítást végezzük nemnegatív $\mathfrak{L}$ lineál esetére szorítkozva. Az $\mathfrak{L}$ lineál $P_+\mathfrak{L}$-re való P_+ leképezésének kölcsönös egyértelműsége abból látható, hogy $P_+x=0$, $x\in\mathfrak{L}$ esetén $x=P_-x$, minthogy pedig $\mathfrak{L}$ nemnegatív, $x=0$. Ami a $P_+\mathfrak{L}$ lineált $\mathfrak{L}$-be átvivő inverz leképezés folytonosságát illeti, az az

$$\|x\|^2=\|P_+x\|^2+\|P_-x\|^2\leqq 2\|P_+x\|^2$$

egyenlőtlenségből adódik, amely a

$$0\leqq G(x,x)=(Jx,x)=\|P_+x\|^2-\|P_-x\|^2$$

összefüggés miatt bármilyen $x\in\mathfrak{L}$ vektorra érvényes.

6. 1. TÉTEL. a) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *nemnegatív (pozitív) lineál maximális nemnegatív (pozitív) altér*[15] *legyen, szükséges és elégséges a*

$$P_+\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_+ \tag{6. 1}$$

feltétel teljesülése.

b) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *nempozitív (negatív) lineál maximális nempozitív (negatív) altér legyen, szükséges és elégséges a*

$$P_-\mathfrak{L}=\mathfrak{E}_- \tag{6. 2}$$

feltétel teljesülése.

c) *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{E}$ *semleges lineál maximális semleges altér legyen, szükséges és elégséges, hogy a* (6. 1), (6. 2) *egyenlőségek közül az egyik teljesüljön.*

[15] Így hívjuk az $\mathfrak{E}$ térnek azokat a maximális nemnegatív (pozitív) lineáljait, amelyek $\mathfrak{H}$-alterek.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az $\mathfrak{L}$ nemnegatív lineálra fennáll a (6. 1) egyenlőség. Ha létezne olyan nemnegatív $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{L}$ altér, amelyre $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L} \neq 0$, akkor a 6°. állítás alapján azt kapnánk, hogy $P_+\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{L}_1 \setminus P_+\mathfrak{L} \neq 0$, és ez ellentmond a $P_+\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{E}_+$ inkluziónak. Minthogy minden pozitív (és semleges) altér nemnegatív, az a), c) feltételek elégséges voltát bebizonyítottuk. A b) feltétel elégségessége analóg módon igazolható.

Most legyen $\mathfrak{L}$ valamilyen nemnegatív (pozitív) altér. Ha $P_+\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_+$, akkor $P_+\mathfrak{L}$ zártsága miatt, ami a 6°. állításból következik, található $(0 \neq) x_0 \in \mathfrak{E}_+ \ominus P_+\mathfrak{L}$ vektor. Nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L} \oplus \{x_0\}$ nemnegatív (és pozitív $\mathfrak{L}$ esetén pozitív) altér, amely tartalmazza $\mathfrak{L}$-et, következésképpen $\mathfrak{L}$ nem maximális. Ha viszont $\mathfrak{L}$ semleges altér és $P_+\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_+$, $P_-\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}_-$, akkor $\mathfrak{L} \oplus \{x_0 + y_0\}$, ahol $(0 \neq) x_0 \in \mathfrak{E}_+ \ominus P_+\mathfrak{L}$, $(0 \neq) y_0 \in \mathfrak{E}_- \ominus P_-\mathfrak{L}$, $\|x_0\| = \|y_0\|$, egy $\mathfrak{L}$-et tartalmazó semleges altér, tehát $\mathfrak{L}$ nem lehet maximális semleges altér. A tételt bebizonyítottuk.

Minthogy az $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér dimenziója (az $\mathfrak{H}$-beli teljes ortonormális bázisok számossága) lineáris homeomorf leképezések során nem változik meg, a 6°. állításból és a 6. 1. tételből az alábbiakat kapjuk.

6. 2. TÉTEL. *Az $\mathfrak{E}$ J-tér minden maximális nemnegatív és pozitív alterének a dimenziója megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}_+ = P_+\mathfrak{E}$ altér dimenziójával. Az $\mathfrak{E}$ tér minden maximális nempozitív és negatív alterének dimenziója megegyezik és egyenlő az $\mathfrak{E}_- = P_-\mathfrak{E}$ altér dimenziójával. Az $\mathfrak{E}$ térben minden maximális semleges altér dimenziója egyenlő $\mathfrak{E}_+$ és $\mathfrak{E}_-$ dimenziója közül a kisebbikkel.*

Ebből és a kanonikus felbontások komponenseinek maximalitásából (3. §, 2. pont) közvetlenül adódik az alábbi állítás, amelyet úgy tekinthetünk, mint a kvadratikus alakok tehetetlenségi törvényének általánosítását.

7°. *Ha*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_-$$

az $\mathfrak{E}$ J-tér kanonikus felbontása, akkor

$$\dim \mathfrak{M}_+ = \dim \mathfrak{E}_+, \quad \dim \mathfrak{M}_- = \dim \mathfrak{E}_-.$$

3. Tekintsünk valamilyen $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineált. Ha van olyan K lineáris operátor, amely az $\mathfrak{E}_+$ alteret $\mathfrak{E}_-$-ba képezi le, az $\mathfrak{E}_-$ altéren azonosan nulla, és amelyre igaz az, hogy $\mathfrak{L}$ az $\mathfrak{E}$ tér

$$x = x_+ + Kx_+ \qquad (x_+ \in \mathfrak{E}_+)$$

alakban felírható vektoraiból és csak ezekből áll, akkor azt fogjuk mondani, hogy *K az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_+$-ra vonatkozó szög-operátora.* Analóg módon definiálható *az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_-$-ra vonatkozó szög-operátora.*

A következőkben bizonyítás nélkül idézünk számos egyszerű állítást, amelyek a szög-operátorok segítségével leírják a J-terek maximális altereinek elhelyezkedését (a bizonyításokat lásd a [33] dolgozatban[16]).

6. 3. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ lineál maximális nemnegatív altér legyen, szükséges és elégséges, hogy az $\mathfrak{L}$ lineál $\mathfrak{E}_+$-ra vonatkozó K szög-operátora létezzék és kontrakció legyen: $\|K\| \leq 1$. Ezen belül $\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor maximális pozitív*

[16] A [33] cikkben „szög-operátor" helyett a „szög-együttható" elnevezés szerepel.

altér, ha K az $\mathfrak{E}_+$ altéren teljesen nem-izometrikus kontrakció ($0 \neq x \in \mathfrak{E}_+$ *esetén* $\|Kx\| < \|x\|$), *továbbá* $\mathfrak{L}$ *akkor és csak akkor maximális semleges altér, ha a K operátor az $\mathfrak{E}_+$ altéren izometrikus* ($x \in \mathfrak{E}_+$ *esetén* $\|Kx\| = \|x\|$).

