Gradus Vol 11, No 1 (2024)
ISSN 2064-8014

MÓDSZERTANI INNOVÁCIÓK ÉS ALKALMAZÁSAIK A SZÍVGÖRBE PROJEKT ALAPÚ TANULÁSÁBAN

METHODOLOGYCAL INNOVATIONS AND THEIR APPLICATIONS IN PROJECT-BASED LEARNING OF THE CARDIOID CURVE

Szilágyi Szilvia[1]*, *Körei Attila*[2]

[1]Analízis Intézeti Tanszék, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolci Egyetem, Magyarország
[2]Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Miskolci Egyetem, Magyarország
https://doi.org/10.47833/2024.1.CSC.006

Kulcsszavak:
Szívgörbe,
Epiciklois,
Projekt alapú tanulás,
Z generáció,
Oktatási robotok

Keywords:
Cardioid,
Epicycloid,
Project-based learning,
Generation Z,
Educational robotics

Cikktörténet:
Beérkezett 2023. július 25.
Átdolgozva 2023. december 12.
Elfogadva 2024. január 22.

Összefoglalás

A síkgörbék változatos világának egyik érdekes alakzata az epicikloisok családjába tartozó szívgörbe. Gyakorlati alkalmazásai miatt ma is a figyelem középpontjában van, ezért választottuk a STEAM alapú hallgatói projektek egyik vezérmotívumának. A Z generációs fiatalok tanulási igényeinek megfelelően a hallgatók közvetlen kísérleti tapasztalatokat szereztek egy szakszemináriumon, ahol tanulmányoztak és teszteltek egy olyan oktatási robotot, amelyet a kardioid rajzolására terveztünk. Ezt követően projekt alapú tanulás keretében - a Desmos dinamikus geometriai szoftver felhasználásával - a kardioid érdekes tulajdonságaihoz kapcsolódó feladatokra készítettek animált megoldásokat. Cikkünkben bemutatjuk a STEAM alapú módszertan lépéseit, a rajzoló robotot és a projektfeladatokat, valamint a hallgatók által kitöltött véleményező kérdőívek összesített eredményeit.

Abstract

One of the most interesting shapes in the varied world of two-dimensional plane curves is the cardioid, which belongs to the family of epicycloids. Its practical applications have kept it in the spotlight today, so it was chosen as one of the leitmotifs for STEAM-based student projects. In response to the learning needs of Generation Z youth, students gained direct experimental experience in a professional seminar where they studied and tested an educational robot designed to draw the cardioid. Then, through project-based learning, they created animated solutions to problems related to interesting properties of the cardioid using the Desmos dynamic geometry software. In this article, we present the steps of the STEAM-based methodology, the drawing robot and project tasks, as well as the aggregated results of the student opinion questionnaires.

*Kapcsolattartó szerző. Tel.: +36 20 356 0518
E-mail cím: szilvia.szilagyi@uni-miskolc.hu

1. Bevezetés

A szív alakú kardioid görbe évszázadok óta foglalkoztatja a matematikusokat tulajdonságai, grafikonjának szépsége és gyakorlati alkalmazásai miatt [1, 2, 3]. A kardioid a matematika számos, látszólag különböző területén megjelenik, fontos szerepet játszik például a fraktálgeometriában, a híres Mandelbrot-halmaz központi alakja is egy szívgörbe [2]. Kardioid alakzatok jelennek meg a fonal egyenletes rétegezését biztosító tekercseken és orsókon a textiliparban, valamint a rádióantennák egyik típusának jelerősség-mintázatában [4]. A kardioid antenna nevét a sugárzási nyaláb alakjáról kapta. Jellemzően egysávos antenna, amelyet leggyakrabban a földi kommunikációban használnak [5]. A kardioid formát tartalmazó fraktálok használata az antennákban lehetővé teszi az összes kereskedelmi frekvenciasáv lefedését az 1,8-30 GHz-es frekvenciatartományban, miközben az antenna kis mérete megmarad a fraktálok térkitöltő képességének köszönhetően, ezért a fraktál antenna felhasználható az energiabegyűjtő rendszerekben, valamint a IoT, WLAN, mobil MIMO és műholdas kommunikációs rendszerekben és radarokban is [6]. Parallel módon a kardioid a hangtechnikában is jelentős szereppel bír. Ha a hangmérnököknek egyirányú mikrofonra van szükségük - olyanra, amely nagyon érzékeny a közvetlenül a mikrofon előtt képződő hangokra, és kevésbé érzékeny a mellette vagy mögötte létrejövőkre, akkor kardioid iránykarakterisztikájú mikrofont használnak [5, 7]. A kardioid antennák és mikrofonok széles körű, jól szemléltethető gyakorlati felhasználása didaktikai szempontból nézve kiváló lehetőséget jelent az informatikai alapszakok hallgatóinak motiválására, a figyelem felkeltésére a kardioid érdekes tulajdonságai iránt.

Nincs biztos adat arról, hogy ki fedezte fel a kardioidot. Írásos emlékek bizonyítják, hogy 1637-ben Étienne Pascal műkedvelő matematikus - Blaise Pascal apja - vizsgálta a kardioid általánosabb esetét, a limaçont, de konkrétan a kardioidot nem. 1674-ben Ole Rømer dán csillagász a kardioidot is fontolóra vette, amikor a fogaskerekek optimális fogazatának formáját kereste, ezért több forrás neki tulajdonítja a felfedezés érdemét [2, 8]. A kardioidot, mint epicikloist 1691-ben Jacob Ozaniaill vizsgálta, ezután már számos neves matematikus munkásságában felbukkan. Bernoulli, L' Hospital, Maclaurin, Cramer és még sokan mások is foglalkoztak a kardioiddal [9]. 1708-ban Philippe de la Hire számította ki először a kardioid ívhosszát [2]. Elnevezése a görög szív szóból származik. Érdekes módon viszonylag későn, csak 1741-ben kapta sokatmondó nevét ez a görbe, amikor Johann Castillon a Royal Society Philosophical Transactions című folyóiratban megjelent értekezésében nevet adott neki [2].

