ÉSZREVÉTELEK ÉS KIEGÉSZÍTÉSEK A LINEÁRIS ELASZTOSTATIKA FESZÜLTSÉGFÜGGVÉNYEKKEL FELÍRT VARIÁCIÓS ELVEIHEZ

KOZÁK IMRE*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1980. április 10-én]

A dolgozat olyan duál funkcionálokat értelmez, amelyekben a feszültségfüggvény-tenzornak csak három (alkalmasan megválasztott) koordinátája nem zérus, és amelyek a peremfeltételek részletes vizsgálatát is lehetővé teszik. Az értelmezett duál funkcionálokból a feszültségfüggvény-tenzor variációjával három kompatibilitási mezőegyenlet és a kompatibilitási peremfeltétel adódik, az alakváltozásmező kompatibilitásának szükséges és elégséges feltételeként.

1. Bevezetés. Észrevételek

1.1 A feszültségfüggvényekből képzett feszültségmezők kielégítik a kontinuummechanika

$$t^{kl}_{..;k} + q^l = 0 \tag{1.1}$$

egyensúlyi egyenletét. t^{kl} a feszültség tenzor, q^l a térfogati erőrendszer, pontosvessző a kovariáns deriválás jele.

Feltételezzük, hogy az x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszer tetszőleges, görbevonalú. A három koordináta összességét x jelöli.

Legyen a test egyetlen zárt felülettel határolt, és legyen $\dot{t}^{kl}$ partikuláris megoldása (1.1)-nek. Ekkor az (1.1) egyenletet kielégítő tetszőleges feszültségmező előállítható FINZI, B. [1] és BLOH, V. I. [2] szerint a szimmetrikus f_{rs} feszültségfüggvény-tenzorral:

$$t^{kl} - \dot{t}^{kl} = \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;\,mp}\,. \tag{1.2}$$

(ε^{krm} a permutációs tenzor.) BLOH azt is kimutatta, hogy elegendő, az általánosság megsértése nélkül, ha f_{rs} hat független koordinátája közül mindössze három, alkalmasan kiválasztott koordináta nem zérus. Jelölje ezeket, mint feszültségfüggvényeket $f_{RS} = f_{SR}$ és legyenek $f_{AB} = f_{BA}$ a feszültségfüggvény-tenzor zérus koordinátái. (A nagybetűvel jelölt indexpárokban az indexek a szokásos 1, 2, 3 értékek közül csak meghatározott értékeket vesznek fel.) Az f_{AB} koordináták indexpárjai az rs indexpárok összes lehetséges változatai közül kiválasztva olyanok lehetnek, amelyekre nézve a

$$\beta_{(A;B)} = \frac{1}{2}(\beta_{A;\,B} + \beta_{B;\,A}) = \alpha_{AB}(x) \tag{1.3}$$

* Prof. Dr. Kozák Imre, 3525 Miskolc, Dózsa György u. 14.

egyenletnek tetszőleges $\alpha_{AB}(x)$ függvények esetében is van megoldása a $\beta_k(x)$ vektormezőre. (Gömbölyű zárójelbe tett indexek az illető tenzor szimmetrikus részét, illetve a szimmetrikus rész koordinátáit jelzik.) Ezek után az RS indexpárok úgy választandók meg, hogy az AB, BA, valamint az RS, SR indexpárok f_{rs} összes lehetséges indexpárját kiadják. A Maxwell-féle feszültségfüggvényeknél pl.

$$f_{RS} = f_{11}, f_{22}, f_{33} \quad \text{és} \quad f_{AB} = f_{12} = f_{23} = f_{31} = 0\,,$$

míg a Morera-félénél

$$f_{RS} = f_{12}, f_{23}, f_{31} \quad \text{és} \quad f_{AB} = f_{11} = f_{22} = f_{33} = 0$$

az f_{rs} tenzor szerkezete.

Kimutatható, hogy legfeljebb 21-féleképpen választható ki úgy három nem zérus, független koordináta a feszültségfüggvény-tenzorban, hogy azok az (1.2) képlet értelmében feszültségfüggvények lehessenek.

1.2 Mint ismeretes, az elasztostatika linearizált elméletében értelmezett olyan variációs elvekből, amelyek funkcionáljában feszültségfüggvények szerepelnek, a feszültségfüggvények variációjával az alakváltozásmező kompatibilitási feltételeire tudunk következtetni.

Az $a_{kl}(x)$ alakváltozásmezőt kompatibilisnek mondjuk, ha az illető test merevtestszerű mozgásához és egyértékű, legalább kétszer differenciálható $a_{kl}(x)$ mezőjéhez a Cesaro-formula a test egyértékű $u_k(x)$ elmozdulásmezőjét állítja elő.

Vezessük be a továbbiak kedvéért az $a_{kl}(x)$ alakváltozásmezőből képzett szimmetrikus $e^{ab}(x)$ inkompatibilitási (diszlokációs) tenzormezőt:

$$e^{ab} = \varepsilon^{akm}\,\varepsilon^{blp}\,a_{kl;mp}\,. \tag{1.4}$$

Az $e^{ab} = 0$ egyenletek az alakváltozásmező előzőek szerint értelmezett kompatibilitásának feltételét, a Saint-Venant-féle hat kompatibilitási egyenletet adják.

A kompatibilitási egyenleteknek variációs elvből, éspedig a kiegészítő energia minimuma elvből történő előállítására először SOUTHWELL, R. V. [3] alkalmazott feszültségfüggvényeket. Azt találta, hogy a Maxwell-féle feszültségfüggvényekkel ilyen módon csak az $e^{11} = e^{22} = e^{33} = 0$, összesen tehát csak három kompatibilitási egyenlet nyerhető, és a másik három, az $e^{12} = e^{23} = e^{31} = 0$ kompatibilitási egyenlet a Morera-féle feszültségfüggvényekkel adódik. Előállt ezzel az úgynevezett „Southwell-paradoxon", amely szerint — annak ellenére, hogy tetszőleges feszültségmező képezhető külön a Maxwell-féle feszültségfüggvényekkel és külön a Morera-féle feszültségfüggvényekkel is — a hat Saint-Venant-féle kompatibilitási mezőegyenletet csak úgy kapjuk meg a kiegészítő energia minimuma elvből, ha mind a Maxwell-, mind a Morera-féle feszültségfüggvényeket figyelembe vesszük.

A fentebb megfogalmazott „Southwell-paradoxon" olyan értelemben általánosítható, hogy bármilyen három feszültségfüggvényt is választunk, a kiegészítő energia minimuma elvből csak három Saint-Venant-féle kompatibilitási mezőegyenletet kapunk meg.

Időközben további variációs elveket fogalmaztak meg a lineáris rugalmasságtan keretei között feszültségfüggvények segítségével, pl. TONTI, E. [4], ODEN, J. T.—REDDY, J. N. [5] és ABOVSKIJ, N. P.—ANDREEV, N. P.—DERUGA, A. P. [6]. Közös vonása ezeknek a variációs elveknek, hogy a „Southwell-paradoxon" megkerülése érdekében a feszültségfüggvény-tenzornak mind a hat független koordinátáját zérustól különbözőnek veszik és variálják. A valóságban, az *1.1* pontban kifejtettekből következően, jól megfogalmazott variációs elveknél a feszültségfüggvények minden lehetséges variációjának figyelembevételével három feszültségfüggvénynek is elegendő kell lennie az alakváltozásmező kompatibilitásának kimutatására.

1.3 Ténylegesen, WASHIZU, K. [7] részmegoldását kiegészítve, a Bianchi-féle azonosság segítségével, szerző kimutatta [8], hogy ha az

$$e^{RS} = e^{RS} = 0; \qquad x \in V, \tag{1.5$_1$}$$

összesen tehát három, alkalmasan megválasztott Saint-Venant-féle *kompatibilitási mezőegyenlet*, továbbá az

$$n_b e^{ab} = 0; \qquad x \in S, \tag{1.5$_2$}$$

az úgynevezett *kompatibilitási peremfeltétel* teljesül, akkor a maradó három de Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet is teljesül:

$$e^{AB} = e^{BA} = 0; \qquad x \in V.$$

V a test által elfoglalt térfogati tartomány, S ennek egyetlen, egyszeresen összefüggő pereme és n_b a külső normális.

$(1.5)_1$-ben a három RS indexpár annyiféle és ugyanolyan módon választható meg, mint az f_{rs} feszültségfüggvény-tenzor három, feszültségfüggvényként vehető, nem zérus koordinátája.