Ebből és a nempozitív lineálokra érvényes analóg állításból következik, hogy *az* $\mathfrak{L}$ *lineál akkor és csak akkor hipermaximális semleges* (3. §, 6. pont) *altér, ha szög-operátora az* $\mathfrak{E}_+$ *alteret izometrikusan* $\mathfrak{E}_-$*-ra képezi le.*

6. 4. TÉTEL. *Az* $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) *maximális pozitív (negatív) altér akkor és csak akkor szabályos (és így vetítésre nézve teljes* (4. §, 2. pont)*), ha* $\mathfrak{E}_+$*-ra (ill.* $\mathfrak{E}_-$*-ra) vonatkozó K szög-operátorára teljesül a*

$$\|K\| < 1$$

egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy a 6. 3. és 6. 4. tétel másik, ekvivalens megfogalmazását kapjuk, ha az $\mathfrak{L}$ lineál K szög-operátora helyett azt az $\mathfrak{L}$-re „ferdén" vetítő E operátort ($E^2 = E$) tekintjük, amelyre nemnegatív lineál esetén $EP_+ = E$, $P_+E = P_+$, nempozitív lineál esetén $EP_- = E$, $P_-E = P_-$. Nem nehéz belátni, hogy ezen E vetítő operátor és a K szög-operátor között fennállnak az

$$E = P_+ + K \ (\mathrm{sign}\ \mathfrak{L} \geqq 0), \qquad E = P_- + K \ (\mathrm{sign}\ \mathfrak{L} \leqq 0)$$

egyenlőségek.

A 6. 4. tételből azt nyerjük, hogy a J-terek osztályában a $\Pi_\varkappa$ terek (2. §, 7. pont) a következőképpen jellemezhetők.

6. 5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\mathfrak{E}$ *J-térben minden definit (pozitív vagy negatív) altér szabályos legyen, szükséges és elégséges, hogy az* $\mathfrak{E}_+$, $\mathfrak{E}_-$ *alterek közül legalább az egyiknek a dimenziója véges legyen, vagyis hogy az* $\mathfrak{E}$ *tér* $\Pi_\varkappa$*-típusú legyen* ($\varkappa = \min\{\dim \mathfrak{E}_+, \dim \mathfrak{E}_-\}$).

Egy $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ altér és J-ortogonális komplementuma, $\mathfrak{L}'$ szög-operátorai között a kapcsolatot a következő állítás adja meg:

8°. *Ha K az* $\mathfrak{L}$ *altér* $\mathfrak{E}_+$*-ra vonatkozó szög-operátora, akkor* K^* *az* $\mathfrak{L}'$ *altér* $\mathfrak{E}_-$*-ra vonatkozó szög-operátora.*

A bizonyítás abból adódik, hogy $x \in \mathfrak{L}'$ akkor és csak akkor, ha tetszés szerinti $x_+ \in \mathfrak{E}_+$ vektorra $(Jx, x_+ + Kx_+) = 0$, azaz $(P_+x, x_+) = (K^*P_-x, x_+)$. Minthogy $\mathfrak{R}(K^*) \subset \mathfrak{E}_+$, az utóbbi egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $P_+x = K^*P_-x$. Más szóval $x \in \mathfrak{L}'$ akkor és csak akkor, ha

$$x = K^*P_-x + P_-x,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy K^* az $\mathfrak{L}'$ altér $\mathfrak{E}_-$-ra vonatkozó szög-operátora.

Innen közvetlenül kapjuk az alábbiakat:

9°. *Ha* $\mathfrak{L}$ *maximális nemnegatív (nempozitív, pozitív, negatív) altér, akkor* $\mathfrak{L}'$ *maximális nempozitív (illetve rendre nemnegatív, negatív, pozitív) altér.*

Azonkívül a 8°. állításból és a 6. 4. tételből az $\mathfrak{E}$ J-tér összes kanonikus felbontásainak következő leírása adódik:

6. 6. TÉTEL. *Ahhoz, hogy* $\mathfrak{M}_+$ *és* $\mathfrak{M}_-$ *az* $\mathfrak{E}$ *J-tér valamilyen kanonikus felbontásának a komponensei legyenek, szükséges és elégséges, hogy fennálljanak az*

$$\mathfrak{M}_+ = (P_+ + K)\mathfrak{E}_+, \qquad \mathfrak{M}_- = (P_- + K^*)\mathfrak{E}_- \tag{6. 3}$$

összefüggések, ahol a K lineáris operátor teljesíti a

$$\|K\| < 1, \quad K\mathfrak{E}_+ \subset \mathfrak{E}_-, \quad K\mathfrak{E}_- = 0$$

feltételeket.

Most megmutatjuk, hogy egy $\mathfrak{E}$ *J-térben bármilyen* $\mathfrak{L}$ *altér tanulmányozása visszavezethető maximális alterek vizsgálatára.* Ehhez tekintsük az $\mathfrak{L}$ altér olyan

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \oplus \mathfrak{L}_- \oplus \mathfrak{L}_0$$

kanonikus felbontását, amelynek a komponensei nemcsak J-ortogonálisak, hanem $\mathfrak{H}$-ortogonálisak is egymásra (lásd 3. §, 2. pont). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathfrak{E}_+^{(1)} = P_+\mathfrak{L}_+, \quad \mathfrak{E}_-^{(1)} = \overline{P_-\mathfrak{L}_+}, \quad \mathfrak{E}_+^{(2)} = \overline{P_+\mathfrak{L}_-}, \quad \mathfrak{E}_-^{(2)} = P_-\mathfrak{L}_-,$$

$$\mathfrak{E}_+^{(3)} = P_+\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}_-^{(3)} = P_-\mathfrak{L}_0, \quad \mathfrak{E}^{(k)} = \mathfrak{E}_+^{(k)} \oplus \mathfrak{E}_-^{(k)} \qquad (k=1,2,3).$$