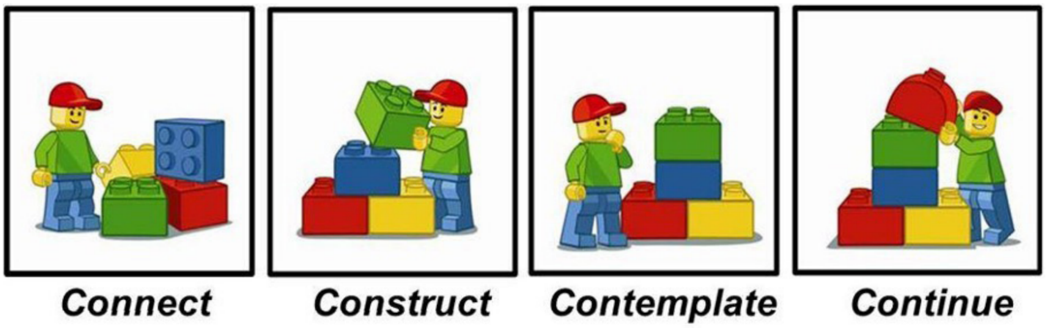
Az ívhossz és a görbe által közrezárt véges síkrész területének mérőszáma azok a numerikus jellemzők, amelyek a számolási feladatokban az informatikai alapszakokon tanuló hallgatók Matematikai analízis II. kurzusának gyakorlatain szerepelnek. A szívgörbe esetén általában a polárkoordinátás egyenlet felhasználásával írjuk fel a megfelelő határozott integrálokat és ritkán kerül sor a paraméteres egyenletrendszer megadására, használatára. A műszaki és mérnöki felsőoktatáshoz javasolt modern tankönyvek is ezt az irányt erősítik [4]. Cikkünkben a kardioid származtatásához többféle megközelítést alkalmazunk, a legtöbb esetben a görbe paraméteres egyenletrendszerével dolgozunk azért, hogy a Desmos grafikus számológép nyújtotta lehetőségekkel bemutassuk a kardioid érdekes tulajdonságait. Didaktikai szempontból fontosnak tartjuk egy adott témakör minél többféle megközelítését, hiszen a konstruktivista pedagógia szerint a megértés, a tudás felépítése rendkívül összetett folyamat, amelyhez széles spektrumú, a hallgatók igényeihez igazodó oktatói módszertani repertoár szükséges [10]. Napjainkra számos különböző virtuális megvalósítási lehetőség közül választhatunk a paraméteres megadású görbék szemléltetésére, azonban a közvetlen tapasztalatszerzés élményét a dinamikus geometriai szoftverek nem tudják megadni. Kísérleti úton kardioidot a legegyszerűbben zseblámpa segítségével egy csészében tudunk előállítani [11, 12], ekkor azonban csak magát a görbét kapjuk eredményül, a keletkezését nem érzékeli a szemünk. Az oktatási robotika viszont lehetőséget ad arra, hogy egy könnyen programozható robottal a generálás elvének megfelelően rajzoljuk meg a görbét. Ekkor jól láthatóan nyomon követhető az a folyamat, amelynek végeredménye egy tökéletes szívgörbe.

Az informatikai alapszakok hallgatói választott szakjuknak megfelelően természetes módon élénk érdeklődést mutatnak mind a robotika, mind az infokommunikációs eszközök használata iránt. A kardioid görbe titkainak felfedezéséhez ezért olyan módszertant dolgoztunk ki számukra, amelyben a frontális oktatási formát kombináltuk a probléma-alapú tanulással, az oktatási robotikával és dinamikus geometriai szoftver használatával projekt alapú tanulás során. Cikkünkben részletesen bemutatjuk a módszertan összetevőit és felépítését, valamint röviden ismertetjük az első éles tesztelés kvalitatív eredményeit.

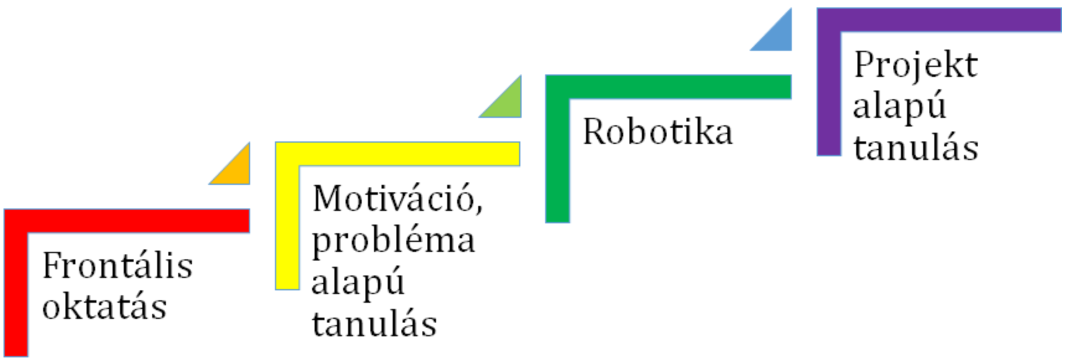
2. A módszertan elemei

A probléma-alapú tanulás elterjedése annak a felismerésnek a következménye, hogy a tanulóknak minimális ismeretük marad a hagyományos, frontális oktatási módszereken nyugvó tanulást követően és a megszerzett ismereteket nehezen tudják más összefüggésekben alkalmazni. A probléma-alapú tanulás olyan tanulási környezetet biztosít, amelyben a tanulók felhasználhatják és megerősíthetik az előzetes tudásukat, élet-közeli összefüggésekben tanulhatnak és egyéni vagy kiscsoportos munkában fejleszthetik tudásukat [13]. Az oktatási robotika hosszú évek óta eredményesen alkalmazott eszköz a tanulás élményszerűvé tételére és a hatékonyság növelésére [14, 15]. Nem új ötlet az oktatási robotika probléma-alapú tanulással való kombinálása, a LEGO Education robotkészletekhez (WeDo 2.0, EV3, SPIKE Prime, SPIKE Essential) fejlesztett oktatási szoftverek felépítésének is szerves részét képzik olyan tanulói projektek, amelyek lényegében probléma-alapú tanulást valósítanak meg. Ezek a projektek azonban témájukat tekintve az alapvető fizikai, biológiai és társadalomtudományi ismeretekre fókuszálnak, valamint a robotprogramozási fogások elsajátítására. Ahhoz, hogy a felsőoktatásban célzottan alkalmazhassuk a STEAM alapú módszertant, saját fejlesztésű robotkonstrukciók kialakítása szükséges, valamint a hozzájuk tartozó hallgatói projektek felépítése. A LEGO robotkészletekhez javasolt STEAM projektek a 4C módszertan elvét alkalmazzák [16, 17]. A LEGO filozófiája szerint eredményes tanulás holisztikus megközelítéssel érhető csak el, mert a tanulásnak egyaránt van kreatív, kognitív, szociális és érzelmi aspektusa is. A 4C (Connect, Construct, Contemplate, Continue) elv biztosítja a felsorolt képességek fejlesztését, a tananyag mélyebb beépülését (1. ábra). Az első C (Connect) a téma felvetésének, a tisztázó kérdések megbeszélésének és a kíváncsiság felkeltésének szakaszát jelöli. A második C (Construct) az építés és a programozás, vagyis az alkotás szakaszára utal. A harmadik C (Contemplate) a tapasztalatok összegzésének és a tanultak másokkal való megosztásának szakaszára vonatkozik. Erre a lépésre nagy hangsúlyt fektet a 4C módszertan, mert itt történik a szintetizálás, a tudáselemek összekapcsolódása. A negyedik C (Continue) folytatásra ösztönöz, a témához kapcsolódó új feladatok keresésére és megoldására, amelyek az előzőekben megtanultakra építenek. A 4C modell eredményességét számos kutatás támasztja alá, a vizsgálatokat a 6-14 éves korosztály körében végezték [16, 17].

