NYEREG ALAKÚ, OLDALNYOMÁSMENTES, LAPOS HIPERBOLIKUS PARABOLOIDHÉJAK EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉS ALATTI EGYENSÚLYI ÚTJÁNAK NEMLINEÁRIS VIZSGÁLATA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett: 1978. december 28-án]

Ez a dolgozat egy három részből álló sorozat befejező része. A sorozat *első* részében a HP-héjak membrán megoldásának létezési és egyértelműségi kérdéseit, valamint a felület kinematikai határozatlanságát vizsgáltuk. Ezután a *második* részben a *deformálatlan* alaphelyzetből történő elágazási jelenséget tárgyaltuk. A jelen *harmadik* részben egyrészt arra kívánunk választ adni, hogy bekövetkezhetik-e a tönkremenetel elágazás nélkül, *átpattanás* révén (ill. egyáltalán milyen a nagy alakváltozásos teher — lehajlás diagramok jellege). Ezen kívül megvizsgáljuk azt is, hogy a *deformált* alaphelyzetből történő elágazáson túli teherbírás emelkedő-e vagy eső.

Jelölések

$C_{ij} = \cos\frac{i\pi}{2a}x \cdot \cos\frac{j\pi}{2b}y$;

$D = \frac{Eh}{(1-\mu^2)}$ fajlagos nyúlási merevség;

E rugalmassági modulus;

F a középfelületi erők feszültségfüggvénye $[F^{\cdot\cdot} = N_x, F^{\cdot\prime} = -N_{xy}, F^{\prime\prime} = N_y]$;

F_0 az alaphelyzet feszültségfüggvénye;

az F_0 függvény első variációja $[F = F_0 + \overline{F})$;

$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ fajlagos hajlítási merevség;

M_x, M_y, M_{xy} a héj hajlítónyomatékai, csavarónyomatéka;

N_x, N_{xy}, N_y a középfelületi erők fajlagos értékei;

$S_{ij} = \sin\frac{i\pi}{2a}x \cdot \sin\frac{j\pi}{2b}y$;

U_b a hajlítási erők potenciálja;

U_m a középfelületi erők potenciálja;

V a külső erők potenciálja;

$2a$, $2b$ az x, ill. y irányú peremvetületek hossza;

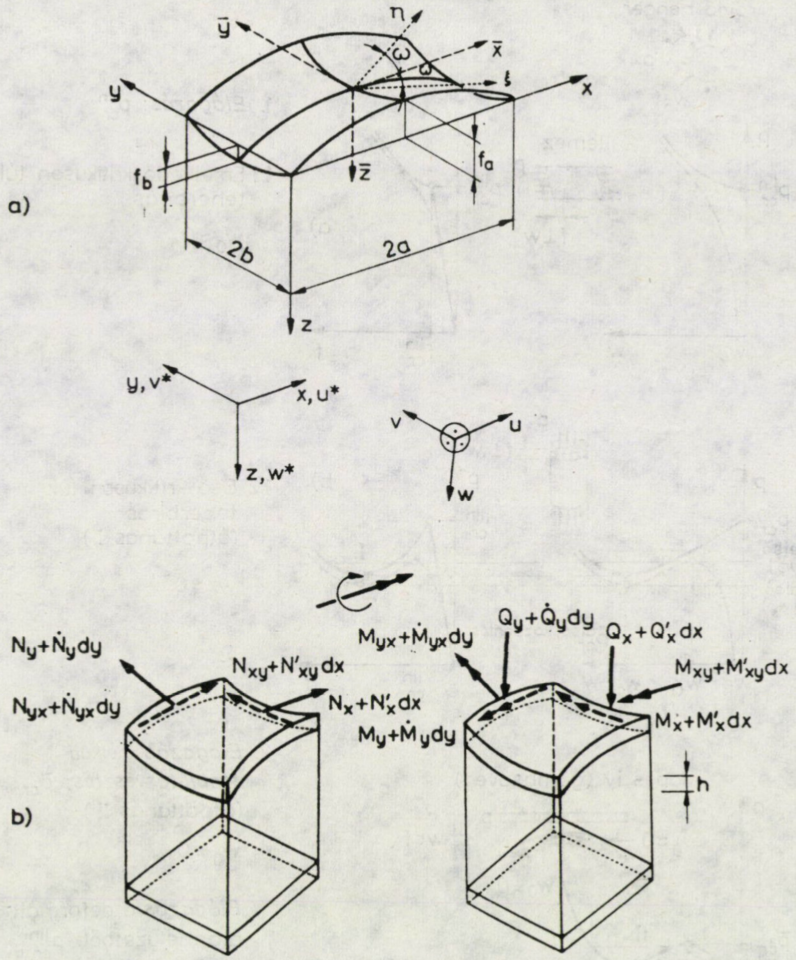
* Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