Ha $x \in \mathfrak{L}_+$, $y \in \mathfrak{L}_-$, akkor

$$(P_+x, P_+y) + (P_-x, P_-y) = (x, y) = 0$$

és

$$(P_+x, P_+y) - (P_-x, P_-y) = (Jx, y) = 0.$$

Ebből következik az $\mathfrak{E}_+^{(1)}$ és $\mathfrak{E}_+^{(2)}$, $\mathfrak{E}_-^{(1)}$ és $\mathfrak{E}_-^{(2)}$ alterek $\mathfrak{H}$-ortogonalitása. Ugyanilyen megfontolások alapján végül is bebizonyíthatjuk, hogy az $\mathfrak{E}^{(1)}, \mathfrak{E}^{(2)}, \mathfrak{E}^{(3)}$ alterek páronként $\mathfrak{H}$-ortogonálisak és J-ortogonálisak. Nem nehéz belátni, hogy az $\mathfrak{E}^{(k)}$ $(k=1, 2, 3)$ altéren a J-metrika azt a J_k-metrikát indukálja, amelynek Gram-operátora $J_k = P_+^{(k)} - P_-^{(k)}$, ahol $P_+^{(k)}$ és $P_-^{(k)}$ az $\mathfrak{E}_+^{(k)}$ ill. $\mathfrak{E}_-^{(k)}$ altérhez tartozó Hilbert-féle merőleges vetítés operátora. A 6. 1. tétel értelmében $\mathfrak{L}_+$ maximális pozitív altér $\mathfrak{E}^{(1)}$-ben, $\mathfrak{L}_-$ maximális negatív altér $\mathfrak{E}^{(2)}$-ben, $\mathfrak{L}_0$ hipermaximális semleges altér $\mathfrak{E}^{(3)}$-ban. Könnyen látható, hogy az $\mathfrak{L}$ altér J-ortogonális komplementuma — az $\mathfrak{L}'$ altér — előállítható

$$\mathfrak{L}' = (\mathfrak{L}_+)_1' \oplus (\mathfrak{L}_-)_2' \oplus \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{E}^{(4)} \tag{6. 4}$$

alakban, ahol $(\mathfrak{M})_k'$ az $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{E}^{(k)}$ altér J_k-ortogonális komplementuma $\mathfrak{E}^{(k)}$-ban és $\mathfrak{E}^{(4)} = \mathfrak{E} \ominus [\mathfrak{E}^{(1)} \oplus \mathfrak{E}^{(2)} \oplus \mathfrak{E}^{(3)}]$. A (6. 4) felbontás bizonyításánál felhasználtuk, hogy a 3. 3. tétel alapján $(\mathfrak{L}_0)_3' = \mathfrak{L}_0$.

4. Az 5. 2. tétel következménye szerint az $\mathfrak{E}$ G-térben minden vetítésre nézve teljes definit lineál reguláris. Ha az $\mathfrak{E}$ tér J típusú, akkor ennek a fordítottja is igaz, amint az alábbi állításból következik.

6. 7. tétel. *Az* $\mathfrak{E}$ *J-térben minden nem-szabályos definit altér szinguláris.*

A 3. pont végén mondottak értelmében a bizonyítást elég maximális pozitív nem-szabályos $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{E}$ altérre végezni. Ha K az $\mathfrak{L}$ altér szög-operátora, akkor a 6. 3. tétel alapján

$$([P_+ - K^*K]x_+, x_+) = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 > 0$$

minden nullától különböző $x_+ \in \mathfrak{E}_+$ vektorra. Ebből és a 6. 4. tétel szerint fennálló $\|K^*K\| = \|K\|^2 = 1$ egyenlőségből következik, hogy a $\lambda = 0$ pont, amely az $\mathfrak{E}_+$ altéren tekintett $T = P_+ - K^*K$ operátornak nem sajátértéke, a spektrum torlódási pontja. Legyen E_λ $(0<\lambda\leqq M)$ az $\mathfrak{E}_+$ altéren tekintett T operátor balról folytonos spektrálserege $(E_0=0,\ E_M=P_+,\ E_{\lambda-0}=E_\lambda)$. Tekintsük a

$$\Delta_1=\left(\frac{M}{8},M\right],\quad \Delta_2=\left(\frac{M}{27},\frac{M}{8}\right],\ldots,\quad \Delta_n=\left(\frac{M}{(n+1)^3},\frac{M}{n^3}\right],\ldots$$

félig zárt intervallumokat. Az $\mathfrak{M}_k=E_{\Delta_k}\mathfrak{E}_+$ alterek sorozatából válasszuk ki a sorozat nullától különböző tagjaiból álló $\{\mathfrak{M}_{k_n}\}$ részsorozatot (minthogy $\lambda=0$ a T operátor spektrumának torlódási pontja, ez a részsorozat végtelen). Vegyünk fel $x_n^+\in\mathfrak{M}_{k_n}\subset\mathfrak{E}_+$, $\|x_n^+\|=1$ $(n=1,2,\ldots)$ vektorokat. Nyilván

$$(Tx_n^+,x_n^+)\leqq\frac{1}{n^3}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Tekintettel arra, hogy $(x_i^+,x_j^+)=\delta_{ij}$, az

$$y_0^+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x_n^+\in\mathfrak{E}_+$$

vektor létezik. Most tekintsük az

$$y_n=n(x_n^++Kx_n^+)\in\mathfrak{L}\qquad(n=1,2,\ldots)$$

sorozatot. Fennáll

$$(Jy_n,y_n)=n^2(J[x_n^++Kx_n^+],x_n^++Kx_n^+)=$$

$$=n^2([P_+-K^*K]x_n^+,x_n^+)=n^2(Tx_n^+,x_n^+)\leqq\frac{1}{n},$$

tehát $(Jy_n,y_n)\to0$ $(n\to\infty)$. Ugyanakkor

$$(Jy_n,y_0^+)=n(x_n^+,y_0^+)=1\qquad(n=1,2,\ldots),$$

és így az

$$f_{y_0^+}(x)=(Jx,y_0^+)$$

funkcionál nem τ_2-folytonos. Ily módon bebizonyítottuk, hogy az $\mathfrak{L}$ altér szinguláris.

5. Ebben a pontban meg fogjuk mutatni, hogy a $(\mathfrak{H},G^h)$-terek osztályában a J-terek az „univerzalitás” tulajdonságával rendelkeznek. Annak érdekében, hogy áttérhessünk a pontos megfogalmazásokra, bevezetjük a következő definíciót. Azt fogjuk mondani, hogy a $(\mathfrak{H},G^h)$ típusú $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ terek *ekvivalensek*, ha az $\mathfrak{E}_1$ térnek létezik $\mathfrak{H}$-homeomorf és G-izometrikus lineáris leképezése[17] az $\mathfrak{E}_2$ térre.