A 4C elv a generációs váltás miatt a felsőoktatásban is alkalmazható. A kardioiddal kapcsolatos tananyag feldolgozására olyan módszertani modellt javaslunk, amely a 4C elvre épül (2. ábra). A négylépcsős modell első eleme a frontális oktatás (előadás és gyakorlat), itt hangzik el az elméleti anyag, amely a paraméteres és polárkoordinátás megadású görbéket tárgyalja. Tény, hogy a frontális



1. ábra. A 4C módszertani modell elemei. (Forrás: Joosten, 2018) oktatás hátrányairól számos tanulmány készült az utóbbi két évtizedben, azonban a felsőoktatásban továbbra is ez az oktatási módszer dominál. Nagy létszámú kurzusoknál nem feltétlenül kell lemondani róla, viszont érdemes kiegészíteni olyan technikákkal, ahol a hallgatók nem passzív résztvevők [18]. Bizonyított, hogy az előadások hatékonyak lehetnek az információközlésben, az érvelés modellezésében és a tanulók motiválásában. Ezért, ha az előadások más tevékenységekkel megfelelően támogatottak, akkor a matematikaoktatás hatékony részét képezik [19]. Az elméleti alapozás után szakszemináriumon folytatható a kardioid témájának tárgyalása, ahol a második lépcsőben elkezdődhet a 4C elvnek megfelelő munka. A problémafelvetés a kardioid görbe előállításának lehetőségét vizsgálja kísérleti úton, ezt követi a harmadik lépcsőben a STEAM alapú módszerek használata: a rajzoló robot építése és programozása, valamint a robot működési elvének megértése. A szintetizálásra egy olyan projektfeladat megoldásán keresztül adunk lehetőséget, ahol a robot működési elvét modellező animáció készítése a feladat, azonban a pontonként előállítandó szívgörbe egy fraktálban található. A projekten önállóan vagy csoportosan is dolgozhatnak a hallgatók, így a tapasztalatcsere és a tudásmegosztás megvalósulhat. A folytatásra a negyedik lépcsőben, tanórán kívüli környezetben adunk lehetőséget olyan projektfeladatok kitűzésével, amelyekhez a Desmos dinamikus geometriai szoftver használatát javasoljuk. Az első kísérlet során a megoldásokat kreatív, egyéni ötletekkel ellátva vártuk és az egyedi megvalósításokat az értékelésnél is figyelembe vettük. Erős motivációt adott a hallgatóknak, hogy a megoldásokra kapott pontok beleszámítottak a félévi értékelésbe.



2. ábra. A szívgörbe tulajdonságainak tanulásához kidolgozott 4C alapú módszertan lépcsői

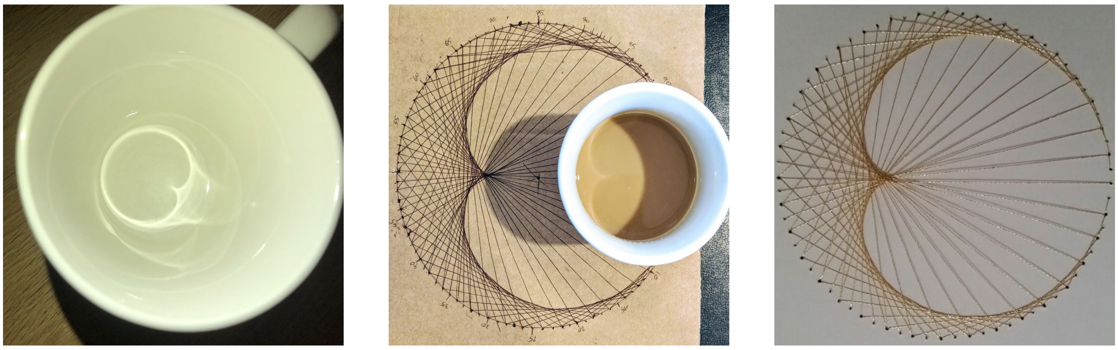
A szívgörbe rajzolásához kidolgozott módszertant az alábbiakban a második lépcsőtől kezdődően, a 4C elv lépéseit felhasználva mutatjuk be.

2.1. Kapcsolódás - Connect

Az elméleti előadást követő szemináriumon a kapcsolódást érdemes legalább kétféle aspektusból megvalósítani. Az egyik a kardioid megjelenítése kausztikus görbeként, a másik pedig a kettős generálási tulajdonság tényének felelevenítése és bemutatása. A Desmos grafikus számológéppel készített animációk jól támogatják a szívgörbe kétféle előállításának vizuális reprezentálását.

2.1.1. Kardioid a csészében

A kardioid oktatásával foglalkozó szakirodalomban a kausztikus tulajdonságot igazoló csészés kísérlet szinte kivétel nélkül szóba kerül [11, 12], mert minimális eszközigénnyel bír és könnyen végrehajtható. Nemcsak üres csészével végezhető (3.(a) ábra), hanem folyadék is lehet benne, például kávé vagy tea felületén is megjeleníthető a szívgörbe (3.(b) ábra). A mobiltelefonok zseblámpa funkciójával egyszerűen kialakítható a kardioid, ha a csésze pereme felől történik a megvilágítás, a fénykép pedig egy másik telefonnal elkészíthető, tehát néhány perc alatt jó minőségű fotónk lehet a szívgörbéről. Ezzel a kísérlettel azt igazoljuk, hogy a kör esetében a kausztikus görbe szívgörbe, ha a fénysugarakat a kör egy rögzített pontjából bocsátjuk a görbére,



(a) Üres csészében. (b) A fénysugarak útja. (c) Fonálművészet.

3. ábra. Kardioid előállítása a kör kausztikus görbéjeként.