$(1.5)_1$ és $(1.5)_2$ együtt az alakváltozásmező kompatibilitásának szükséges és elégséges feltételét adja meg. Annak kimutatásával, hogy az alakváltozásmező kompatibilitásának feltételei között csak három Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenletnek kell szerepelnie, megoldást nyert a „Southwell-paradoxon", de csak azon az áron, hogy biztosítani kell az $(1.5)_2$ kompatibilitási peremfeltételek teljesülését is. [9] Dolgozatában szerző kimutatta, hogy a kiegészítő energia minimuma elv, mint variációs elv teljesülésekor nemcsak az $(1.5)_1$ kompatibilitási mezőegyenletek, hanem az $(1.5)_2$ kompatibilitási peremfeltételek is teljesülnek. Következik tehát, hogy a kiegészítő energia elv egy jól megfogalmazott variációs elv.

1.4 Összegezve az előzőeket, az alakváltozásmező kompatibilitásának variációs elvvel történő vizsgálatához két követelmény állítható fel.

I. Olyan feszültségfüggvény-tenzort kell alkalmazni, amelynek csak három (alkalmasan megválasztott) koordinátája nem zérus.

II. Részletesen meg kell vizsgálni a test peremének állapotát.

A [4], [5], [6] dolgozatok feszültségfüggvényeket tartalmazó variációs elvei nem tesznek eleget sem az I., sem a II. követelménynek. A [7] könyv ugyanilyen variációs elvei csak az I. követelményt nem teljesítik.

1.5 Jelen dolgozat a címben jelzett kiegészítéseket a fenti két követelmény tekintetében ODEN és REDDY [5] munkájának feszültségfüggvényeket tartalmazó duál egyenletrendszeréhez és az ezekhez hozzárendelt variációs elvekhez fűzi, ezért a továbbiakban először röviden összefoglaljuk [5] vonatkozó főbb megállapításait.

ODEN és REDDY általános megállapításokat tesznek TONTI, E. [10] munkája alapján a fizikai feladatok változóira, primál és duál egyenletrendszereire, valamint az ezekhez hozzárendelhető variációs elvek funkcionáljaira. A lineáris (klasszikus) rugalmasságtan, mint példa szerepel.

Utóbbi szerint az u_k elmozdulásvektorral, mint alapváltozóval, az a_{kl} alakváltozási tenzorral és a t^{kl} feszültségi tenzorral, mint közbenső változópárral, valamint a q^l térfogati terheléssel, mint forrás változóval a lineáris rugalmasságtan *primál egyenletrendszere* az alábbi kanonikus alakban fogalmazható meg:

$$\frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k}) = a_{kl}\,, \tag{1.6$_1$}$$

$$u_k = \tilde{u}_k\,, \qquad x \in Su\,, \tag{1.6$_2$}$$

$$b^{klpq}\,a_{pq} = t^{kl}\,, \tag{1.7}$$

$$t^{kl}_{..;k} + q^l = 0\,, \tag{1.8$_1$}$$

$$n_k t^{kl} = \tilde{t}^l \qquad x \in St\,, \tag{1.8$_2$}$$

ahol $(1.6)_1$ a kinematikai egyenlet, $(1.6)_2$ az elmozdulási peremfeltétel, (1.7) az anyagtörvény, $(1.8)_1$ az egyensúlyi egyenlet (mérleg egyenlet), $(1.8)_2$ a feszültségi peremfeltétel, b^{klpq} az anyagállandókat magába foglaló tenzor, $\tilde{u}_k$ az *Su* peremrészen megadott elmozdulás és $\tilde{t}^l$ az *St* peremrészen megadott terhelés.

Az (1.6)—(1.8) primál rendszerhez, mint primál variációs elvek és funkcionálok a Hu—Washizu-elv és funkcionálja, a Hellinger—Reissner-elv és funkcionálja, a Lagrange-elv és funkcionálja (a teljes potenciális energia), valamint a Castigliano-elv és funkcionálja (a teljes kiegészítő energia) tartozik.

A *duál egyenletrendszer* alapváltozója az f_{rs} feszültségfügggvény-tenzor, közbenső változó párja az a_{kl} és t^{kl} tenzorok, forrásváltozója pedig az e^{ab} inkompatibilitási (diszlokációs) tenzor.

Ahhoz hasonlóan, ahogy a primál rendszernél q^l a $t^{kl}(x)$ mező kiegyensúlyozatlanságát mutatja, duál rendszernél e^{ab} az e_{kl} (x) mező inkompatibilitását megadó változónak tekinthető. További analógia szerint $n_k t^{kl} = t^l$; $x \in S$ a peremen megoszló erőrendszer, míg $n_a e^{ab} = e^b$; $x \in S$ a peremen megoszló inkompatibilitási mező. Kompatibilis alakváltozásmező esetén $e^{ab} = 0$. Maga a duál egyenletrendszer ODEN és REDDY szerint:

$$\varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp} = t^{kl}, \tag{1.9}$$

$$c_{klpq} t^{pq} = a_{kl}, \tag{1.10}$$

$$\varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mp} = e^{ab}, \tag{1.11}$$

ahol c_{klpq} a b^{klpq} tenzor inverze.

Feltűnő, hogy az (1.6)—(1.8) egyenletekkel ellentétben, az (1.9)—(1.11) duál egyenletek nem tartalmaznak peremfeltételeket. Nem szerepelnek ennek megfelelően felületi integrálok az (1.9)—(1.11) egyenletekhez megfogalmazott duál funkcionálokban sem. Mindez azt tükrözi, hogy ODEN és REDDY duál egyenletrendszere és variációs elvei nem teszik lehetővé az alakváltozásmező kompatibilitásának az 1.4 pont értelmében történő vizsgálatát.

1.6 A dolgozat 2. pontja az (1.9)—(1.11) duál egyenletrendszert úgy módosítja, hogy az a feszültségfüggvény-tenzor $f_{RS} \neq 0$, $f_{AB} = 0$ szerkezete mellett is biztosítsa az alakváltozásmező kompatibilitását. Ehhez a hat (1.11)-es skaláris egyenlet számát háromra kell redukálni és az (1.9)—(1.10) egyenletrendszer megfelelő peremfeltételekkel történő kiegészítésével biztosítani kell mind az *St*, mind az *Su* peremrészen a kompatibilitási peremfeltételek teljesülését.

A 3. pont olyan duál funkcionálokat értelmez, amelyek variációi a 2. pont szerinti módosított és kiegészített duál egyenletrendszert szolgáltatják. A feszültségfüggvények szerinti variációnál lényeges szerep jut annak a felismerésnek, hogy a feszültség-tenzor az *St* peremrészen azon túl, hogy eleget tesz a feszültségi peremfeltételnek, ugyancsak variálható.

2. A lineáris rugalmasságtan módosított és kiegészített duál egyenletrendszere

2.1 Legyen a tetszőleges x^1, x^2, x^3 görbevonalú koordinátarendszerben $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2)$ az S peremfelület egyenlete (ξ^1, ξ^2 a felületi paraméterek), és értelmezzük az S peremen és annak közvetlen V_S környezetében azt a ξ^1, ξ^2,

ξ^3 koordináta-rendszert, amelyben ξ^3 az S perem külső normálisa mentén mért előjeles távolság és S-en $\xi^3 = 0$. Jelölje a továbbiakban az x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszert (x), a ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordináta-rendszert pedig (ξ). Utóbbit peremhez kötött koordináta-rendszernek nevezzük.

A továbbiakban a V_S tartományon és az S peremen értelmezett mennyiségeket és azok deriváltjait a (ξ) koordináta-rendszerben adjuk meg és írjuk fel, anélkül, hogy erre külön felhívnánk a figyelmet. Például S külső normálisának koordinátái $n_\alpha = 0$ és $n_3 = 1$; vagy $n_k t^{kl} = n_3 t^{3l} = t^{3l}$.

Bevezetjük, hogy a (ξ) koordináta-rendszerben a görög betűs indexek csak az 1, 2 értékeket veszik fel.

Legyen a két koordináta-rendszerben felírt tenzorok közötti transzformáció formula

$$c_e^{\cdot d}(\xi) = \tau_e^{\cdot k} \underset{-1}{\tau_l^{\cdot d}}\, c_k^{\cdot l}(x)\,, \tag{2.1$_1$}$$

ahol

$$\det \tau_e^{\cdot k} \neq 0\,; \quad \tau_e^{\cdot k} \underset{-1}{\tau_k^{\cdot d}} = \delta_e^d\,, \tag{2.1$_2$}$$

$c_k^{\cdot l}(x)$ tetszőleges tenzor az (x) koordináta-rendszerben felírva és δ_e^d a Kronecker-szimbólum.

2.2 Az f_{rs} feszültségfüggvény-tenzorra (2.1) szerint az alábbi a transzformációs képlet:

$$f_{ed}(\xi) = \tau_e^{\cdot r} \tau_d^{\cdot s} f_{rs}(x)\,. \tag{2.2}$$

Minthogy a transzformáció során a feszültségfüggvény-tenzor szerkezete (zérus és nem-zérus koordinátái) megváltozik, és mivel a V_S tartományon értelmezett feszültségfüggvény-tenzor szerkezetének nem kell szükségszerűen ugyanolyannak lennie, mint $f_{rs}(x)$ szerkezete, a következőkben a V_S tartományon értelmezett feszültségfüggvény-tenzort más betűvel, $h_{ed}(\xi)$-vel jelöljük.