6. 8. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{E}$ olyan J-tér, amelyre* $\dim\mathfrak{E}_+=\dim\mathfrak{E}_-=\mathfrak{M}$. *Akkor bármilyen $\mathfrak{N}\leqq\mathfrak{M}$ dimenziójú $\mathfrak{E}_1$ $(\mathfrak{H},G^h)$-térhez található $\mathfrak{E}$-ben vele ekvivalens $\mathfrak{L}$ altér.*

[17] Az U leképezést G-izometrikusnak nevezzük, ha $x,y\in\mathfrak{E}_1$ esetén $G_2(Ux,Uy)=G_1(x,y)$ (itt $G_i(x,y)$ az az alak, amely az $\mathfrak{E}_i$ tér G-metrikáját értelmezi).

A bizonyítást nyilván elegendő arra az esetre elvégezni, amikor $\mathfrak{E}_1$ pozitív (lásd 3. pont) és $\dim \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Legyen $\mathfrak{E}_1$ ilyen ($\mathfrak{H}$, G^h)-tér, és az $\mathfrak{E}_1$-beli G-metrikát indukálja a $G_1(x, y)$ alak, a $\mathfrak{H}$-topológiát pedig az $(x, y)_1$ skaláris szorzat. Az utóbbi nyilván megválasztható úgy, hogy G_1-nek — a $G_1(x, y)$ alak $\mathfrak{E}_1$-beli Gram-operátorának — a normája legfeljebb 1 legyen. Most legyen U_1 az $\mathfrak{E}_1$ térnek az $\mathfrak{E}_+$ altérre való $\mathfrak{H}$-izometrikus leképezése (ennek létezését az $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ egyenlőség biztosítja). Tekintsünk egy $\mathfrak{E}_+$-on önadjungált A operátort, amely teljesíti a

$$P_+ - A^2 = U_1 G_1 U_1^{-1}$$

feltételt; ez az $\|U_1 G_1 U_1^{-1}\| \leqq 1$ egyenlőtlenség következtében lehetséges. Legyen

$$K = VA,$$

ahol V az $\mathfrak{E}_+$ altérnek $\mathfrak{E}_-$-ra való tetszés szerinti $\mathfrak{H}$-izometriája. Fennáll $\|A\| \leqq 1$, tehát $\|K\| \leqq 1$.

Legyen $\mathfrak{L}$ ($\subset \mathfrak{E}$) olyan altér, amelynek szög-operátora K-val egyenlő. A 6. 3. tétel alapján $\mathfrak{L}$ maximális nemnegatív altér. Bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{E}_1$ ekvivalens egymással. Ennek érdekében megjegyezzük, hogy először is a 6°. állítás értelmében az $U = U_1^{-1} P_+$ leképezés $\mathfrak{L}$-nek $\mathfrak{E}_1$-re való $\mathfrak{H}$-homeomorfizmusa. Másodszor, $x, y \in \mathfrak{L}$ esetén

$$J(x, y) = ([P_+ - K^* K] P_+ x, P_+ y) = ([P_+ - A^2] P_+ x, P_+ y) =$$
$$= (G_1 U_1^{-1} P_+ x, U_1^{-1} P_+ y)_1 = (G_1 U x, U y)_1 = G_1(U x, U y),$$

és így az U leképezés G-izometrikus. A tételt bebizonyítottuk.

6. Befejezésül vizsgáljunk meg néhány kérdést a J-terek bázisaival kapcsolatban. A szeparábilis esetre fogunk szorítkozni (annak ellenére, hogy analóg eredmények általánosabb feltevések mellett is megfogalmazhatók) abból a célból, hogy felhasználhassuk a $\mathfrak{H}$-térbeli biortogonális rendszerek N. K. BARItól [59] származó elméletének alaptételeit[18].

Emlékeztetünk arra, hogy az $\mathfrak{E}$ szeparábilis $\mathfrak{H}$-térben vektorok két teljes rendszere, $\mathfrak{S} = \{e_k\}_1^\infty$ és $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}_1^\infty$ akkor alkot $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*\}$ *biortogonális rendszert*, ha $(e_i, g_j) = \delta_{ij}$. Az $\mathfrak{S}^*$ rendszert (amelyet $\mathfrak{S}$ egyértelműen meghatároz) az $\mathfrak{S}$ rendszer *konjugáltjának* nevezzük. Az $\mathfrak{S}$ rendszert *Bessel-félének* mondjuk, ha $x \in \mathfrak{E}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, g_k)|^2 < \infty,$$

és *Hilbert-félének*, ha tetszés szerinti, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$$

feltételt teljesítő γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ számokhoz található egy és csak egy olyan $x \in \mathfrak{E}$ vektor, amelyre $(x, g_k) = \gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ismeretes, hogy ha $\mathfrak{S}$ Bessel-féle, akkor $\mathfrak{S}^*$ Hilbert-féle. *Ha egy $\mathfrak{S}$ rendszer egyszerre Bessel-féle és Hilbert-féle, akkor $\mathfrak{S}$ bázis az $\mathfrak{E}$ térben,* vagyis bármelyik $x \in \mathfrak{E}$ vektor egyértelműen előállítható erősen konvergens

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k, \quad \gamma_k = (x, g_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

[18] Lásd még a [60] munkát.

sor összegeként. Az ilyen bázisokat *Riesz-bázisoknak* hívják. Amint I. M. GELFAND [61] megmutatta, *az $\mathfrak{S}$ bázis akkor és csak akkor Riesz-bázis, ha vektorainak bármilyen átrendezése esetén bázis marad.* A Riesz-bázis, a Bessel-féle és a Hilbert-féle rendszer további ekvivalens definícióit lásd az [59], [60] munkákban.

Most legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ az $\mathfrak{E}$ J-térben teljes J-ortonormális rendszer, azaz $(Je_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$. Legyen $g_k = Je_k$, ha $(Je_k, e_k)=1$, és $g_k = -Je_k$, ha $(Je_k, e_k) = -1$. Ekkor az $\mathfrak{S}^* = \{g_k\}$ rendszer az $\mathfrak{S}$ rendszer konjugáltja. Könnyű belátni, hogy az $\{e_k\}$, $\{\pm Je_k\}$ rendszerek egyszerre Bessel-félék vagy Hilbert-félék. Ebből következik az alábbi állítás.