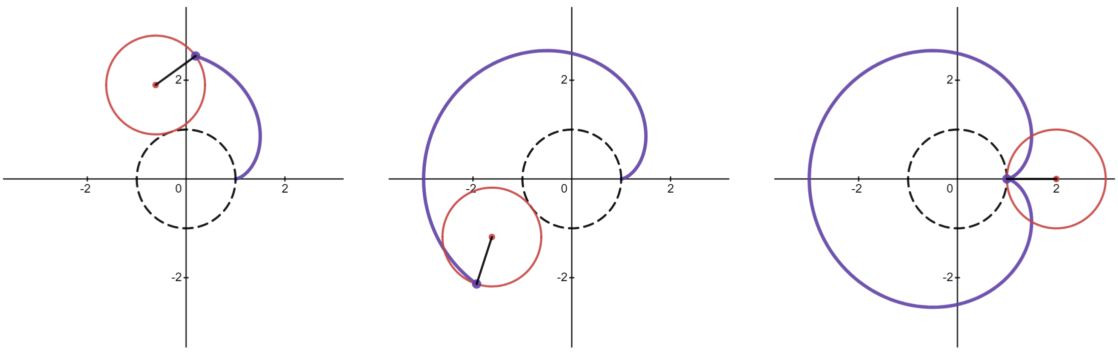
ahonnan azok a fizika törvényeinek megfelelően visszaverődnek (3.(b) ábra). A kardioidot ekkor egyenesek burkológörbéjeként kapjuk meg, azonban a csészében csak a kausztikus görbe látható, az egyenesek (a fénysugarak) nem. A fonálművészetben gyakran alkalmazzák a kausztikus görbe előállításának elvét, ahol cérnával modellezik az egyeneseket [20], s így nemcsak a burkológörbe látható, hanem az egyenesek (szakaszok) is (3.(c) ábra). Egyszerűsége miatt a csészés kísérlet jó választás az érdeklődés felkeltésére, azonban a hozzá kapcsolódó jelenség feltárását és megoldását érdemes a szeminárium végére helyezni, amivel kialakítjuk a keretes szerkezetet és így a teljesség érzését biztosítjuk a résztvevők számára.

2.1.2. A kettős generálási tétel

A szívgörbe (kardioid) meglepően sokféle módon származtatható. Leggyakrabban epicikloisként definiáljuk: a kardioid olyan síkbeli görbe, amelyet egy adott r sugarú kör kerületén lévő rögzített pont követ, ha a kör csúszás nélkül gördül egy ugyancsak r sugarú rögzített kör mentén [8, 21]. A 4. ábrán látható szívgörbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(2\cos t - \cos 2t) \\ y(t) &= r(2\sin t - \sin 2t), \end{aligned} \tag{1}$$

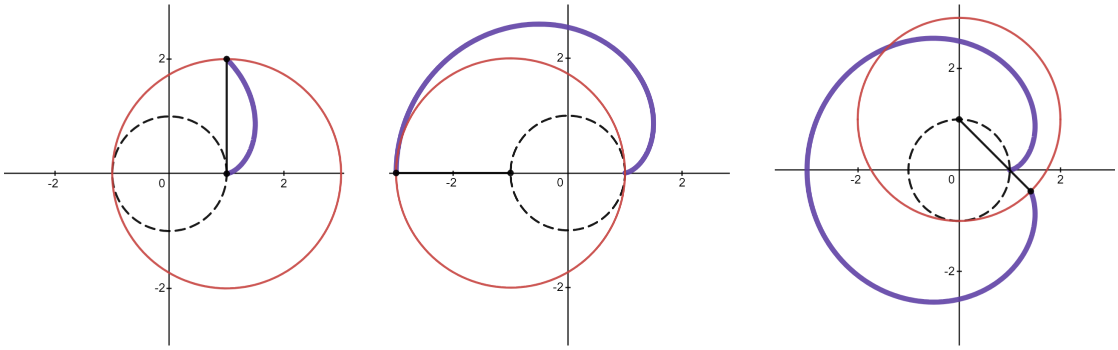
ahol $t \in [0,2\pi]$. Az (1) egyenletrendszer levezetése a [8] forrásban megtalálható.



(a) $t = \frac{3\pi}{5}$. (b) $t = \frac{6\pi}{5}$. (c) $t = 2\pi$.

4. ábra. A kardioid származtatása epicikloisként $r = 1$ esetén.

Általában csak az epicikloisok felől közelítjük meg a kardioidot a görbéket tárgyaló előadáson és nem kerül szóba a többi lehetőség. Pedig a kettős generálási tulajdonság miatt a kardioid hipocikloisként is megadható (5. ábra): a szívgörbe egy $R = 2r$ sugarú kör kerületén lévő pont nyomvonala, ahol a kör egy r sugarú rögzített körön "belül" gördül csúszás nélkül [8]. A kettős generálás könnyen szemléltethető látványos Desmos-animációk készítésével.



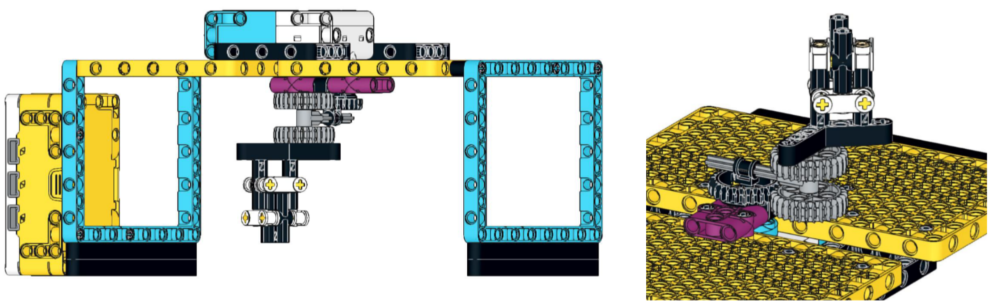
(a) $t = \pi$.　　(b) $t = 2\pi$.　　(c) $t = \dfrac{7\pi}{2}$.

5. ábra. A kardioid származtatása hipocikloisként $r = 1, R = 2r = 2$ esetén.

