

LAPOS HÉJAK NYÚLÁSMENTES ALAKVÁLTOZÁSÁNAK NÉHÁNY KÜLÖNLEGES ESETE

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1980. április 8.-án]

A jelen tanulmány a lapos héjak nyúlásmentes alakváltozásának egyes olyan eseteivel foglalkozik, amelyekben a héj alakváltozási állapotát leíró differenciálegyenletek, illetve függvények különleges egyszerű szerkezetűek annak ellenére, hogy a tanulmány a héj hajlító merevségét is figyelembe veszi.

1. Bevezetés

Az alábbiakban a lapos héjak elméletére támaszkodva olyan eseteket mutatunk be, amelyekben a héj nyúlásmentes alakváltozási állapotát leíró differenciálegyenletek, illetve függvények rendkívül egyszerű szerkezetűek.

Tárgyalásaink feltételezik, hogy a héj anyagának nincs haránttágulása, a héj hajlítási merevsége pedig a héj egész terjedelmében állandó.

2. Alapösszefüggések

Vizsgálatainkat olyan $0(x, y, z)$ derékszögű tengelyrendszerben végezzük, amelynek z tengelye függőleges, pozitív z tengelyága pedig lefelé irányul. Ebben a koordinátarendszerben a héj alakját a

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

alakfüggvénnyel, a héjra ható függőleges megoszló teher fajlagos vetületi értékét a

$$\bar{p} = \bar{p}(x, y) \quad (2)$$

teherfüggvénnyel, a héj feszültségi állapotát az

$$F = F(x, y) \quad (3)$$

feszültségfüggvénnyel, a héj középfelületi pontjának függőleges elmozdulását pedig a

$$w = w(x, y) \quad (4)$$

elmozdulásfüggvénnyel jellemezzük.

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. út 31.

A héj falvastagságát t -vel, a héj anyagának rugalmassági tényezőjét E -vel, a héj húzási merevségét D -vel, hajlító merevségét K -val jelöljük, ahol

$$D = Et, \quad K = \frac{Et^3}{12}. \quad (5)$$

A héj x, y irányú $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_y$ redukált feszítőerői a [feszültségfüggvény második deriváltjaival vannak kapcsolatban:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (6)$$

a héj keresztmetszeteire ható $\bar{M}_x, \bar{M}_{xy}, \bar{M}_y$ redukált erőpárok pedig a w elmozdulásfüggvény második deriváltjaival állnak összefüggésben:

$$\bar{M}_x = K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \bar{M}_{xy} = K \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}, \quad \bar{M}_y = K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7)$$

A lapos héjak Wlassow-féle elmélete szerint a csupán függőleges erőkkal terhelt héjak erőtanai viselkedése két negyedrendű differenciálegyenlettel írható le. Ez a két egyenlet:

$$\square F - K\Delta\Delta F + \bar{p} = 0, \quad (8)$$

$$\square w + \Delta\Delta F = 0,$$

ahol a Δ , illetve $\square$ műveletjelek értelme:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (9)$$

$$\square \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

A (7) differenciálegyenletek megoldásakor a héjperem minden pontján két feltétel teljesíthető, illetve teljesítendő F -re is, w -re is.

3. A nyúlásmentes alakváltozás alapképletei

A héj alakváltozását akkor mondjuk nyúlásmentesnek, ha a terhelés hatására a héj középfelületének vonalelemei semmiféle hosszváltozást sem szenvednek. Ilyenkor nyilván

$$\bar{N}_x = 0, \quad \bar{N}_{xy} = 0, \quad \bar{N}_y = 0. \quad (10)$$

Minthogy a (6) képletek szerint az $\bar{N}_x$, $\bar{N}_{xy}$, $\bar{N}_y$ membránerők az F feszültségfüggvény második deriváltjai, a (10) egyenletekből az következik, hogy nyúlásmentes alakváltozás esetében az F függvény a helykoordinátáknak legfeljebb lineáris függvénye lehet. Ezek szerint a nyúlásmentes alakváltozás előfeltétele, hogy a feszültségfüggvény