10°. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{E}$ térben teljes és J-ortonormális $\mathfrak{S}$ rendszer az $\mathfrak{E}$ tér Riesz-bázisa legyen, elégséges, ha $\mathfrak{S}$ vagy Bessel-féle (tetszés szerinti $x\in\mathfrak{E}$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} |(Jx, e_k)|^2 < \infty$), vagy Hilbert-féle (a $(Jx, e_k) = \gamma_k$, $k=1, 2, \dots$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható $\mathfrak{E}$-ben, hacsak $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$).*

Legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ teljes J-ortonormális rendszer $\mathfrak{E}$-ben. Tekintsük az $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_-$ altereket — az $\mathfrak{S}_+ = \{e_k : (Je_k, e_k) = 1\}$, ill. $\mathfrak{S}_- = \{e_k : (Je_k, e_k) = -1\}$ rendszerek zárt lineáris burkait. Nyilvánvaló, hogy

$$\overline{\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_-} = \mathfrak{E}.$$

6. 9. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ J-ortonormális rendszer az $\mathfrak{E}$ tér Riesz-bázisa legyen, szükséges és elégséges az*

$$\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$$

feltétel, vagyis hogy $\mathfrak{M}_+$ és $\mathfrak{M}_-$ az $\mathfrak{E}$ tér valamilyen kanonikus felbontásának komponensei legyenek.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$, akkor tetszés szerinti $x\in\mathfrak{E}$ vektor előállítható $x = x_+ + x_-$ $(x_+\in\mathfrak{M}_+,\ x_-\in\mathfrak{M}_-)$ alakban. Minthogy $\mathfrak{S}_+$ és $\mathfrak{S}_-$ J-ortonormális bázis az $\mathfrak{M}_+$ ill. $\mathfrak{M}_-$ definit altérben, fennáll

$$\sum_{e_k\in\mathfrak{S}_+} |(Jx_+, e_k)|^2 < \infty, \qquad \sum_{e_k\in\mathfrak{S}_-} |(Jx_-, e_k)|^2 < \infty.$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Jx, e_k)|^2 < \infty.$$

Ilyen módon az $\mathfrak{S}$ rendszer Bessel-féle, tehát a 10°. állítás szerint $\mathfrak{S}$ Riesz-bázis $\mathfrak{E}$-ben.

Megfordítva, legyen $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ Riesz-bázis az $\mathfrak{E}$ térben. Ha x az $\mathfrak{E}$ tér tetszés szerinti vektora, akkor $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ $(\gamma_k = \pm(Jx, e_k))$, ahol $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$. Legyen $e_k\in\mathfrak{S}_+$ esetén $\gamma_k^+ = \gamma_k$, $\gamma_k^- = 0$, $e_k\in\mathfrak{S}_-$ esetén pedig $\gamma_k^+ = 0$, $\gamma_k^- = \gamma_k$. Akkor $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^+|^2 < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^-|^2 < \infty$, és így léteznek az $x_+ = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^+ e_k \in \mathfrak{M}_+$, $x_- = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^- e_k \in \mathfrak{M}_-$ vektorok, ebből viszont következik az

$$\mathfrak{M}_+ \dotplus \mathfrak{M}_- = \mathfrak{E}$$

direkt felbontás érvényessége.

A bebizonyított tételből könnyen adódik, hogy *egy* $\mathfrak{S}$ *vektorrendszer akkor és csak akkor alkot J-ortonormális Riesz-bázist az* $\mathfrak{E}$ *J-térben, ha* $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_+\cup\mathfrak{S}_-$, *ahol* $\mathfrak{S}_+$ *és* $\mathfrak{S}_-$ *J-ortonormális bázis az* $\mathfrak{M}_+$ *ill.* $\mathfrak{M}_-$ *definit altérben, vagyis az* $\mathfrak{E}$ *tér valamelyik kanonikus felbontásának komponenseiben.* Ez az állítás, tekintettel a 6. 6. tételre, az $\mathfrak{E}$ J-tér Riesz-bázisainak teljes leírását adja.

Ami tetszés szerinti G^h-típusú $\mathfrak{E}$ tér $\mathfrak{S}=\{e_k\}_1^\infty$ G-ortonormális rendszereit ($G(e_i, e_j)=\pm\delta_{ij}$) illeti, ezen a téren csak R. NEVANLINNA [11] alábbi eredménye ismeretes, amelyet bizonyítás nélkül idézünk.

11°. *Ahhoz, hogy tetszés szerinti* $x, y\in\mathfrak{E}$ *vektorokra érvényes legyen a*

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} G(e_i, e_i)G(x, e_i)G(e_i, y)$$

abszolút konvergens bilineáris felbontás, szükséges és elégséges, hogy minden $x\in\mathfrak{E}$ *vektorra*

$$1)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i)|^2<\infty,$$

$$2)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i^-)|^2\leqq G(x, x)\leqq \sum_{i=1}^{\infty}|G(x, e_i^+)|^2$$

egyen ($G(e_i, e_i)=1$ *esetén* $e_i^+=e_i, e_i^-=0$; $G(e_i, e_i)=-1$ *esetén* $e_i^-=e_i, e_i^+=0$).

Ha ráadásul az $\mathfrak{E}$ G^h*-tér nemelfajuló, akkor bármelyik x eleme egyértelműen előállítható*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i e_i$$

alakú sor segítségével, amely a

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} G(x, e_i)G(e_i, y)$$

skaláris szorzat által indukált normában konvergál.

Megjegyzések és irodalmi utalások

2. §, 1. pont. Tetszés szerinti (általában nem-hermitikus) G-metrikával ellátott G-terek ilyen általános feltételek mellett való vizsgálatára, úgy látszik, ez az első eset.

2. pont. G-térbeli lokálisan konvex topológiák vizsgálatának az ötlete E. SCHEIBE-től származik [50], ő azonban hermitikus G-metrika esetére szorítkozott. E. SCHEIBE másik korlátozó feltevése az, hogy a tér nemelfajuló, ami maga után vonja a megfelelő topológiák szeparáltságát. Figyelembe kell venni, hogy az [50] cikk terminológiája (különösen a dolgozat algebrai részében) eltér a mienktől. Többek között az $\mathfrak{E}$ G-tér nemelfajuló és elfajuló lineáljait E. SCHEIBE reguláris, ill. szinguláris altereknek nevezi, az izotróp lineálokat pedig radikáloknak.

3. és 4. pont. A 2°. állítás és a 2. 1. tétel (mindkettő csak G^h-metrika esetére) az [50] műben szerepel. A „G-metrikát felülmúló topológia" kifejezés új. Lényegileg azonban (más terminológiával — vö. az 5. ponthoz írt megjegyzéssel) G^h-metrikát felülmúló $\mathfrak{H}$-topológiákkal már R. NEVANLINNA [11]—[13] foglalkozott. Viszont az említett munkák közül az utolsóban [13] szó van adott G^h-metrikát felülmúló ekvivalens és nem-ekvivalens $\mathfrak{H}$-topológiákról, pedig a 2. 1. tétel kimondja hogy az összes ilyen topológiák ekvivalensek. Nyilván az S. BANACH klasszikus tételével (vagy „zárt gráf tétellel") kapcsolatos gondolatkör R. NEVANLINNA vizsgálatainak területén kívül esett.