Célszerű $h_{ed}(\xi)$-t úgy megválasztani, hogy h_{e3} koordinátái zérusak legyenek, de $h_{\eta\vartheta}(\xi) \neq 0$. Az így megválasztott $h_{ed}(\xi)$ és az $f_{rs}(x)$ tenzorok között, $f_{rs}(x)$ bármilyen lehetséges szerkezete esetében is, $(2.1)_1$ segítségével az alábbi egyenletek írhatók fel:

$$h_{\eta\vartheta}(\xi) = \tau_\eta^{\cdot r} \tau_\vartheta^{\cdot s} f_{rs}(x) + \beta_{(\eta;\vartheta)}(\xi)\,, \tag{2.3$_1$}$$

$$h_{e3}(\xi) = \tau_e^{\cdot r} \tau_3^{\cdot s} f_{rs}(x) + \beta_{(e;3)}(\xi) = 0\,, \tag{2.3$_2$}$$

ahol a $\beta_e(\xi)$ vektormezőt úgy kell megválasztani, hogy a $(2.3)_2$ egyenlet teljesüljön. Utóbbi feladat mindig megoldható. $h_{ed}(\xi)$ szerkezete természetesen a fentitől eltérő módon is megválasztható.

A $(2.3)_1$ egyenletet úgy is tekinthetjük, mint a (ξ) koordináta-rendszerben vett három, nem-zérus $h_{\eta\vartheta}(\xi)$ feszültségfüggvény és az (x) koordináta-rendszerben vett ugyancsak három, nem-zérus $f_{RS}(x)$ feszültségfüggvény közötti kölcsönös és $\beta_e(\xi)$ meghatározása után egyértelmű kapcsolatot.

A $\beta_{(e;d)}(\xi)$ tag hozzáadása a (2.2) szerinti transzformáció útján nyerhető $f_{ed}(\xi)$ tenzorhoz nem változtatja meg a $t^{kl}(\xi)$ tenzormezőt, mivel

$$\varepsilon^{kem}\,\varepsilon^{ldp}\,\beta_{(e;d);mp} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{kem}\,\varepsilon^{ldp}\,(\beta_{e;dmp} + \beta_{d;emp}) \equiv 0\,.$$

2.3 Az (1.6)—(1.8) peremértékfeladat (primál egyenletrendszer) duál egyenletrendszerét az alábbi *alapfeltevések és -követelmények* mellett fogalmazzuk meg.

Alapfeltevések:

— az $f_{rs}(x)$ feszültségfüggvény-tenzor 1.1 pont szerint $f_{RS} = f_{SR}$ koordinátái zérustól különbözőek, $f_{AB} = f_{BA}$ koordinátái pedig zérusok;

— a 2.2 pontban bevezetett $h_{ed}(\xi)$ feszültségfüggvény-tenzor $h_{\eta\vartheta}$ koordinátái zérustól különbözőek, h_{e3} koordinátái azonban zérusok.

Alapkövetelmény:

— az $a_{kl}\,(x)$ alakváltozásmező legyen kompatibilis.

Fenti feltevésekkel és követelménnyel a duál egyenletrendszer a következőképp írható fel:

$$\varepsilon^{krm}\,\varepsilon^{lsp}\,f_{rs;mp} = t^{kl} - \mathring{t}^{kl}\,, \qquad (2.4)_1$$

$$h_{\eta\vartheta} = \tilde{h}_{\eta\vartheta} \quad \text{és} \quad h_{\eta\vartheta;3} = \tilde{h}_{\eta\vartheta;3}\,, \qquad \xi \in St, \qquad (2.4)_2$$

$$c_{klpq}\,t^{pq} = a_{kl}\,, \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon^{Rkm}\,\varepsilon^{Slp}\,a_{kl;mp} = e^{RS} = e^{SR} = 0\,, \qquad (2.6)_1$$

$$\varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{bdp}\,a_{\eta d;p\mu} = e^{3b} = e^{b3} = 0\,, \qquad \xi \in St, \qquad (2.6)_2$$

$$a_{\eta\vartheta} = \tilde{u}_{(\eta;\vartheta)}\,, \qquad \xi \in Su, \qquad (2.6)_3$$

$$a_{\eta\vartheta\cdot 3} - a_{\eta 3;\vartheta} - a_{3\vartheta;\eta} = \tilde{u}_{3;\eta\vartheta}\,, \qquad \xi \in Su. \qquad (2.6)_4$$

A már bevezetett jelöléseken felül a $\tilde{h}_{\eta\vartheta}(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{h}_{\eta\vartheta;\,3}(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{h}_{e3}(\xi^1, \xi^2) = \tilde{h}_{e3;\,3}(\xi^1, \xi^2) = 0$ függvények az St peremszakaszon kielégítik az $(1.8)_2$ alapján felírható alábbi egyenletet:

$$t^{3l} - \mathring{t}^{3l} = \varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{ldp}\,h_{\eta d;p\mu} = \tilde{t}^l - \mathring{t}^{3l}\,; \qquad \xi \in St. \qquad (2.7)$$

Kompatibilis alakváltozásmező esetében, mint amilyenre az alapkövetelmény szerint a (2.4)—(2.6) egyenletrendszer vonatkozik, $e^{RS} = 0$; $x \in V$ és $e^{3b} = 0$; $\xi \in S$.

A duál egyenletrendszerben $(2.4)_2$ és (2.7) szerint teljesülnek a feszültségi peremfeltételek, (2.5) az anyagtörvény.

A (2.6) egyenletek az 1.3 pont szerint, az a_{kl} alakváltozásmező kompatibilitását biztosítják. Ugyanis $(2.6)_1$ azonos $(1.5)_2$-vel, $(2.6)_2$ az *St* peremrészen azonos $(1.5)_2$-vel, míg $(2.6)_{3,4}$ az *Su* peremrészen, ahol $u_e = \tilde{u}_e$ az előírt elmozdulás, egyenértékű $(1.5)_2$-vel. Utóbbi külön igazolásra szorul.

Az inkompatibilitási tenzor (1.4) értelmezése szerint a teljes S peremen

$$e^{33} = \varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{3\vartheta\pi}\,a_{\eta\vartheta;\mu\pi}\,, \tag{2.8$_1$}$$

és

$$e^{3\beta} = \varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{3\beta\vartheta}\,(a_{\eta\vartheta;3\mu} - a_{\eta3;\vartheta\mu}). \tag{2.8$_2$}$$

Helyettesítve pedig $(2.8)_1$-be $(2.6)_3$-at és $(2.8)_2$-be $(2.6)_4$-et, valóban azt kapjuk, hogy az Su peremrészen is teljesül $(1.5)_2$:

$$e^{33} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{3\vartheta\pi}(\tilde{u}_{\eta;\vartheta} + \tilde{u}_{\vartheta;\eta})_{;\mu\pi} \equiv 0\,, \tag{2.9$_1$}$$

$$e^{3\beta} = \varepsilon^{3\eta\mu}\,\varepsilon^{\beta\vartheta3}(\tilde{u}_{3;\eta\vartheta} + a_{3\vartheta;\eta})_{;\mu} \equiv 0\,. \tag{2.9$_2$}$$

A (2.4)—(2.6) duál rendszer $a_{\mathrm{kl}}(x)$ alakváltozásmezőjéhez és a test megadott merevtestszerű mozgásához a Cesaro-képlet egyértékű elmozdulásmezőt állít elő.

2.4 A $t^{\mathrm{ll}}(x)$ feszültségmezővel felírt alapegyenlet-rendszert kapjuk meg a (2.4)—(2.6) egyenletrendszerből, ha $(2.4)_1$ helyébe az egyensúlyi egyenletet, $(2.4)_2$ helyébe pedig a feszültségi peremfeltételt írjuk:

$$(t^{\mathrm{kl}} - \mathring{t}^{\mathrm{kl}})_{;\mathrm{k}} = 0\,, \tag{2.10$_1$}$$

$$t^{3\mathrm{l}} = \tilde{t}^{\mathrm{l}} \qquad \xi \in St, \tag{2.10$_2$}$$

a (2.5)—(2.6) egyenleteket pedig változatlanul hagyjuk [9]. Ilyen módon a feszültségi tenzor hat független koordinátájának meghatározásához a $(2.10)_1$ és a $(2.6)_1$, összesen tehát hat skaláris mezőegyenlet áll rendelkezésünkre.