$$F = Ax + By + C \quad (11)$$

alakú legyen, ami a membránerők szempontjából lényegtelen lineáris tagokat elhagyva így írható:

$$F = 0. \quad (12)$$

Nyúlásmentes alakváltozás esetében a lapos héjak elméletének (8) jelű differenciálegyenletei a következő egyszerűbb alakúvá lesznek:

$$\begin{aligned} -K\Delta w + \bar{p} &= 0, \\ \square w &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Olyankor, amidőn a héj felülete terheletlen, vagyis amikor

$$\bar{p} = 0,$$

a nyúlásmentes alakváltozás (13) alatti feltételei még tovább egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, \\ \square w &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Ilyenkor csak a héj peremére hatnak erők, mégpedig erőpárok.

A (13) és (14) képletek véges K érték esetében is érvényesek.

4. Példák

Az alábbiakban a nyúlásmentes alakváltozásra néhány egyszerű példát mutatunk be. Valamennyi példában feltételezzük, hogy

$$\bar{p} = 0, \quad (15)$$

tehát az alakváltozási viszonyokat a (14) képletek szabályozzák.

1. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$c = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

alakú, ahol az A , B , C állandók, akkor a (14) feltételt kielégítő elmozdulásfüggvények

$$w = Bx^2 + 2(A + C)xy + By^2,$$

és

$$w = (B^2 - AC)x^3 + 3(A^2 + BC)x^2y + \\ + 3(C^2 + AB)xy^2 + (B^2 - AC)y^3.$$

Természetesen, a (14) feltételeknek a fenti elmozdulásfüggvények lineáris kombinációi is megfelelnek.

2. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$z = A(x^2 + y^2), \quad A = \text{konst}$$

alakú, akkor a nyúlásmentes alakváltozás (14) alatti feltételei minden olyan esetben teljesülnek, amikor a w elmozdulásfüggvény biharmonikus.

3. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$z = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

ahol A , B , C , D állandók, akkor a nyúlásmentes alakváltozás (14) alatti feltételeit kielégítik a

$$w = (B^2 - AC)x^2 + (BC - AD)xy + (C^2 - BD)y^2$$

és a

$$w = (3ABC - 2B^3 - A^2D) + 3(2AC^2 - B^2C - 2ABD)x^2y - \\ - 3(2B^2D - BC^2 - ACD)xy^2 + (3BCD - 2C^3 - AD^2)y^3$$

elmozdulásfüggvények, valamint azok lineáris kombinációi.

4. példa

Olyankor, amikor a héj alakfüggvénye

$$c = A(x^4 + y^4), \quad A = \text{konst}$$

alakú, akkor a (14) feltételnek megfelelő elmozdulásfüggvény

$$w = (Bx^4 - y^4), \quad B = \text{konst.}$$

Megjegyzés

A fenti példák esetében a nyúlásmentes alakváltozás (14) feltételei akkor is teljesülnek, ha a z és w függvények szerepet cserélnek.

IRODALOM

- FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1934
- WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag, Berlin 1958
- BÖLCSKEI, E.: Lapos héjak elmélete és gyakorlati alkalmazása. *Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* 6 (1966), 5—6. sz.
- KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* 3 (1971), 19—38.

Some Special Cases of Inextensional Deformation of Shallow Shells.—Present paper treats some cases of inextensional deformations of shallow shells having the peculiarity that the functions and differential equations describing the state of deformation are of extremely simple form. The flexural rigidity of the shell is not neglected.

Einige Speziellfälle der dehnungslosen Formänderung von flachen Schalen.—Es werden einige Fälle der dehnungslosen Formänderung flacher Schalen behandelt, wo sich die den Formänderungszustand beschreibenden Funktionen und Differentialgleichungen außergewöhnlich einfach gestalten. Die Biegesteifigkeit der Schale ist nicht vernachlässigt.