A 4. pont végén ismertetett példát illetően lásd a következő megjegyzést.

5. pont. G^h-metrikák hermitikusan nemnegatív és hermitikusan pozitív majoránsait először R. NEVANLINNA tanulmányozta [11]—[13], de figyelmen kívül hagyta azt a kérdést, hogy adott G^h-metrikához találhatók-e ilyenek. Az az általánosabb kérdésfeltevés, amely majoráns félnormálható topológiákra vonatkozik, itt szerepel először.

A 4. pontban ismertetett példa többek között azt mutatja, hogy van olyan G-metrika, amelyet semmilyen félnormálható topológia, és így semmilyen hermitikusan nemnegatív majoráns se majorál. Ennek a példának a szerzője M. L. BRODSZKIJ. Az a megjegyzés, hogy az M. L. BRODSZKIJ által szerkesztett G-metrikát egyetlen olyan topológia sem múlja felül, amelyet megszámlálhatóan végtelen sok félnorma értelmez, JU. P. GINZBURGtól származik.

6. és 7. pont. Gram-operátorokat $(\mathfrak{B}, G)$-terekben azelőtt nem vizsgáltak. $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetén lényegileg már R. NEVANLINNÁ-nál [11] szerepeltek, ezért tanítványai és E. SCHEIBE ezeket a tereket *Nevanlinna-féléknek* nevezték.

A végtelen dimenziójú J-tereket JU. P. GINZBURG vezette be [22]—[24]. Megemlítjük, hogy az [50] dolgozat szerzője ezekre a terekre a következő eléggé esetlen kifejezést alkalmazza: „két Hilbert-tér különbsége". A 3°. állítás H. LANGER-től származik [31].

8. pont. A 2. 3. tétel nemelfajuló G^h-tér esetére megtalálható E. SCHEIBE [50] munkájában; itt a szerző a bizonyítás iránt érdeklődő olvasónak N. BOURBAKI [51] tanulmányát ajánlja. E bizonyítást JU. P. GINZBURG rekonstruálta és általánosította tetszés szerinti G-terekre. Ugyancsak tőle ered a 2. 5. tétel.

3. §, 1. pont. Itt az ismertetésben E. SCHEIBÉ-t követjük [50]. Csak arra kell figyelemmel lenni, hogy a semleges lineálokat az [50] dolgozat totálisan szinguláris altereknek nevezi.

3. pont. A (3. 8) kanonikus felbontás segítségével megszerkesztett $H(x, y)$ majoráns *minimális* abban az értelemben, hogy az adott G^h-metrika minden nemnegatív $H_1(x, y)$ majoránsára, amelyre $H_1(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_0) = H_1(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_+) = H_1(\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_-) = H_1(\mathfrak{E}_+, \mathfrak{E}_-) = 0$, fennáll a

$$H_1(x, x) \geqq H(x, x) \qquad (x \in \mathfrak{E})$$

egyenlőtlenség. Ilyen majoránsokat $(\mathfrak{H}, G^h)$-terekben R. NEVANLINNA tanulmányozott [11]—[13].

5. pont. A 3. 1. tétel és 3°., 4°., 5°. következményei nemelfajuló G^h-metrika esetében E. SCHEIBÉ-től [50], tetszés szerinti G-metrikára való általánosításuk pedig JU. P. GINZBURGtól ered.

6. pont. Ezen pont eredményeinek a többsége a $\Pi_\varkappa$ terek speciális esetére már korábban ismeretes volt (lásd [8], 2. 3. lemma, 4. 1. lemma, 4. 1. tétel). Ferdén kapcsolt semleges lineálokkal (M. G. KREJN elnevezése) $\Pi_\varkappa$ terekben először L. SZ. PONTRJAGIN-nak volt dolga [3], majd I. SZ. JOHVIDOV alkalmazta őket [62], [6], [8][19].

J-terek hipermaximális semleges lineáljait JU. P. GINZBURG vizsgálta [33]. A 3. 3. tételt általános feltételek mellett I. SZ. JOHVIDOV bizonyította be. J-terek esetében ez a tétel a [33] munka állításaiból következik.

7. pont. Az aszimptotikusan izotróp sorozatokat, szabályos és relatíve szabályos altereket JU. P. GINZBURG vezette be [32], [33]. Ezen fogalmak (nem-zárt) lineálokra való általánosítása és a 3. 5. tétel I. SZ. JOHVIDOV-tól származik.

E pont összes eredményei természetes módon kiterjeszthetők $(\mathfrak{B}, G)$-terekre.

4. §, 1. pont. $\Pi_\varkappa$ tér nemelfajuló altereire való G-vetületeket L. SZ. PONTRJAGIN vizsgált [3], és az ő nyomán általánosabb feltevések mellett I. SZ. JOHVIDOV és M. G. KREJN [7], [8]. $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetében a (zárt alterekre való) G-vetületek elméletének kidolgozását R. NEVANLINNA kezdte el [12]; kutatásait tanítványa, I. S. LOUHIVAARA folytatta [15], [21]. Az utoljára említett munkában már nem-hermitikus G-metrikával ellátott $\mathfrak{H}$-terekről van szó. I. S. LOUHIVAARÁ-tól függetlenül ebben az irányban általánosabb eredményeket kapott JU. P. GINZBURG [32], [52]. A tetszés szerinti G^h-terekben való G-vetítés kérdésével először I. SZ. JOHVIDOV foglalkozott [48], definit lineálokra való G-vetítésre szorítkozva (vö. 5. §, 1. és 2. pont). A G-vetületek általános elméletét JU. P. GINZBURG dolgozta ki [52].

A 3°. állítás $(\mathfrak{H}, G^h)$-terek esetére megtalálható I. S. LOUHIVAARA [15] cikkében. Ugyanő egy másik dolgozatában [21] idézi a nem-hermitikus G-metrikával ellátott $(\mathfrak{H}, G)$-térben való G-vetíthetőségnek egy igen bonyolult feltételét, hivatkozva F. BROWDER és W. LITTMAN eredményeire [17]—[19].

2. pont. G^h-térbeli lineál vetítésre vonatkozó teljességének fogalma lényegében E. SCHEIBE [50] munkájában szerepelt. Tőle függetlenül ezt a fogalmat és magát a „vetítésre vonatkozó teljesség" kifejezést I. SZ. JOHVIDOV vezette be [48]. A 4. 2. tétel nemelfajuló G^h-térbeli nemelfajuló $\mathfrak{L}$ lineál esetében E. SCHEIBÉ-től származik [50], az általános esetben pedig, épp úgy mint a 4. 3. tételt, JU. P. GINZBURG mondta ki először az [52] munkában. Az utóbbi tétel $(\mathfrak{H}, G)$-tér esetére a [32] cikkben jelent meg.