3. A lineáris elasztostatika kiegészített duál variációs elvei

3.1 A duál egyenletrendszerhez tartozó duál funkcionálok Euler-egyenleteinek és a peremfeltételeknek a képzésénél alapvető szerepet játszik az az összefüggés, amelyet az

$$\varepsilon^{\mathrm{krm}}\,\varepsilon^{\mathrm{lsp}}\,a_{\mathrm{kl}}\,\delta f_{\mathrm{rs;mp}} = \varepsilon^{\mathrm{krm}}\,\varepsilon^{\mathrm{lsp}}\,[a_{\mathrm{kl;mp}}\,\delta f_{\mathrm{rs}} - (a_{\mathrm{kl;p}}\,\delta f_{\mathrm{rs}})_{;\mathrm{m}} + (a_{\mathrm{kl}}\,\delta f_{\mathrm{rs;p}})_{;\mathrm{m}}]$$

azonosság, a Gauss—Osztrogradszkij-tétel, és a (2.1) transzformációs képlet alapján írhatunk fel:

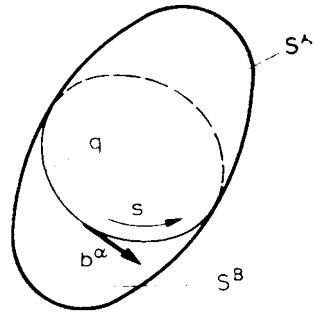
$$\int_{(V)} \varepsilon^{\mathrm{krm}}\,\varepsilon^{\mathrm{lsp}}\,a_{\mathrm{kl}}\,\delta f_{\mathrm{rs;mp}}\,dV =$$

$$\int_{(V)} \varepsilon^{\mathrm{krm}}\,\varepsilon^{\mathrm{lsp}}\,a_{\mathrm{kl;mp}}\,\delta f_{\mathrm{rs}}\,dV +$$

$$+ \int_{(S)} \varepsilon^{\varkappa\eta3}\,\varepsilon^{\mathrm{ldp}}(a_{\varkappa\mathrm{l}}\,\delta h_{\eta\mathrm{d;p}} - a_{\varkappa\mathrm{l;p}}\,\delta h_{\eta\mathrm{d}})\,dS\,. \tag{3.1}$$

(δ a variáció jele).

3.2 Szükségünk lesz a felületi integrálok átalakításaihoz a Stokes-tételre is. Osszuk fel ebből a célból a test felületét az S^{A} és S^{B} jelű részekre, és legyen q közös görbéje S^{A} és S^{B}-nek (1. ábra). Legyen s a q görbén a bejelölt irányban



1. ábra

mért ívhossz és b^{α} a vonatkozó egységvektor. A Stokes-tétel szerint az S^{A}-n, vagy az S^{B}-n, vagy S^{A}-n is és S^{B}-n is értelmezett tetszőleges $c_{\alpha}(\xi^1, \xi^2)$ vektormezőre fennállnak a következő egyenletek:

$$\int_{(S^{\mathrm{A}})} \varepsilon^{\alpha\beta 3} c_{\alpha;\beta}\, dS = -\oint_{(q)} (b^{\alpha} c_{\alpha})^{\mathrm{A}} ds, \qquad (3.2)_1$$

$$\int_{(S^{\mathrm{B}})} \varepsilon^{\alpha\beta 3} c_{\alpha;\beta}\, dS = \oint_{(q)} (b^{\alpha} c_{\alpha})^{\mathrm{B}} ds. \qquad (3.2)_2$$

Az A és B jelek a vonalintegrálokban azt hangsúlyozzák, hogy az intergrandusz az S^{A}, ill. az S^{B} peremrészen értendő.

3.3 A duál funkcionálokat a teljes f_{rs} (x) és $h_{\mathrm{cd}}(\xi)$ feszültségfüggvény-tenzorokkal építjük fel, és hasonló módon képezzük a funkcionálok variációit is. A feszültségfüggvény-tenzorok szerkezetére a 2.3 pont elején tett alapfeltevéseket és az alakváltozási tenzorra rótt alapkövetelményt csak a variációk képzése után vesszük figyelembe.

Értelmezzük ezek után a lineáris rugalmasságtan (1.6)—(1.8) peremértékfeladatának duál egyenletrendszeréhez az alábbi duál funkcionálokat.

I. *Ha egyetlen egyenlet teljesülését sem írjuk elő előzetesen:*

$$L(f_{\mathrm{rs}}, t^{\mathrm{kl}}, a_{\mathrm{pq}}) = L^{\mathrm{V}} + L^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{U}} + L^{\mathrm{Q}}, \qquad (3.3)_1$$

ahol

$$L^{\mathrm{V}} = \int_{(V)} \frac{1}{2} t^{\mathrm{kl}} c_{\mathrm{klpq}} t^{\mathrm{pq}}\, dV - \int_{(V)} e^{\mathrm{rs}} f_{\mathrm{rs}}\, dV -$$

$$- \int_{(V)} a_{\mathrm{kl}} (t^{\mathrm{kl}} - \dot{t}^{\mathrm{kl}} - \varepsilon^{\mathrm{krm}} \varepsilon^{\mathrm{lsp}} f_{\mathrm{rs;mp}}) dV; \qquad (3.3)_2$$

$$L^{\mathrm{T}} = \int_{(St)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\, \varepsilon^{\mathrm{ldp}}[-(h_{\eta\mathrm{d;p}} - \tilde{h}_{\eta\mathrm{d;p}})\, a_{\varkappa\mathrm{l}} + (h_{\eta\mathrm{d}} - \tilde{h}_{\eta\mathrm{d}})\, a_{\varkappa\mathrm{l;p}}]\, dS; \qquad (3.3)_3$$

$$L^{\mathrm{U}} = \int_{(Su)} \tilde{u}_{\mathrm{l}}(\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\, \varepsilon^{\mathrm{ldp}}\, h_{\eta\mathrm{d;p}} - \dot{t}^{3\mathrm{l}})dS = -\int_{(Su)} t^{3\mathrm{l}}\, \tilde{u}_{\mathrm{l}} dS; \qquad (3.3)_4$$

$$L_{\mathrm{Q}} = \oint_{(q)} \{b^{\eta}(\tilde{u}_{\mathrm{l}})^{\mathrm{U}}\, \varepsilon^{\mathrm{ldp}}(h_{\eta\mathrm{d;p}} - \tilde{h}_{\eta\mathrm{d;p}}) + b^{\vartheta}\, \varepsilon^{\varkappa\eta 3}[(\tilde{u}_{3;\varkappa} - a_{3\varkappa})^{\mathrm{U}}\, (h_{\eta\vartheta} - \tilde{h}_{\eta\vartheta}) - (\tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]})^{\mathrm{U}}\, (h_{\eta 3} - \tilde{h}_{\eta 3})]\}ds. \qquad (3.3)_5$$

A $(3.3)_{3,5}$-ben szereplő $h_{\mathrm{ed}}(\xi^1, \xi^2)$, $h_{\mathrm{ed;3}}(\xi^1, \xi^2)$ függvények kielégítik a (2.7) feszültségi peremfeltételt, de nem rögzítettek, ezért variálhatók (lásd a (3.15) képletet). Az $\tilde{u}_{\mathrm{l}}(\xi^1, \xi^2)$ függvény a $(3.3)_4$ integrálban az előírt elmozdulás az Su peremrészen. A körintegrált az St és Su peremrészek közös q görbéjén kell venni. Az 1. ábrának megfelelő jelölések mellett S^{A}-nak megfelel St és S^{B}-nek Su. (A körintegrál intergraduszában U, vagy T jelöli — a későbbiekben is, — azt, hogy az illető mennyiséget az Su vagy az St peremszakaszon és természetesen a q görbén kell-e érteni.) A szögletes zárójelbe tett indexek a $(3.3)_5$ képletben az

$$\tilde{u}_{\vartheta;\varkappa} = \tilde{u}_{(\vartheta;\varkappa)} + \tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]}$$

képletnek megfelelően az illető tenzor ferdeszimmetrikus részét jelzik.