f_a, f_b	az x, ill. y irányú ívek nyílmagasságai;
h	a héj vastagsága;
i, ill. j	x, ill. y irányú félhullámok száma;
p	a z tengely irányába mutató, egyenletesen megoszló, szimmetrikus, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi teher intenzitása;
p_{cr}^{lin}	a lineáris kritikus teher;
$\bar{p}_{cr}$	az átpattanási kritikus teher;
$p_{cr,\,d}^{lin}$	a deformált alaphelyzetből elágazó kihajlás lineáris kritikus terhe;
u, v	az x, ill. y irányú felületi érintők irányába eső eltolódások;
$z(x, y)$; $\bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$	a héj középfelületének ordinátái;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása $[w = w_0 + \bar{w})$;
w_0	a középfelületi pontoknak az alaphelyzetben bekövetkező normális irányú eltolódása;
$\bar{w}$	az elágazási jelenségeknél kialakuló normális irányú eltolódásvariáció (δw_0);
w_k	a kezdeti hullámosság amplitúdója;
$\alpha = f_a/f_b$	nyílmagasságarány;
$\beta = a/h$	héjparaméter;
$\gamma = a/b$	oldalarány;
δ	a variációképzés szimbóluma (rövidítve: $\delta w_0 \equiv \bar{w}$);
μ	a harántkontrakciós tényező [0,2];
ξ	a $\bar{z}$ tengelyre illeszkedő síkban lévő, az első egyenes felületi alkotósereg irányába mutató koordináta;
Π	a külső és belső potenciális energiák összege;
$\varrho = f_b/b$	héjparaméter;
ω	az iránysíkok közötti szög fele;
$\Delta\Delta(\;) = (\;)^{IV} + 2(\;)^{II} + (\;)^{::}$	a biharmonikus differenciál-operátor;
$L_p(f_1, f_2) = f_1^{II} f_2^{::} - 2 f_1^{\cdot I} f_2^{\cdot I} + f_1^{::} f_2^{II}$	a Pucher-féle differenciál-operátor.

1. Bevezetés

Tetszetős alakjuk és az egyenes alkotóik nyújtotta kedvező kivitelezési lehetőségeik miatt egyre gyakrabban építenek hiperbolikus paraboloid alakú héjszerkezeteket.

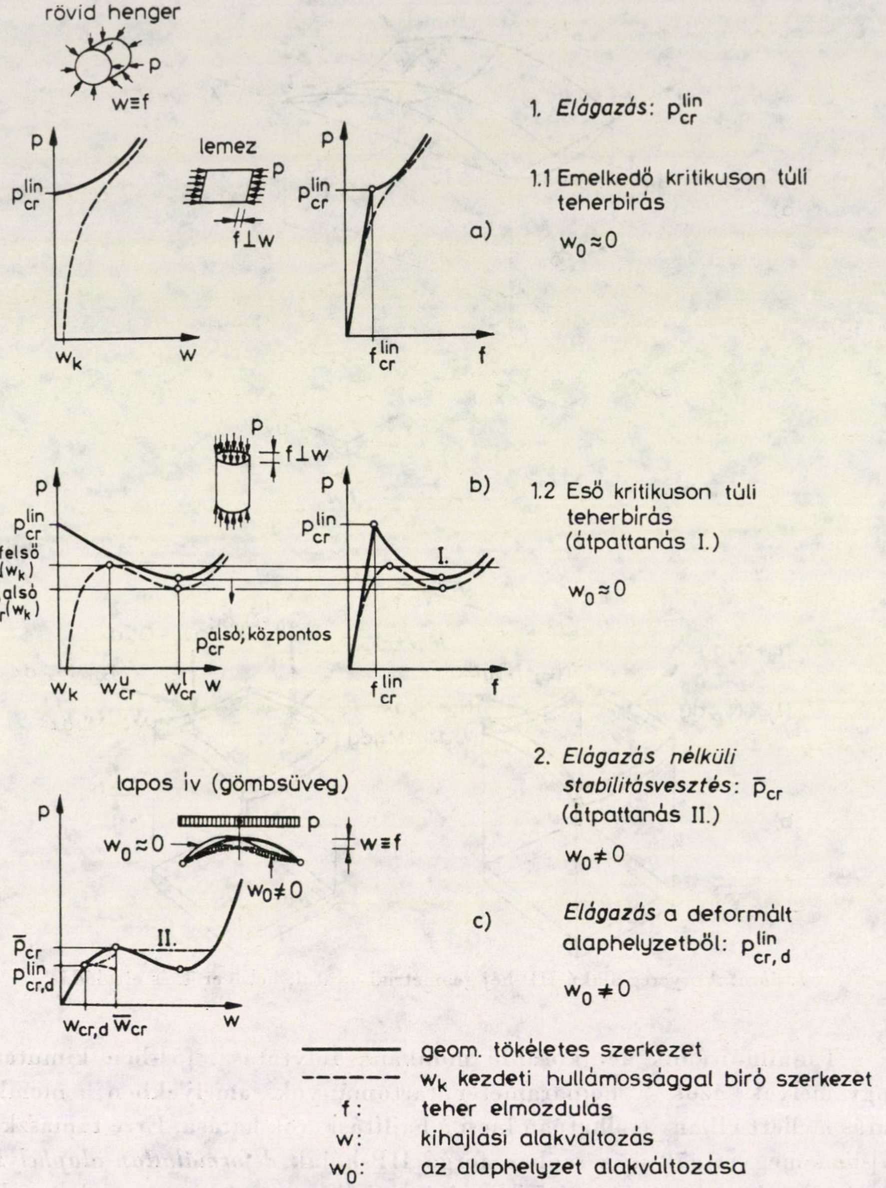
Ebben a dolgozatban a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos hiperbolikus paraboloid (továbbiakban HP) héjak (1. ábra) egyenletesen megoszló erők hatása alatti nagy alakváltozásos egyensúlyi útjának főbb jellegzetességeit elemezzük.