2.2. Alkotás - Construct

A csészével végzett kísérlet alapján természetesen adódik a kérdés, hogyan tudjuk nagy pontossággal megrajzolni a szívgörbét? Újabb közvetlen tapasztalatszerzésre adunk lehetőséget, ha a STEAM alapú oktatás előnyeit felhasználva az oktatási robotikát választjuk a szívgörbe megrajzolására. A rajzoló robotot a LEGO Education SPIKE Prime Core Set (45678) és a LEGO Education SPIKE Prime Expansion Set (45681) készletekből építettük, működési elve a szívgörbe előállításának epicikoisként való létrehozását követi. A mozgó kört modellező fogaskereket egy közepes motorral forgatjuk, amely egy ugyanolyan méretű rögzített fogaskeréken gördül (6. ábra), így biztosítjuk a csúszásmentes gördülést. A robothoz részletes építési útmutatót készítettünk a Studio 2.0 szoftverrel (6.(a) ábra). Az alaprobot építéséhez 28 mm átmérőjű dupla, mindkét oldalán lecsapott fogakkal ellátott fogaskerekeket (46372) használtunk a mozgó körök, és ugyanilyen méretű forgótányért (LEGO Turntable, 4652236) a fix kör modellezésére (6.(b) ábra). A gördülő fogaskereket a motor forgatja, az összekapcsoláshoz fokozatmentesen állítható tengelyt alkalmaztunk, hogy a fogaskerekek cseréje könnyen megvalósítható legyen az átépítés során. A filctollat a mozgatott fogaskerék egy kerületi pontjához kell rögzíteni. A rajzolófej precíz elhelyezésének és stabil szerelésének megoldásához megdupláztuk a gördülő fogaskereket. Ezzel az építési verzióval több ponton rögzíthető a filctollat tartó fej egy LEGO Technic kar felhasználásával.

A rajzoló robotot egyszerű programmal működtetjük: a motor egyetlen körbefordítása a szívgörbét eredményezi. A robot rövid idő alatt, könnyen megépíthető a LEGO Education SPIKE Prime (45678) készletből, a forgótányér kivételével minden elem megtalálható az alapkészletben. Kisebb, legfeljebb 3-4 fős hallgatói csoportokkal érdemes dolgozni az építés és a tesztelés során.

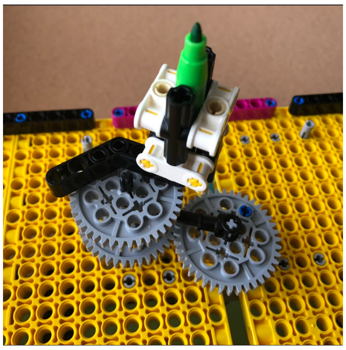


(a) A robot.　　(b) A rajzolófej.

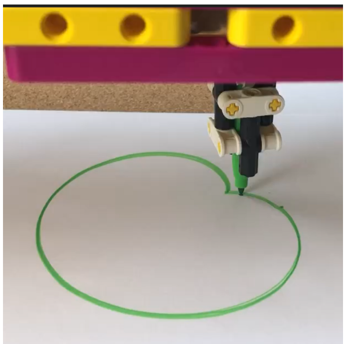
6. ábra. Kardioidot rajzoló LEGO Education SPIKE Prime robot.

Különböző méretű kardioidok a robot átépítésével, a fogaskerekek cseréjét követően rajzolhatók. A 7. ábrán 40 foggal ellátott LEGO Technic fogaskerekeket (364902) használtunk az építéshez.

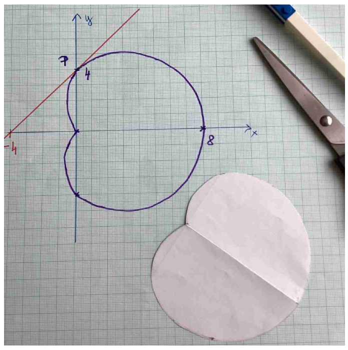
Ekkor a forgatáshoz használt tengely elhelyezését másképpen kell megoldani, mint a forgótányér használatakor (7.(a) ábra).



(a) Átépítés után.



(b) Robottal rajzolt szívgörbe.



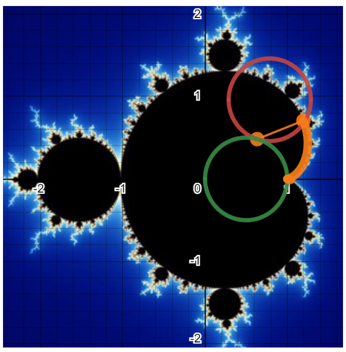
(c) Sablonnal rajzolt szívgörbe.

7. ábra. Kardioid rajzolása LEGO SPIKE Prime robottal, 40 fogú fogaskerékkel.

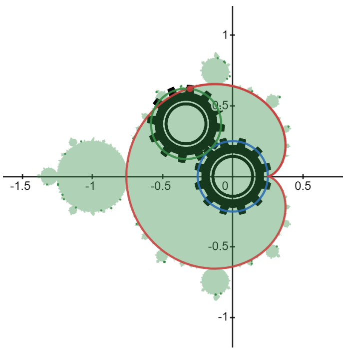
A robottal rajzolt kardioid (7.(b) ábra) alapján sablon készíthető, ami a koordináta-rendszerben tetszőlegesen elhelyezhető (7.(c) ábra). A 40-es fogaskerék használata azért előnyös, mert a megrajzolt szívgörbe kerületi pontjaiból a csúcsponton áthaladó húrok hossza egész értékű, 8 cm. A sablonnal rajzolt speciális helyzetű kardioidok paraméteres egyenletrendszere könnyen felírható, a terület és a kerület értékei számolhatók, a görbéhez húzott érintők megadhatók, és a Desmos grafikus számológéppel ellenőrizhetők. A sablont érdemes megtartani és a kardioidhoz kapcsolódó feladatok esetén a szemeszter további részében a szívgörbe rajzolásához felhasználni.

2.3. Szintetizálás - Contemplate

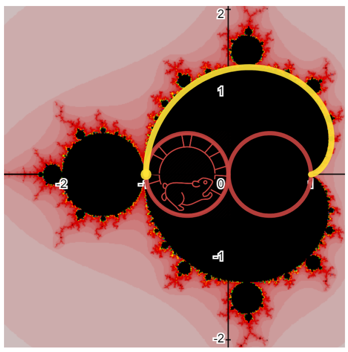
A fraktál szót 1975-ben Benoit Mandelbrot matematikus alkotta meg olyan alakzatok halmazának leírására, amelyek végtelenül összetett önhasonló formáiban ismétlődés fedezhető fel. A fraktálokat ábrázoló káprázatos, számítógép által generált képek felkeltik a figyelmet és jobban motiválják a tanulók érdeklődését a matematika iránt, mint bármely más matematikai felfedezés az elmúlt évszázadban [2]. A kardioiddal kapcsolatos ismeretek összegzéséhez projektfeladatként a Mandelbrot-halmazban látható kardioid generálást kellett megvalósítani a hallgatóknak animáció készítésével, ahol körök egymáson való gördülése eredményezi a szívgörbe pontjait. A Mandelbrot-halmaz megjelenítésére két megoldást javasoltunk. Az elsőben képként kerül betöltésre a Mandelbrot-halmaz, ami tetszőlegesen pozicionálható (8.(a) és (c) ábra). A második esetben a Desmosban generálódik a fraktál, az iterációhoz vezető utat a hallgatók megkapták (8.(b) ábra). A feladat lényegi részét a központi alakzat körök felhasználásával történő generálása jelentette. Tekintettel arra, hogy különbözők voltak a kiindulási kardioidok, más-más megoldások születtek (8.