II. *Ha teljesül az (1.7) anyagtörvény:*

$$M(f_{\mathrm{rs}};\, a_{\mathrm{pq}}) = M^{\mathrm{v}} + M^{\mathrm{T}} + M^{\mathrm{U}} + M^{\mathrm{U}}_{\mathrm{T}}, \qquad (3.4)_1$$

ahol

$$M^{\mathrm{v}} = -\int_{(V)} \frac{1}{2}\, a_{\mathrm{kl}}\, b^{\mathrm{klpq}}\, a_{\mathrm{pq}}\, dV - \int_{(V)} e^{\mathrm{rs}}\, f_{\mathrm{rs}}\, dV + \int_{(V)} a_{\mathrm{kl}}\, (\dot{t}^{\mathrm{kl}} + \varepsilon^{\mathrm{krm}}\, \varepsilon^{\mathrm{lsp}} f_{\mathrm{rs;mp}})\, dV, \qquad (3.4)_2$$

$$M^{\mathrm{T}} = L^{\mathrm{T}}; \quad M^{\mathrm{U}} = L^{\mathrm{U}} \quad \text{és} \quad M^{\mathrm{Q}} = L^{\mathrm{Q}}; \qquad (3.4)_{3,4,5}$$

vagy az $a_{\mathrm{kl}} = c_{\mathrm{klpq}}\, t^{\mathrm{pq}}$ helyettesítéssel:

$$M^*(f_{\mathrm{rs}};\, t^{\mathrm{pq}}) = \dots . \qquad (3.5)$$

III. *Ha az anyagtörvény, a* $(2.4)_1$ *egyenlet és a* $(2.4)_2$ *feszültségi peremfeltétel teljesül*, vagyis fennáll az

$$\varepsilon^{3\eta\mu}\, \varepsilon^{\mathrm{ldp}}(h_{\eta\mathrm{d;p}\mu} - \tilde{h}_{\eta\mathrm{d;p}\mu}) = 0\,; \qquad \xi \in St \qquad (3.6)_1$$

egyenlet (itt a hullámos felülvonással jelölt függvények rögzítettek):

$$K(f_{rs}) = K^{V} + K^{U}, \tag{3.6$_2$}$$

ahol

$$K^{V} = \int_{(V)} \frac{1}{2} \underset{f}{t}^{pq} c_{pqkl} \underset{f}{t}^{kl} \, dV - \int_{(V)} e^{rs} f_{rs} \, dV, \tag{3.6$_3$}$$

$$K^{U} = L^{U}, \tag{3.6$_4$}$$

és

$$\underset{f}{t}^{kl} = \mathring{t}^{kl} + \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp} \, . \tag{3.6$_5$}$$

A bevezetett (3.3), (3.4) és (3.6) funkcionálok térfogati részei sorban megfelelnek az Oden és Reddy [5] dolgozatában szereplő (4.20), (4.21) és (4.19) funkcionáloknak.

3.4 A (3.3), (3.4) és (3.6) funkcionálok eleget tesznek az 1.6 pont azon célkitűzésének, hogy a funkcionálok variációi — a mellékfeltételekként előzetesen előírt egyenletekkel együtt — a (2.4)—(2.6) szerinti, módosított és kiegészített duál egyenletrendszert szolgáltatják. Ennek igazolására képezzük először a (3.3) funkcionál különböző variációit. A variáció jele mellett kisbetű jelöli azt a változót, amelyik szerint az illető variációt képezzük:

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = \delta_t L^{V} = \int_{(V)} \delta t^{kl} (c_{klpq} t^{pq} - a_{kl}) \, dV, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \delta_a L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) &= \delta_a L^{V} + \delta_a L^{T} + \delta_a L^{Q} = \\ &= -\int_{(V)} \delta a_{kl} \, (t^{kl} - \mathring{t}^{kl} - \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp}) \, dV + \\ &+ \int_{(St)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} \, [-(h_{\eta d;p} - \tilde{h}_{\eta d;p}) \, \delta a_{\varkappa l} + \\ &+ (h_{\eta d} - \tilde{h}_{\eta d}) \, \delta a_{\varkappa l;p}] \, dS + \\ &+ \oint_{(q)} b^{\vartheta} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \, [-(\delta a_{3\varkappa})^{U} \, (h_{\eta\vartheta} - \tilde{h}_{\eta\vartheta})] \, ds; \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\delta_f L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = \delta_f L_o^{V} + \delta_f L_o^{T} + \delta_f L_o^{U} + \delta_f L_o^{Q}, \tag{3.9$_1$}$$

ahol

$$\delta_f L_o^{V} = \int_{(V)} (a_{kl} \, \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} \, \delta f_{rs;mp} - e^{rs} \, \delta f_{rs}) \, dV, \tag{3.9$_2$}$$

$$\begin{aligned} \delta_f L_o^{T} &= \delta_h L_o^{T} + \delta_{\tilde{h}} L_o^{T} = \\ &= \int_{(St)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} \, [-a_{\varkappa l} (\delta h_{\eta d;p} - \delta\tilde{h}_{\eta d;p}) + \\ &+ a_{\varkappa l;p} (\delta h_{\eta d} - \delta\tilde{h}_{\eta d})] \, dS \, , \end{aligned} \tag{3.9$_3$}$$

$$\delta_f L_o^U = \delta_h L_o^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\, \varepsilon^{ldp}\, \tilde{u}_l\, \delta h_{\eta d;p\varkappa}\, dS_\varkappa, \tag{3.9$_4$}$$

$$\begin{aligned}\delta_f L_o^Q &= \delta_h L_o^Q + \delta_{\tilde h} L_o^Q = \\ &= \oint_{(q)} \{ b^\eta (\tilde{u}_l)^U \varepsilon^{ldp} (\delta h_{\eta d;p} - \delta \tilde{h}_{\eta d;p}) + \\ &+ b^\vartheta \varepsilon^{\varkappa\eta 3} [(\tilde{u}_{3;\varkappa} - a_{3\varkappa})^U (\delta h_{\eta\vartheta} - \delta \tilde{h}_{\eta\vartheta}) - \\ &- (\tilde{u}_{[\varkappa;\vartheta]})^U (\delta h_{\eta 3} - \delta \tilde{h}_{\eta 3})]\} \, ds .\end{aligned} \tag{3.9$_5$}$$

A variáció jele melletti h, illetve $\tilde{h}$ index azt jelzi, hogy a vonatkozó integrálban a $h_{ed}(\xi)$, vagy a $\tilde{h}_{ed}(\xi)$ változót variáljuk-e.

3.5 A (3.7)-el képzett

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \tag{3.10}$$

duál variációs elvből — tekintettel arra, hogy δt^{kl} a V tartományon tetszőleges lehet — adódik a duál rendszer (2.5) anyagtörvénye.

3.6 A (3.8)-al képzett

$$\delta_a L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \tag{3.11}$$

duál variációs elvből — tekintettel arra, hogy δa_{kl} V-n, továbbá $\delta a_{\varkappa l}$ és $\delta a_{\varkappa l;3}$ St-n tetszőleges lehet — következik a duál egyenletrendszer $(2.4)_1$ egyenlete és a

$$h_{\eta\vartheta} = \tilde{h}_{\eta\vartheta}; \quad h_{\eta\vartheta;3} = \tilde{h}_{\eta\vartheta;3}; \quad h_{e3} = \tilde{h}_{e3}; \quad \xi \in St \tag{3.12$_1$}$$

alakú, $(2.4)_2$-vel megegyező feszültségi peremfeltétele, továbbá a q görbére vonatkozó

$$h_{\eta\vartheta} = \tilde{h}_{\eta\vartheta}; \qquad \xi \in q \tag{3.12$_2$}$$

feltétel.

3.7 A (3.9)-el képzett

$$\delta_f L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \tag{3.13}$$

duál variációs elv integráljai további átalakításokat igényelnek.

A $\delta_f L_0^V$ térfogati rész a (3.1) összefüggés segítségével az alábbi alakra hozható:

$$\delta_f L_0^V = \delta_f L_1^V + \delta_f L_{V0}^{TU}, \tag{3.14$_1$}$$

ahol

$$\delta_f L_1^V = \int_{(V)} (\varepsilon^{krm}\, \varepsilon^{lsp}\, a_{kl;mp} - e^{rs})\, \delta f_{rs}\, dV, \tag{3.14$_2$}$$

$$\begin{aligned}\delta_f L_{V0}^{TU} &= \delta_h L_{V0}^T + \delta_h L_{V0}^U = \\ &= \int_{(S)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\, \varepsilon^{ldp} (a_{\varkappa l}\, \delta h_{\eta d;p} - a_{\varkappa l;p}\, \delta h_{\eta d})\, dS.\end{aligned} \tag{3.14$_3$}$$

A TU index azt jelzi, hogy az integrált a teljes, $S = St + Su$ peremen kell venni.