[19] *Megjegyzés a korrektúránál.* Lásd még BOGNÁR J. nemrég közölt cikkét [63].

3. pont. E pont állításai nemelfajuló $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{L}$ esetére E. SCHEIBE [50] dolgozatában szerepelnek.

4. pont. A 7°., α), β), γ) állítások a [32] dolgozatban jelentek meg. A β) állítás megtalálható I. S. LOUHIVAARA [21] művében is.

5. §, 1. pont. A reguláris és szinguláris definit lineál fogalmát I. Sz. JOHVIDOV vezette be [48]; az 5. § eredményei alapjában véve tőle származnak.

Az $m(y_0)$, $M(y_0)$ határokat ($\mathfrak{H}, G^h$)-térbeli $\mathfrak{L}$ (zárt) alterekre R. NEVANLINNA vizsgálta [12] a G-vetítés problémájával kapcsolatban. Speciálisan ő bizonyította be, hogy e megszorítások mellett a G-vetíthetőségnek az 5. 1. tétel következményében ismertetett feltétele szükséges, és τ_2-teljes $\mathfrak{L}$ altér esetén elégséges.

2. pont. Az 5. 2. tétel kissé eltérő alakban a [48] megjegyzésben került közlésre; az említett megjegyzés utolsó mondata megalapozatlan kijelentést tartalmaz arra nézve, hogy ebből a tételből a G^{-1} operátor zártsága miatt következnék a G-vetíthetőség JU. P. GINZBURGtól származó kritériuma ([32], 2. tétel).

3. és 4. pont. A. UHLMANN [42] munkájára BOGNÁR JÁNOS hívta fel a figyelmünket; tőle származik az 5. 3. tétel első bizonyítása is [46], [47]. Ezzel a bizonyítással 1960 végén módunk volt kéziratban megismerkedni. Ugyanakkor M. G. KREJN és I. Sz. JOHVIDOV a BOGNÁR JÁNOSSAL folytatott levelezés során rámutatott, hogy az 5. 3. tételre adott bizonyítása önmagában nem mond ellent A. UHLMANN feltevésének, amennyiben az ezen bizonyításban megszerkesztett szinguláris lineál nem τ_2-teljes. Ellentmondást, amint BOGNÁR J. megjegyezte, csak akkor kapunk, ha az 5. 3. tételt összekapcsoljuk A. UHLMANN (U) posztulátumával. De ez a megközelítési mód nem célszerű, mert a $\Pi_\varkappa$ terektől eltekintve egyelőre nem ismerünk olyan G-tereket, amelyekben az (U) posztulátum teljesülne (a $\Pi_\varkappa$-tól különböző J-terekben már biztosan nem teljesül (6. 5. tétel)). Ami pedig a $\Pi_\varkappa$ tereket illeti, az 5. 5. tételből következik, hogy A. UHLMANN feltevésének ellentmondó példát korábban I. Sz. JOHVIDOV és M. G. KREJN konstruált ([8], 421. oldal).

6. §, 1. pont. E pont alapvető eredményei lényegében egybeesnek azokkal a tételekkel, amelyeket (más terminológiában) E. SCHEIBE közölt először [50].

2. pont. A 6°. állítás, a 6. 1. és a 6. 2. tétel JU. P. GINZBURGtól származik [33] (vö. még H. LANGER [31] és E. SCHEIBE [50] munkáival). A 7°. állítást korábban E. SCHEIBE bizonyította be [50].

3. pont. Ezen pont eredményei alapjában véve JU. P. GINZBURGtól származnak [32], [33]. A J-térbeli maximális nemnegatív és nempozitív, valamint semleges alterek bizonyos kontrakciókkal való kapcsolatára vonatkozó, a mienkhez közeli ötleteket alkalmazott, kevésbé kialakult formában, R. S. PHILLIPS [29] disszipatív hiperbolikus rendszerek tanulmányozása során.

A nemnegatív alterekre ferdén vetítő E operátorokat H. LANGER vezette be [30], [31]; tőle származik a következő eredmény, amely a 6. 3. tétel következménye: *ahhoz, hogy az* E ($EP_+ = E$, $P_+E = P_+$) *vetítés értékkészlete maximális nemnegatív altér legyen, szükséges és elégséges az* $\|E\| \leq \sqrt{2}$ *egyenlőtlenség teljesülése.*

4. és 5. pont. A 6. 7. és a 6. 8. tételt JU. P. GINZBURG bizonyította be.

6. pont. A 10°. állítás és a 6. 9. tétel JU. P. GINZBURGtól származik. A 6. 9. tételnél kevésbé teljes állítást bizonyított be E. SCHEIBE [50], N. K. BARI elméletének felhasználása nélkül.

IRODALOM

[1] P. A. M. DIRAC: Bakerian lecture. The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc.* A **180** (1942), 1—40.

[2] W. PAULI: On Dirac's new method of field quantization, *Revs. Mod. Phys.* **15** (1943), 175—207.

[3] Л. С. Понтрягин: Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Известия АН СССР*, сер. матем. **8** (1944), 243—280.

[4] М. Г. Крейн, М. А. Рутман: Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *Успехи мат. наук* **3**, № 1 (1948), 3—95.

[5] М. Г. Крейн: Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений, *Успехи мат. наук* **3**, № 3 (1948), 158—160.

[6] И. С. Иохвидов: Унитарные и самосопряженные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, (диссертация). Одесса, 1950.

[7] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, *Труды Московского мат. общества* **5** (1956), 367—432.

[8] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн: Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II, *Труды Московского мат. общества* **8** (1959), 413—496.