(a) Háttérkép megadásával.



(b) Iterációval.



(c) Egy kreatív megoldás.

8. ábra. A Mandelbrot-fraktál kardioidja hallgatók által készített megoldásokban.

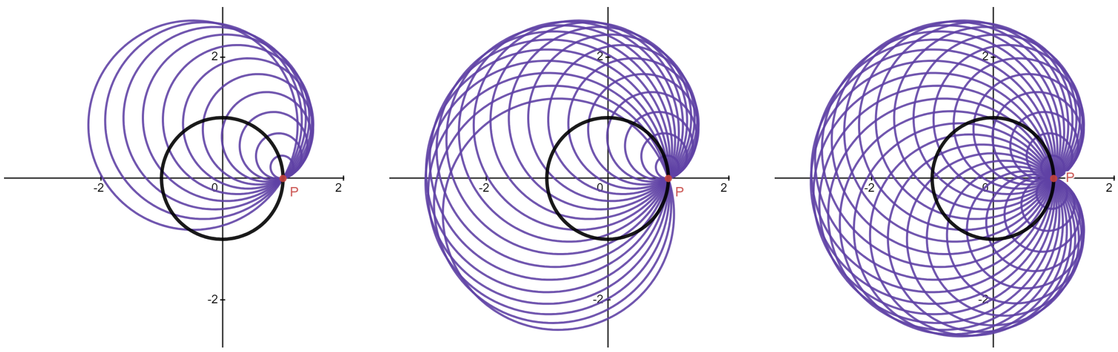
ábra). A szakszeminárium jelentős támogatást nyújtott a feladat megoldásához, mert lényegében a robot működését kellett animációval modellezni, ehhez valamennyi ismeretanyag átadásra került, továbbá a kettős generálási tétel bemutatásakor animációként is látták a hallgatók a kardioid előállítását úgy epi-, mind hipocikloisként. A robottal való szemléltetés eredményességére utal, hogy a megoldások között volt olyan, ahol a fogaskerekek megjelentek az animációban (8.(b) ábra).

2.4. Folytatás - Continue

A Desmos dinamikus geometriai szoftverrel megoldható érdekes, elsősorban a kardioid megjelenítésére fókuszáló projektfeladatok kitűzésével valósítottuk meg a módszertan utolsó lépcsőjét. Az alábbi feladatokban a kardioidot burkológörbeként állítjuk elő, először kör-, majd ezt követően egyenesseregek felhasználásával. A görbeseregek megjelenítésekor többféle animálási lehetőség készítésére nyílik mód, leggyakrabban azt használjuk, amikor egyesével jelennek meg egymás után a görbesereg tagjai. Az animációk közös tulajdonsága a lista alkalmazása. A hallgatók az attraktív megoldások elkészítésekor a kardioid olyan tulajdonságaival is megismerkednek, amelyek túlmutatnak az ütemtervben előírt alapismereteken. A projektfeladatok megoldása során felmerülő kérdésekre online konzultáció során adtunk válaszokat.

2.4.1. Körök burkológörbéje

Ha rögzítünk a síkon egy kört és ennek egy P pontját, majd tekintjük azokat a köröket, amelyek középpontja a rögzített körön van és átmennek a P ponton, akkor ezeknek a köröknek a burkolója éppen egy kardioid [21]. A keletkező kardioid átmérője kétszerese a rögzített kör átmérőjének és a csúcspontja a P pontban van. A 9. ábra elkészítése során 34 lépéses iterációval állítottuk elő a kardioidot a Desmos grafikus számológép segítségével. Ennek a szívgörbének ugyancsak (1) a paraméteres egyenletrendszere $r=1$ választással, mert az $x^2+y^2=1$ kört és a $P(1{,}0)$ pontot rögzítettük.



(a) Az iteráció 11. lépése. (b) Az iteráció 20. lépése. (c) Az iteráció utolsó lépése.

9. ábra. A kardioid származtatása körök burkológörbéjeként.

2.4.2. Evolúta és evolvens

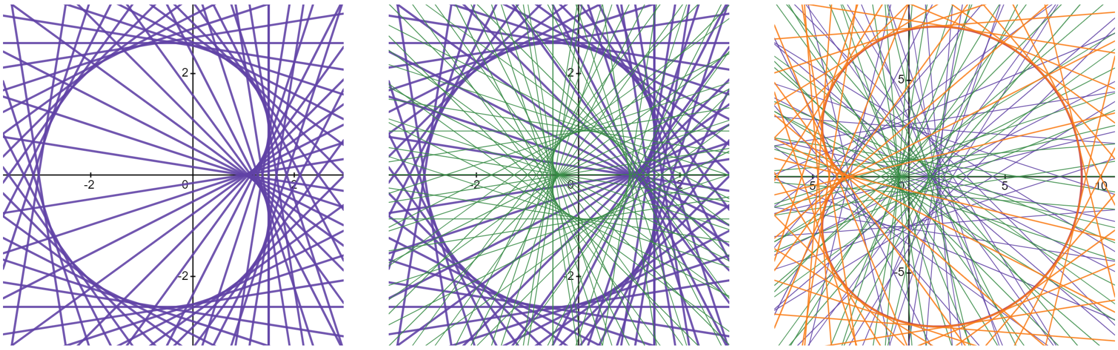
Az érintők vizsgálatához több egyszerű hallgatói projekt is megfogalmazható. Látványos ábrát kapunk, ha a vizsgált kardioidhoz lista felhasználásával adjuk meg az érintő egyeneseket (10.(a) ábra). Amennyiben az érintési pontokban a normális egyeneseket is elkészítjük, akkor a kardioid evolútája (görbületi pontjainak halmaza) rajzolódik ki, ami egy ellentétes állású kardioid (10.(b) ábra). Az evolúta paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}r(2\cos t+\cos 2t) \\ y(t) &= \frac{1}{3}r(2\sin t+\sin 2t), \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $t \in [0,2\pi]$, ha az (1) egyenletrendszerű kardioidból indulunk ki. Ha adottak a g_1 és g_2 síkgörbék és a g_2 görbe g_1-nek evolútája, akkor g_1 a g_2-nek evolvense [22]. Komplexebbé tehetjük az előző feladatot, ha azt a kardioidot is vázoljuk az érintők megadásával, amelynek éppen az (1) egyenletrendszerű kardioid az evolútája, vagyis az evolvenst. Azonnal adódik, hogy ekkor az

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3r(2\cos t + \cos 2t) \\
y(t) &= 3r(2\sin t + \sin 2t),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$t \in [0,2\pi]$ paraméteres egyenletrendszerű kardioidhoz kell érintőket húzni. A 10.(c) ábra elkészítéséhez 51-re csökkentettük az iterációk számát, hogy mindhárom kardioid jó látható legyen.