Az $L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq})$ funkcionál feszültségfüggvény-tenzor szerinti variációjánál arra is tekintettel kell lennünk, hogy a feszültségi peremfeltétel (2.7) szerint nem határozza meg egyértelműen az St peremrészen a $\tilde{h}_{ed}$ tenzort és deriváltjait, és így ott $\tilde{h}_{ed}$ is variálható. Az St peremrészen képzett $\delta\tilde{h}_{ed}(\xi)$ variációk (2.7) szerint természetesen eleget kell tegyenek az alábbi egyenletnek:

$$\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\varepsilon^{ldp}\,\delta\tilde{h}_{\eta d;p\varkappa} = 0; \qquad \xi \in St. \tag{3.15}$$

(3.15) általános megoldását egy tetszőleges $\delta v_e(\xi)$ vektormező gradiensének szimmetrikus része adja:

$$\delta\tilde{h}_{ed} = \delta v_{(e;d)} = \frac{1}{2}(\delta v_{e;d} + \delta v_{d;e})\,. \tag{3.16}$$

Bevezetve a

$$\delta w^{l} = \delta w^{l}(\xi) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ldp}\,\delta v_{d;p} \tag{3.17}$$

jelölést, belátható az alábbi képletek helyessége is:

$$\delta\tilde{h}_{\eta d} = \delta v_{d;\eta} + \varepsilon_{d\eta n}\,\delta w^{n}, \qquad (3.18)_1$$

$$\varepsilon^{ldp}\,\delta\tilde{h}_{\eta d;p} = -\delta w^{l}_{\cdot;\eta}. \qquad (3.18)_2$$

A (3.18) összefüggések akkor is érvényben maradnak, ha a $\tilde{h}_{e3} = 0$ feltételezéssel élünk. Ekkor fenn kell állnia (3.16) szerint a

$$v_{\eta;3} = -v_{3;\eta} \quad \text{és} \quad v_{3;3} = 0 \qquad \xi \in St$$

egyenletnek, de a $\delta v_e(\xi^1, \xi^2)$, vagy a $\delta w^l(\xi^1, \xi^2)$ függvény az St peremrészen ekkor is tetszőleges marad.

A $(3.9)_3$ képlet második tagja az előzőek alapján a (3.18) összefüggések és a $(3.2)_1$ Stokes-tétel segítségével hozható új alakra:

$$\delta_{\tilde{h}} L_0^{T} = \delta_{\tilde{h}} L_1^{T} + \delta_{\tilde{h}} L_T^{Q}, \qquad (3.19)_1$$

ahol

$$\delta_{\tilde{h}}\, L_1^{T} = \int_{(St)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\varepsilon^{ldp}\,a_{\varkappa l;p}\,\delta v_d\, dS, \qquad (3.19)_2$$

$$\delta_{\tilde{h}}\, L_T^{Q} = \oint_{(q)} \left[(b^{\vartheta}\,a_{\vartheta l}\,\delta w^{l})^{T} + (b^{\vartheta}\,\varepsilon^{ldp}\,a_{\vartheta l;p}\,\delta v_d)^{T}\right] ds. \qquad (319)_3$$

A $(3.9)_4$ képlet átalakításához ismételten felhasználjuk a $(3.2)_2$ Stokes-tételt:

$$\delta_h\, L_0^{U} = \delta_h\, L_1^{U} + \delta_h\, L_U^{Q}, \qquad (3.20)_1$$

ahol

$$\delta_h L_1^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\vartheta 3}[-\tilde{u}_{3;\varkappa\lambda}\, \delta h_{\eta\vartheta} - \tilde{u}_{(\lambda;\varkappa)}\, \delta h_{\eta\vartheta;3} +$$

$$+ \tilde{u}_{(\lambda;\varkappa)}\, \delta h_{\eta 3;\vartheta} - [\tilde{u}_{[\lambda;\varkappa];\vartheta}\, \delta h_{\eta 3}]\, dS, \tag{3.20$_2$}$$

$$\delta_h L_U^Q = \oint_{(q)} \{-b^\eta\, \tilde{u}_l\, \varepsilon^{ldp}\, \delta h_{\eta d;p} -$$

$$- b^\vartheta\, \varepsilon^{\varkappa\eta 3}[\tilde{u}_{3;\varkappa}\, \delta h_{\eta\vartheta} - \tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]}\, \delta h_{\eta 3}]\}^U\, ds. \tag{3.20$_3$}$$

A $(3.14)_3$-ban szereplő $\delta_f L_{V0}^U$ kifejezés a $(3.2)_2$ Stokes-tétellel tovább alakítható:

$$\delta_h L_{Vo}^U = \delta_h L_{V1}^U + \delta_h L_{VU}^Q, \tag{3.21$_1$}$$

ahol

$$\delta_h L_{V1}^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\vartheta 3}\, [(a_{3\varkappa;\lambda} + a_{\varkappa 3;\lambda} - a_{\varkappa\lambda;3})\, \delta h_{\eta\vartheta} +$$

$$+ a_{\lambda\varkappa}\, \delta h_{\eta\vartheta;3} - a_{\varkappa\lambda}\, \delta h_{\eta 3;\vartheta} + a_{\varkappa\lambda;\vartheta}\, \delta h_{\eta 3}]\, dS; \tag{3.21$_2$}$$

$$\delta_h L_{VU}^Q = \oint_{(q)} [b^\vartheta\, \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\, a_{3\varkappa}\, \delta h_{\eta\vartheta}]^U\, ds\,. \tag{3.21$_3$}$$

Térjünk vissza az átalakítások után a (3.9)-el képzett (3.13)-as variációs elvhez:

$$\delta_f L(f_{rs}, t^{kl}, a_{qp}) = \delta_f L^V + \delta_h L^T + \delta_{\tilde{h}} L^T + \delta_h L^U + \delta_h L^Q + \delta_{\tilde{h}} L^Q, \tag{3.22$_1$}$$

ahol

$$\delta_f L^V = \delta_f L_1^V\,, \tag{3.22$_2$}$$

$$\delta_h L^T = \delta_h L_0^T + \delta_h L_{V0}^T\,; \quad \delta_{\tilde{h}} L^T = \delta_{\tilde{h}} L_1^T, \tag{3.22$_{3;4}$}$$

$$\delta_h L^U = \delta_h L_1^U + \delta_h L_{V1}^U, \tag{3.22$_5$}$$

$$\delta_h L^Q = \delta_h L_0^Q + \delta_h L_{VU}^Q + \delta_h L_U^Q, \tag{3.22$_6$}$$

$$\delta_{\tilde{h}} L^Q = \delta_{\tilde{h}} L_0^Q + \delta_{\tilde{h}} L_T^Q\,. \tag{3.22$_7$}$$

A (3.22) egyenlet integráljaiban az integranduszok olyan szorzatok összegeiből állanak, amelyekben az egyik tényező szabadon variálható. Következik tehát, hogy a (3.22) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha a benne szereplő integrálok külön-külön zérus értékűek. Sorra véve az egyes integrálokat, és érvényesítve a 2.3 pont elején megfogalmazott alapfeltevést a feszültségfüggvény-tenzorok szerkezetére, továbbá figyelembe véve, hogy az $f_{rs}(x)$ és $h_{ed}(\xi)$ tenzorok a (2.3) képlet szerint transzformálódnak, az alábbi megállapításokat tehetjük:

a) A $(3.22)_2$, $(3.14)_2$ képlet alapján felírható $\delta_f L^V = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta f_{RS}(x)$ tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{Rkm}\, \varepsilon^{Slp}\, a_{kl;mp} = e^{RS} \qquad x \in V. \tag{3.23}$$

b) A $(3.22)_3$, $(3.9)_3$ és $(3.14)_3$ képletek alapján felírható $\delta_{\mathrm{h}} L^{\mathrm{T}} = 0$ egyenlet identikusan teljesül.

c) A $(3.22)_4$ és $(3.19)_2$ alapján felírható $\delta_{\tilde{\mathrm{h}}} L^{\mathrm{T}} = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta v_{\mathrm{d}}(\xi)$ az St felületrészen tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{3\varkappa\eta}\,\varepsilon^{\mathrm{dlp}}\,a_{\varkappa\mathrm{l};\mathrm{p}\eta} = e^{3\mathrm{d}} = 0\,; \qquad \xi \in St\,. \tag{3.24}$$

d) A $(3.22)_5$, $(3.20)_2$ és $(3.21)_2$ képletek alapján felírható $\delta_{\mathrm{h}} L^{\mathrm{U}} = 0$ egyenlet szerint, mivel az Su peremrészen δt^{31}, következőleg ugyanott

$$\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\varepsilon^{\lambda\vartheta 3}\,\delta h_{\eta\vartheta} \quad \text{és} \quad \varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\varepsilon^{\lambda\theta 3}\,\delta h_{\eta\vartheta;3}$$

tetszőleges lehet:

$$a_{\lambda\varkappa} = \tilde{u}_{(\lambda;\varkappa)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{\lambda;\varkappa} + \tilde{u}_{\varkappa;\lambda}\right); \qquad \xi \in Su\,, \tag{3.25$_1$}$$

$$a_{3\varkappa;\lambda} - a_{\varkappa\lambda;3} = \tilde{u}_{3;\varkappa\lambda} - a_{3\lambda;\varkappa}; \qquad \xi \in Su\,, \tag{3.25$_2$}$$

$$\varepsilon^{\lambda\theta 3}\,a_{\varkappa\lambda;\vartheta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\vartheta 3}\left(\tilde{u}_{\lambda;\varkappa} - \tilde{u}_{\varkappa;\lambda}\right)_{;\vartheta}\,. \tag{3.25$_3$}$$