[9] М. И. Вишик: Метод ортогональных проекций для общих самосопряженных уравнений, *Доклады АН СССР* **58** (1947), 957—960.
[10] R. NEVANLINNA: Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **113** (1952).
[11] R. NEVANLINNA: Über metrische lineare Räume. III. Theorie der Orthogonalsysteme, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **115** (1952).
[12] R. NEVANLINNA: Über metrische lineare Räume. IV. Zur Theorie der Unterräume, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **163** (1954).
[13] R. NEVANLINNA: Über metrische lineare Räume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **222** (1956).
[14] I. S. LOUHIVAARA: Bemerkung zur Theorie der Nevanlinnaschen Räume, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **232** (1956).
[15] I. S. LOUHIVAARA: Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **252** (1958).
[16] I. S. LOUHIVAARA: Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, ser. II, **5** (1956), 260—273.
[17] F. E. BROWDER: A remark on the Dirichlet problem for non-elliptic self-adjoint partial differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo.* **6** (1957), 249—253.
[18] F. E. BROWDER: On the Dirichlet problem for linear non-elliptic partial differential equations. II, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **7** (1958), 303—308.
[19] W. LITTMAN: Remarks on the Dirichlet problem for general linear partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 145—151.
[20] C. L. DOLPH: Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 1—69.
[21] I. S. LOUHIVAARA: Über verschiedene Metriken in linearen Räumen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **282** (1960).
[22] Ю. П. Гинзбург: О J-нерастягивающих оператор-функциях, *Доклады АН СССР* **117** (1957), 171—173.
[23] Ю. П. Гинзбург: О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве, *Научные записки физ.-мат. факультета Одесского пед. института* **22**, № 1 (1958), 13—20.
[24] Ю. П. Гинзбург: J-нерастягивающие аналитические оператор-финкции, (диссертация) Одесса, 1958.
[25] М. С. Лившиц: О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Мат. сборник* **34** (1954), 145—198.
[26] М. С. Бродский, М. С. Лившиц: Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *Успехи мат. наук* **13**, № 1 (1958), 3—85.
[27] М. С. Бродский: Характеристические матрицы-функции линейных операторов, *Мат. сборник* **39** (1956), 179—200.
[28] В. П. Потапов: Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, *Труды Московского мат. общества* **4** (1955), 125—236.
[29] R. S. PHILLIPS: Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1959), 193—254.
[30] Г. Лангер: О J-эрмитовых операторах, *Доклады АН СССР* **134** (1960), 263—266.
[31] H. LANGER: Zur Spektraltheorie *J*-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.* **146** (1962), 60—85.
[32] Ю. П. Гинзбург: О проектировании в гильбертовом пространстве с билинейной метрикой, *Доклады АН СССР* **139** (1961), 775—778.
[33] Ю. П. Гинзбург: О подпространствах гильбертова пространства с индефинитной метрикой, *Научные записки кафедр мат., физ. и естествознания Одесского пед. института* **25**, № 2 (1961), 3—9.
[34] K. BLEULER: Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen, *Helv. Phys. Acta* **23** (1950), 567—586.
[35] S. N. GUPTA: Theory of longitudinal photons in quantum electrodynamics, *Proc. Phys. Soc.*, A **63** (1950), 681—691.
[36] A. AHIJEZER, V. BERESZTYECKIJ: *Kvantum elektrodinamika*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1961.
[37] W. HEISENBERG: Hilbert space II and "ghost" states of Pauli and Källén, *Nuovo Cimento* **4**, suppl. No. 2 (1956), 743—747.

[38] G. Källén, W. Pauli: On mathematical structure of T. D. Lee's model of a renormalizable field theory, *Mat. Fys. Medd. Kgl. Danske Videnskab. Selskab.* **30**, No. 7 (1955).
[39] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов: К вопросу об индефинитной метрике в квантовой теории поля, *Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки*, № 2 (1958), 137—142.
[40] S. N. Gupta: Quantum mechanics with an indefinite metric, *Canad. J. Phys.* **35** (1957), 961—968.
[41] R. Ascoli, E. Minardi: On quantum theories with indefinite metric, *Nuclear Physics* **9** (1958/1959), 242—254.
[42] A. Uhlmann: Schema einer Quantenmechanik mit indefiniter Metrik, *Nuclear Physics* **9** (1958/1959), 588—595.
[43] A. Uhlmann: Über Quantentheorien mit indefiniter Metrik, *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ., Jena, Math.-naturwiss. Reihe* **8** (1958/1959), 361—366.
[44] L. K. Pandit: Linear vector spaces with indefinite metric, *Nuovo Cimento* **10**, suppl. No. 11 (1959), 157—182.
[45] K. L. Nagy: Indefinite metric in quantum field theory, *Nuovo Cimento* **17**, suppl. No. 1 (1960), 92—131.
[46] J. Bognár: A discontinuity property of the inner product in linear spaces with an indefinite metric, *II. Magyar Matematikai Kongresszus,* (Kiegészítés az előadáskivonatokhoz) Budapest, 1960, 8—10.
[47] Я. Богнар: Об одном явленин разрывности скалярного произведения в пространствах с индефинитной метрикой, *Успехи мат. наук* **17**, № 1 (1962), 157—159.
[48] И. С. Иохвидов: Регуглярные и проекционно-полные линеалы в пространствах с общей эрмитово-билинейной метрикой, *Доклады АН СССР* **139** (1961), 791—794.
[49] И. С. Иохвидов: Сингулярные линеалы в пространствах с произвольной эрмитово-билинейной метрикой, *Успехи мат. наук* **17**, № 4 (1962), 127—134.
[50] E. Scheibe: Über hermitische Formen in topologischen Vektorräumen. I, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, AI, **294** (1960).
[51] N. Bourbaki: *Espaces vectoriels topologiques,* Chap. I—II, Paris, Hermann, 1953.
[52] Ю. П. Гинзбург, И. С. Иохвидов: О новых результатах по геометрии и теории операторов в пространствах с общей индефинитной метрикой, *Труды IV-го Всесоюзного мат. съезда* (1962).
[53] G. Frobenius: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *J. Reine Angew. Math.* **84** (1877), 1—63.
[54] А. И. Мальцев: *Основы линейной алгебры,* Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1948.
[55] S. Banach: *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa, 1932.
[56] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман: *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве,* Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1950.
[57] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов: *Фукциональный анализ в нормированных пространствах,* Москва, Физматгиз, 1959.
[58] M. M. Day: *Normed linear spaces,* Berlin, Springer, 1958.
[59] Н. К. Бари: Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, *Учёные записки Московского гос. университета* 148, *Математика* **4** (1951), 69—107.
[60] Р. С. Гутер, П. Л. Ульянов: О новых результатах в теории ортогональных рядов, a következő kötetben: С. Качмаж, Г. Штейнгауз: *Теория ортогональных рядов,* Москва, Физматгиз, 1958.
[61] И. М. Гельфанд: Замечание к работе Н. К. Бари „Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”. *Учёные записки Московского гос. университета* 148, *Математика* **4** (1951), 224—225.
[62] И. С. Иохвидов: Унитарные операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Записки Научно-исследовательского института мат. и мех. Харьковского гос. университета и Харьковского мат. общества* **21** (1949), 79—86.
[63] J. Bognár: О существовании квадратного корня из оператора, самосопряжённого относительно индефинитной метрики, *A Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int.. Közl.* **6** (1961), 351—363.
[64] Ф. А. Березин: О модели Ли, *Доклады АН СССР* **143** (1962), 811—814.
[65] L. J. Savage: The application of vectorial methods to metric geometry, *Duke Math. Journ.* **13** (1946), 521—528.

Fordította: Bognár János