(a) 61 elemű listával generált érintők.

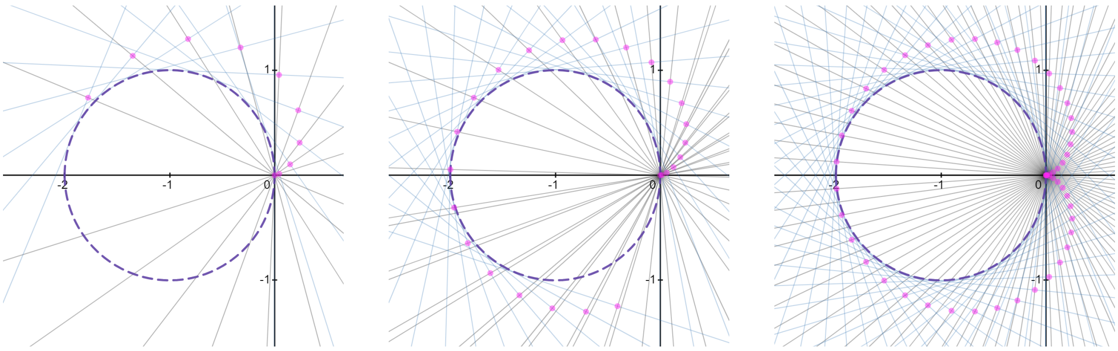
(b) A kardioid evolútája.

(c) A kardioid evolvense és evolútája.

10. ábra. A kardioid érintői és nevezetes görbéi $r = 1$ esetén.

2.4.3. Talpponti görbe

A kardioidhoz eljuthatunk úgy is, hogy vizsgáljuk a kör egy kerületi pontjának a talpponti görbéjét, vagyis egy rögzített kerületi pontból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak geometriai helyét [23]. Az $r = 1 - \cos\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$ kardioidhoz az $(x+1)^2 + y^2 = 1$ körből indulunk ki és az origó talpponti görbéjeként állítjuk elő (11. ábra).



(a) Az iteráció 10. lépése.

(b) Az iteráció 25. lépése.

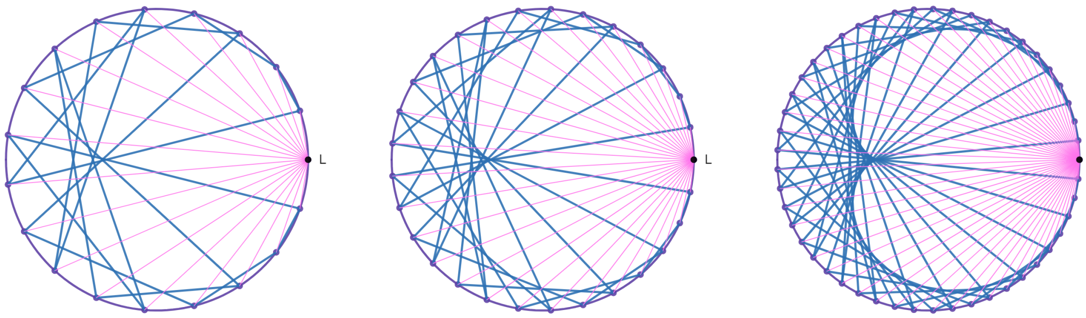
(c) Az iteráció utolsó lépése.

11. ábra. 50 elemű listával generált talpponti görbe.

2.4.4. Kausztikus görbe

Az evolvenshez és az evolútához hasonlóan más görbék is definiálhatók úgy, hogy egy adott görbéből indulunk ki és ahhoz kapcsoljuk az új görbét. A kausztikus görbe a g görbe által egy adott pontszerű fényforrásról visszavert fénysugarak burkológörbéje. Ha a g görbe kör, akkor a kausztikus görbe lehet szívgörbe, amennyiben az adott pont illeszkedik a körre [12]. Ezt az optikai tulajdonságot láttuk, amikor a mobiltelefon zseblámpájával megvilágítottuk a fehér csészét oldalról.

A fény visszaverődött a csésze oldaláról és a pohár alján megjelent a szívgörbe (3. (a) ábra). Tehát, ha a kör egy L pontjából kiinduló egyeneseket rajzolunk és hagyjuk, hogy ezek visszaverődjenek a körvonalról úgy, hogy a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel, akkor a kardioid ezen egyenesek burkológörbéje (12. ábra).



(a) 20 elemű listával. *(b) 30 elemű listával.* *(c) 50 elemű listával.*

12. ábra. A kardioid előállítása kausztikus görbeként a Desmos grafikus számológéppel.

3. Az első kísérlet eredményei

A négylépcsős módszertan kipróbálását követően a résztvevők WEB alapú, anonim kérdőívet töltöttek ki, amely 3 kérdést tartalmazott a kardioid innovatív tanulási technikájával kapcsolatban. 5 fokozatú Likert-skálán jelölték be a válaszadók a kérdésekkel kapcsolatos attitűdjüket. Az 1-es érték az abszolút ellenkezést, míg az 5 a teljes egyetértést jelentette. 26 válasz érkezett a kérdőívre. A résztvevők 84,6%-a ítélte úgy, hogy a szakszemináriumon bemutatott rajzoló LEGO SPIKE Prime robotok a kardioidhoz kapcsolódó matematikai ismeretek elsajátításában jelentős támogatást nyújtottak számukra. Ugyanennyien jelentették ki, hogy a szívgörbéhez kapcsolódó, dinamikus geometriai szoftver használatát igénylő projektmunkákon szívesen dolgoztak és legalább 2 órát töltöttek a megoldások elkészítésével. Arra a kérdésre, hogy a jövőben is részt vennének-e a síkbeli görbék elméletéhez kapcsolódó oktatási robotikával kombinált szakszemináriumon a hallgatók 96,2% adott 4-es vagy 5-ös értéket.

Tapasztalataink szerint az informatikai alapszakok hallgatói a dinamikus geometriai szoftverekkel megoldható projektmunkákon lelkesen dolgoznak, az animációk készítésével kapcsolatos ötleteket megosztják egymással, ugyanakkor egyéni jellemzőkkel is igyekeznek felruházni a benyújtásra kerülő megoldásokat. Szabadidejükből is jelentős mennyiséget áldoznak fel a feladatokkal való foglalkozásra, mert az érdeklődési körükhöz tartozó eszközökkel dolgozhatnak, továbbá látványos megoldásokat, animációkat készíthetnek. A jövőben tervezzük egy olyan kísérlet megvalósítását, ahol kvantitatív méréssel is bizonyítani tudjuk a módszertan hatékonyságát.