A $(3.25)_3$ egyenlet, amely a $\delta h_{\eta 3}$ koordináta együtthatójából következik, $(3.25)_1$ fennállása esetén identikusan teljesül. Nem veszítünk el tehát valóban értékes egyenletet, ha az alapfeltevésnek megfelelően a $\delta h_{\eta 3} = 0$ esetet választjuk.

e) A $(3.22)_6$, $(3.9)_5$, $(3.21)_3$ és $(3.20)_3$ képletek alapján felírható $\delta_{\mathrm{h}} L^{\mathrm{Q}} = 0$ egyenlet identikusan teljesül.

f) A $(3.22)_7$, $(3.9)_5$ és $(3.19)_3$ képletek alapján (3.18) figyelembevételével felírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{\mathrm{h}}} L^{\mathrm{Q}} = \oint_{(q)} \Big[&(b^{\vartheta} a_{\vartheta\mathrm{l}}\,\delta w^{\mathrm{l}})^{\mathrm{T}} + (b^{\vartheta}\,\varepsilon^{\mathrm{ldp}}\,a_{\vartheta\mathrm{l};\mathrm{p}}\,\delta v_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}} + \\ &+ b^{\eta}(\tilde{u}_{\mathrm{l}})^{\mathrm{U}}(\delta w^{\mathrm{l}}{}_{;\eta})^{\mathrm{T}} - b^{\theta}(\tilde{u}_{3;\varkappa} - a_{3\varkappa})^{\mathrm{U}}\,\varepsilon^{\varkappa\eta 3}(\delta v_{\eta;\vartheta} + \varepsilon_{\eta\vartheta 3}\,\delta w^{3})^{\mathrm{T}} + \\ &+ b^{\theta}(\tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]})^{\mathrm{U}}\,\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,(\delta v_{3;\eta} + \varepsilon_{3\eta\nu}\,\delta w^{\nu})^{\mathrm{T}}\Big]\,ds = 0\,,\end{aligned} \tag{3.26}$$

A (3.26) egyenlet további átalakításánál figyelembe vesszük az alábbi azonosságot:

$$\tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]} = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_{\vartheta;\varkappa} - \tilde{u}_{\varkappa;\vartheta}\right) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\vartheta\varkappa 3}\,\varepsilon^{\alpha\beta 3}\,\tilde{u}_{\alpha;\beta}\,. \tag{3.27}$$

A q görbén vett integrálások és átrendezés után végül is adódik:

$$\begin{aligned}\delta_{\tilde{\mathrm{h}}} L^{\mathrm{Q}} = \oint_{(q)} \Bigg[&\left\{(b^{\vartheta} a_{\vartheta\lambda})^{\mathrm{T}} - [\tilde{u}_{(\lambda;\vartheta)}\,b^{\vartheta}]^{\mathrm{U}}\right\} \delta w^{\lambda} + \\ &+ \left\{(b^{\vartheta} a_{\vartheta 3})^{\mathrm{T}} - (b^{\vartheta} a_{3\vartheta})^{\mathrm{U}}\right\} \delta w^{3} + \\ &+ \left\{[\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,b^{\vartheta}\,(a_{\vartheta\varkappa;3} - a_{\vartheta 3;\varkappa})]^{\mathrm{T}} - [\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,b^{\vartheta}\,(a_{3\varkappa;\vartheta} - \tilde{u}_{3;\varkappa\vartheta})]^{\mathrm{U}}\right\} \delta v_{\eta} + \\ &+ \left\{-[\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,b^{\vartheta}\,a_{\vartheta\varkappa;\eta}]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\tilde{u}_{\varkappa;\vartheta}\,b^{\vartheta}\right]^{\mathrm{U}}\right\} \delta v_{3}\Bigg]\,ds = 0\,.\end{aligned} \tag{3.28}$$

A (3.28) egyenlet szerint, mivel δw^{I} és δv_{e} a q görbén tetszőleges lehet fennállnak az alábbi egyenletek:

$$(b^{\vartheta} a_{\vartheta\lambda})^{\mathrm{T}} = [b^{\vartheta} \tilde{u}_{(\vartheta;\lambda)}]^{\mathrm{U}}; \qquad \xi \in q\,, \qquad (3.29)_1$$

$$(b^{\vartheta} a_{\vartheta 3})^{\mathrm{T}} = (b^{\vartheta} a_{3\vartheta})^{\mathrm{U}}; \qquad \xi \in q\,, \qquad (3.29)_2$$

$$[b^{\vartheta} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}(a_{\vartheta\varkappa;3} - a_{\vartheta 3;\varkappa})]^{\mathrm{T}} = [b^{\vartheta} \varepsilon^{\varkappa\eta 3}(a_{3\varkappa;\vartheta} - \tilde{u}_{3;\varkappa\vartheta})]^{\mathrm{U}}; \qquad \xi \in q\,, \qquad (3.29)_3$$

$$[b^{\vartheta} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} a_{\vartheta\varkappa;\eta}]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} [\varepsilon^{\varkappa\eta 3} \tilde{u}_{\varkappa;\vartheta\eta} b^{\vartheta}]^{\mathrm{U}}; \qquad \xi \in q\,. \qquad (3.29)_4$$

Amennyiben a (3.3) funkcionálban és a (3.13) variációs elvben az $e^{\mathrm{RS}} = 0$ helyettesítéssel élünk, a (3.13) variációs elvből előállított egyenletek az alábbi értelmet nyerik:

— a (3.23) egyenlet megfelel a duál rendszer $(2.6)_1$ kompatibilitási mezőegyenletének;

— a (3.24) egyenlet megfelel a duál rendszer $(2.6)_2$ kompatibilitási peremfeltételének az St peremrészen;

— a (3.25) egyenletek megfelelnek a duál rendszer $(2.6)_{3,4}$ elmozdulási peremfeltételének az Su peremrészen. Utóbbiakból (2.8) és (2.9) szerint következik, hogy a kompatibilitási peremfeltétel az *Su* peremrészen is teljesül.

Összefoglalóan megállapíthatjuk a 3.7 pont eredményei alapján, hogy a (3.3) duál funkcionál variációiból a teljes (2.4)—(2.6) duál egyenletrendszer következik.

A (3.29) egyenletek (3.25) figyelembevétele mellett azt fejezik ki, hogy az elmozdulásmező és a forgásmező görbe menti deriváltja, következőleg maga az elmozdulásmező és a forgásmező is a q görbén az *Su* peremrészről nézve ugyanaz, mint az *St* peremrészről nézve.

3.8 A (3.4) duál funkcionállal képzett

$$\delta_{\mathrm{a}} M(f_{\mathrm{rs}}, a_{\mathrm{pq}}) = 0\,, \qquad (3.30)$$

$$\delta_{\mathrm{f}} M(f_{\mathrm{rs}}, a_{\mathrm{pq}}) = 0 \qquad (3.31)$$

duál variációs elvekből, a 3.6—3.7 pontok gondolatmenetének megismétlésével az anyagtörvény kivételével a teljes duál egyenletrendszer nyerhető. Ennek részletezésétől eltekintünk.

3.9 Az anyagtörvény és a $(2.4)_{1,2}$ egyenletek teljesülését feltételező $(3.6)_2$ duál funkcionálhoz a

$$\delta_{\mathrm{f}} K(f_{\mathrm{rs}}) = 0 \qquad (3.32)$$

duál variációs elv tartozik.

Az $e^{rs} = 0$ helyettesítéssel $K(f_{rs})$ a teljes kiegészítő energiát adja, és (3.32) nem más, mint a Castigliano-féle variációs elv (a kiegészítő energia minimuma elv). A továbbiakban $e^{rs} = 0$.