4. Összegzés

Cikkünkben egy új, STEAM-alapú módszereket is alkalmazó tanítási-tanulási technikát mutattunk be, amely a szívgörbe tulajdonságainak felfedezésére használható informatika alapszakos hallgatók esetén. A felsőoktatás hagyományaihoz tartozó frontális tanítást kiegészítettük a hallgatók generációs igényeinek megfelelő oktatási formákkal: a probléma-alapú tanulással, STEAM-alapú módszerek integrálásával és a projekt alapú tanulással. A négylépcsős módszertan változatos didaktikai megoldásokat használ, mert minden lépcsőben más-más típusú tanulási technika alkalmazásával teszi érdekessé, motiválóvá és eredményessé a tanulási folyamatot. Az első tesztelés során csupán hallgatói kérdőívek kitöltésével szereztünk mérési adatokat. Az eredmények határozottan azt mutatták, hogy a hallgatók igénylik azokat az új módszertani megoldásokat, amelyek segítik őket az aktív tanulás megvalósításában. Terveink között szerepel további nevezetes síkgörbék esetén analóg struktúra létrehozása és megvalósítása, mert az oktatási robotika olyan innovatív lehetőségeket kínál, amelyet a matematikai analízis bizonyos fejezetei esetén érdemes fontolóra venni a tanítási folyamat tervezésekor.

Köszönetnyilvánítás

Készült az RRF-2.3.1-21-2022-00013 azonosítószámú "Társadalmi Innovációs Nemzeti Laboratórium" elnevezésű projektben, Magyarország Helyreállítási és Ellenállóképességi Tervének keretében, az Európai Unió Helyreállítási és Ellenállóképességi Eszközének támogatásával.

A szakszeminárium az NTP-SZKOLL-22-0023 azonosítószámú „Tehetséggondozás és szakmai közösségépítés a Terplán Zénó Szakkollégiumban” elnevezésű projekt keretében valósult meg az Emberi Erőforrások Minisztériuma és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával.

Hivatkozások

[1] Weisstein, E. W.: Cardioid. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html [Accessed: 11-Jun-2023]

[2] Pickover, C. A.: The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics, Sterling Publishing Co. Inc., New York City, (2012)

[3] Lawrence, J. D.: A Catalog of Special Plane Curves, Dover, New York, pp.118–121, (1972).

[4] Thomas, G. B., Weir M. D., Giordano F. R.: Thomas' Calculus. 11th ed. Pearson Education Inc., Addison-Wesely, (2005)

[5] Miscellaneous Antennas. [Online]. Available: https://vu2nsb.com/antenna/miscellaneous-antennas/. [Accessed 11-Jun-2023]

[6] Lazović, L., Jokanovic, B., Rubežić, V., Radovanovic, M., Jovanović, A.: Fractal Cardioid Slot Antenna for Super Wideband Applications. Electronics 11(7), 1043, pp. 1-15. (2022), DOI: 10.3390/electronics11071043

[7] Rohani, B., Kamiyama, K., Arai, H.: Cardioid type pattern optimization using characteristic mode analysis. 12th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2018), London, UK, pp. 1-3, (2018), DOI: 10.1049/cp.2018.0751.

[8] Yates, R. C.: Curves and Their Properties, Classics in Mathematics Education, Vol.4, National Council of Teachers of Mathematics, (1974)

[9] Archibald, R. C.: The Cardioid and Tricuspid: Quartics with Three Cusps. Annals of Mathematics, 4(3), pp. 95-104. (1903), DOI: 10.2307/1967126

[10] Virág, I.: Tanuláselméletek és tanításitanulási stratégiák, Médiainformatikai kiadványok, Eger, (2013)

[11] Shukla, A.: On teaching mathematics to gifted students: some enrichment ideas and educational activities. arXiv: History and Overview, (2019). DOI: 10.48550/arXiv.1911.10726

[12] Hoffmann, M.: Topológia és differenciálgeometria, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ, (2011)

[13] Graaff, E.D.E., Kolmos, A.: Characteristics of Problem-Based Learning. International Journal of Engineering Education, 19, pp. 657-662. (2003). https://www.ijee.ie/articles/Vol19-5/IJEE1450.pdf

[14] Nagy, E. Robotok az oktatási-nevelési folyamatokban. KÉPZÉS ÉS GYAKORLAT : TRAINING AND PRACTICE, 18(3-4). pp. 176-186. (2020). DOI : 10.17165/TP.2020.3-4.18

[15] Darmawansah, D., Hwang, GJ., Chen, MR.A. et al. : Trends and research foci of robotics-based STEM education : a systematic review from diverse angles based on the technology-based learning model. IJ STEM Ed 10, 12 (2023). DOI : 10.1186/s40594-023-00400-3

[16] Joosten, F. : Teachers should be encouraged to step outside their comfort zone. PXL-eXperts (2018). [Online]. Available : https ://www.pxlexperts.be/teachers-should-be-encouraged-to-step-outsidetheir-comfort-zone [Accessed : 12-Jun-2023]

[17] Lengyelné, T.M., Racsko, R., Szűts, Z. : A kommunikációs kompetencia fejlesztésének új lehetőségei : digitális történetmesélés LEGO® eszközzel. Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat, 9(1), pp. 327-339 (2021). DOI : 10.31074/gyntf.2021.1.327.339

[18] Koichu, B., Atrash, E., Marmur, O. : Problem solving opportunities in frontal classes : Inquiry in teaching practices and learning strategies. In : R. Goller, R. Biehler, H. G. Ruck (Eds.), Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline - Conference proceedings, Kassel, Germany, pp. 281-285 (2017).

[19] Pritchard, D. : Where learning starts ? A framework for thinking about lectures in university mathematics, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(5), pp. 609-623 (2010). DOI : 10.1080/00207391003605254

[20] von Renesse, C., Ecke, V. : Discovering the Art of Mathematics : Using String Art to Investigate Calculus, PRIMUS, **26(4)**, pp. 283–296, (2016), DOI : 10.1080/10511970.2015.1124160

[21] Lockwood, H. : A Book of Curves, Cambridge U.P., Cambridge, (1967)

[22] Farkas, M., Sonkoly, P. : Differenciálgeometria és vektoranalízis (Matematika VI. kötet), Műegyetemi kiadó, (2000).

[23] Gáspár, Gy., Raisz, I., Huszthy, L. : Műszaki matematika, I. kötet, Tankönyvkiadó (1968).