Elhagyva a megkülönböztető f jelölést, $(3.6)_2$ alapján a

$$\delta K(f_{rs}) = \delta K_0^V + \delta K_0^U = 0 \qquad (3.33)_1$$

egyenlet írható fel, ahol $(3.6)_{3,5}$ és (3.1) szerint

$$\delta K_0^V = \delta K^V + \delta K_{V0}^T + \delta K_{V_0}^U , \qquad (3.33)_2$$

$$\delta K^V = \int_{(V)} \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} a_{kl;mp} \delta f_{rs} \, dV , \qquad (3.33)_3$$

$$\delta K_{V0}^T = \int_{(St)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} (\varepsilon^{ldp} a_{\varkappa l} \delta h_{\eta d;p} - a_{\varkappa l;p} \delta h_{\eta d}) \, dS , \qquad (3.33)_4$$

$$\delta K_{V0}^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} (a_{\varkappa l} \delta h_{\eta d;p} - a_{\varkappa l;p} \delta h_{\eta d}) \, dS , \qquad (3.33)_5$$

továbbá $(3.6)_4$, $(3.3)_4$, $(3.9)_4$ és (3.20) szerint

$$\delta K_0^U = \delta_h L_0^U = \delta_h L_1^U + \delta_h L_U^Q . \qquad (3.33)_6$$

Jelen esetben az St peremrészen rögzítettek a $\tilde{h}_{ed}(\xi^1, \xi^2)$ és $\tilde{h}_{\eta\vartheta;3}$ (ξ^1, ξ^2) függvények, a $h_{ed}(\xi)$ variációknak tehát a $(3.6)_1$-ből következő alábbi egyenletnek kell eleget tenniük:

$$\varepsilon^{\varkappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p\varkappa} = 0 .$$

Összevetve a legutóbbi egyenletet (3.15)-el, megállapíthatjuk, hogy a $(3.33)_4$ kifejezés átalakítása ugyanúgy történhetik, mint a $(3.9)_3$ képlet második tagjáé. Írhatók tehát — (3.19)-et is figyelembe véve — az alábbi egyenletek:

$$\delta K_{V0}^T = \delta_h K_1^T + \delta_h K_T^Q , \qquad (3.34)_1$$

ahol

$$\delta_h K_1^U = \delta_{\tilde{h}} L_1^T \quad \text{és} \quad \delta_h K_T^Q = \delta_{\tilde{h}} L_T^Q . \qquad (3.34)_{2,3}$$

Hasonlóan adódik $(3.33)_5$ és $(3.14)_3$ összetevéséből, (3.21) figyelembevételével, hogy

$$\delta K_{V0}^U = \delta_h L_{V0}^V = \delta_k L_{V1}^U + \delta_h L_{VU}^Q . \qquad (3.34)_4$$

Az átalakítások eredményeként a (3.32) variációs elv a következőképp írható fel:

$$\delta K(f_{rs}) = \delta K^V + \delta_h K^T + \delta_h L_{V1}^U + \delta_h L_1^U + \\ + \delta_h K_T^Q + \delta_h L_U^Q + \delta_h L_{VU}^Q = 0 . \qquad (3.35)$$

Mivel a (3.35) egyenlet V, St, Su és q tartományon vett integráljai külön-külön zérusnak vehetők, érvényesnek tekintve ismét a *2.3* pont elején megfogalmazott alapfeltevést a feszültségfüggvény-tenzor szerkezetére, valamint a (2.3) transzformációs képletet is, az alábbi megállapításokat tehetjük:

a) A $(3.33)_3$ képlet alapján felírható $\delta K^{V} = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta f_{RS}(x)$ tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{Rkm}\,\varepsilon^{Slp}\,a_{kl;mp} = 0\,; \qquad x \in V. \tag{3.36}$$

b) A (3.34) és a $(3.19)_2$ képletek alapján felírható $\delta K^{T} = \delta K_1^{T} = \tilde{h}L_1^{T} = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta v_d(\xi)$ az St felületrészen tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{3\varkappa\eta}\,\varepsilon^{ldp}\,a_{\varkappa l;p\eta} = 0\,; \qquad \xi \in St\,. \tag{3.37}$$

c) A $(3.21)_2$, $(3.20)_2$ és $(3.22)_5$ képletek alapján felírható $\delta K^{U} = \delta_h L^{U} = \delta_h L^{U}_{V_1} + \delta_h L_1^{U} = 0$ egyenlet szerint, az Su peremrészen fennállnak a (3.25) képletek.

d) A $(3.34)_3$, $(3.19)_3$, $(3.20)_3$ és $(3.21)_3$ képletek alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned}
\delta K^{Q} &= \delta_h K_T^{Q} + \delta_h L_U^{Q} + \delta_h L_{VU}^{Q} = \\
&= \oint_{(q)} \{(b^{\vartheta}\,a_{\vartheta l}\,\delta w^{l})^{T} + (b^{\vartheta}\,\varepsilon^{ldp}\,a_{\vartheta l;p}\,\delta v_d)^{T} - \\
&\quad -(b^{n}\,\tilde{u}_l\,\varepsilon^{ldp}\,\delta h_{\eta d;p})^{U} - \\
&\quad - [b^{\vartheta}\,\varepsilon^{\varkappa\eta 3}(\tilde{u}_{3;\varkappa} - a_{3\varkappa})\,\delta h_{\eta\vartheta}]^{U} + \\
&\quad + [b^{\vartheta}\,\varepsilon^{\varkappa\eta 3}\,\tilde{u}_{[\vartheta;\varkappa]}\,\delta h_{\eta 3}]^{U}\}\,ds = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Feltételezve ezek után, hogy a q görbén

$$(\varepsilon^{ldp}\,\delta h_{\eta d;p})^{U} = (\varepsilon^{ldp}\,\delta h_{\eta d;p})^{T} \qquad \xi \in q\,, \tag{3.39$_1$}$$

$$(\delta h_{\eta d})^{U} = (\delta h_{\eta d})^{T} \qquad \xi \in q\,, \tag{3.39$_2$}$$

és figyelembe véve a (3.18) kifejezéseket, rögtön látszik a (3.38) és (3.26) egyenletek azonossága. Fennállnak tehát a (3.38) egyenletből következően a q görbén a (3.29) egyenletek is.

A *3.9* pont eredményei alapján összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a (3.6) szerinti funkcionállal képzett a $\delta K = 0$ duál variációs elvből a duál rendszer kompatibilitási feltételei, vagyis az

$$a_{pq} = c_{pqkl}\,(\varepsilon^{krm}\,\varepsilon^{lsp}\,f_{rs;mp} + \mathring{\imath}^{\,kl})$$

alakváltozásmező kompatibilitásának feltételei adódnak. Ezek: a (3.36) kompatibilitási mezőegyenletek, a (3.37) kompatibilitási peremfeltétel az St peremrészen, valamint a kompatibilitási peremfeltételt teljesítő (3.25) elmozdulási peremfeltétel az Su peremrészen.

IRODALOM

1. FINZI, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *Rend. Lincei*, Ser. 6., **19** (1934), 578—584; 620—623
2. БЛОХ, В. И.: Функций напржений в теории упругости. *Прикл. Мех.*, 14 (1950), 415—422
3. SOUTHWELL, R. V.: Castigliano's Prinziple of Minimum Strain-Energy and the Conditions of Compatibility for Strain. S. Timoshenko 60th Anniversary Volume, The MacMillan Co., 1938
4. TONTI, E.: Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, **2** (1967), pp. 201—208
5. ODEN, J. T.—REDDY, J. N.: On Dual-Complementary Variational Principles in Mathematical Physics. *Int. J. Engng. Sci.*, **12** (1974), 1—29
6. АБОВСКИЙ, Н. Р.—АНДРЕЕВ, Н. Р.—ДЕРУГА, А. П.: Варицонноые принципы теории упругости и теории оболочек. Изд. „Наука", Москва, 1978
7. WASHIZU, K.: A Note on the Conditions of Compatibility. *Journal of Mathematics and Physics*, **36** (1957), No 4., 306—312
8. KOZÁK, I.: Notes on the Field Equations with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, Tomus **90** (3—4), 221—245
9. KOZÁK, I.: Determination of Compatibility Boundary Conditions in Linear Elastostatics with the Aid of the Principle of Minimum Complemetary Energy. *Publ, Techn. Univ. Heavy Industrie*, Ser. D. Natural Sciences, **33** (1978), 89—112.
10. TONTI, E.: A Mathematical Model for Physical Theories. *Rend. Accad. Lincei*, 52 (1972), 175—181, 350—356

Remarks and Contributions to the Variational Principles of the Linear Elastostatics in Terms of Stress Functions. Dual functionals wherein only three coordinates (suitably selected) of the stress-function tensor differ from zero are interpreted which also permit the analysis in detail of the boundary conditions. The dual functionals defined by the variation of the stress-function tensor yield three compatibility field-equations and the compatibility boundary condition as a necessary and sufficient condition of the compatibility of the deformation field.

Bemerkungen und Beiträge zu den Variationsprinzipien der linearen Elastostatik, aufgeschrieben mit Hilfe von Spannungsfunktionen. Dualfunktionale werden definiert, worin nur drei (in geeigneter Weise ausgewählte) Koordinaten des Tensors der Spannungsfunktionen nicht gleich Null sind und die auch eine ausführliche Untersuchung der Randbedingungen gestatten. Aus den definierten Dualfunktionen durch eine Variation des Tensors der Spannungsfunktionen ergeben sich drei Kompatibilitätsfeldgleichungen und die Kompatibilitätsrandbedingung, als die notwendigen und ausreichenden Bedingungen der Kompatibilität des Verzerrungsfeldes.