1. ábra. **A nyereg alakú HP héj geometriai adatai; belső erők és eltolódás**

Tanulmányunk két korábbi munkánk folytatása. [5]-ben kimutattuk, hogy melyek azok a héjparaméter tartományok, amelyekben a membránhatás mellett elhanyagolhatóan kicsi a hajlítási erők hatása. Erre támaszkodva [6]-ban megvizsgáltuk a szóban forgó HP-héjak *deformálatlan alaphelyzetből* ($w_0 = 0$) *bekövetkező elágazási jelenségének* jellegzetességeit. A vasbeton héjak legtöbbjét jól jellemző geometriai arányokhoz meghatároztuk a lineáris kritikus terhek csipkegörbéit.

A szeminormál héj ($f_a/f_b = 1$) és a hozzá közel eső nyílmagasságarányú héjak terheiket döntően hajlítási erőkkel hordják. Ezen héjakban középfelületi erőket csak a terhelés azon komponensei okoznak, amelyeknek alakja eltér a szeminormál héj nyúlásmentes lehajlási alakjától [5]. A fentiek bizonyítják, hogy e héjak stabilitási viselkedését *csak nemlineáris* elmélettel lehet tisztázni.



2. ábra. **Stabilitási jelenségek teherbírási jelleggörbéinek néhány alapesete**

A nemlineáris elmélettel számítható egyensúlyi út **jellegének ismeretére természetesen azon HP héjak esetében is szükség van, amelyek membránhéjaknak tekinthetők.**

Jelen dolgozatunkban tehát arra a kérdésre akarunk választ adni, hogy az oldalnyomásmentes, nyereg alakú HP héjak teherlehajlás jelleggörbéje a 2. ábrán feltüntetett jellegzetes teherbírási jelleggörbék melyikével azonos

típusú. Itt az az alapvető kérdés, hogy a deformálatlan alaphelyzetből történő elágazáson túli teherbírás *emelkedő-e* vagy *eső*, ill. a tönkremenetel bekövetkezhet-e elágazási jelenség nélkül, *átpattanás* révén.

Előfordulhat az is, hogy a terhelés alatt már összenyomódott héj egy bizonyos helyzetében — az átpattanási kritikus teher elérése előtt — elágazási jelenség lép fel. Ennek a stabilitásvesztési lehetőségnek a vizsgálatára is kitérünk.

Elméleti eredményeinket a gyakorlati tervezés igényeinek megfelelően diagramokkal és táblázatokkal szemléltetjük.

2. Alapfeltevések

A teherbírási jelleggörbéket a lapos héjak másodrendű elmélettel kapott nemlineáris egyensúlyi és kompatibilitási egyenletei felhasználásával a *Galerkin-módszer*rel állítjuk elő.

Mint ismeretes, a geometriai nemlinearitást figyelembe vevő ezen egyenletek a w eltolódás deriváltjai hatványsorainak másodfokú tagjait is bevonják a számításba (Donnell-féle tagok). A Donnell-féle egyenleteknek két fő jellegzetességük van: egyrészt feltételezik a héj *laposságát* (legalábbis egy horpadási hullámon belül), másrészt pontosságuk a w függvény deriváltjait leíró hatványsorok *másodfokú* tagjaiig terjed („korlátozottan" nagy alakváltozások).

A héj anyagát *lineárisan rugalmasnak* tekinthetjük.

Az egész felületre kiterjedő lehajlási alakokat vizsgáljuk.

A héj középfelületét geometriailag tökéletesnek tekintjük.

3. A teherbírási jelleggörbék előállítása

3.1 Az általános egyenletek

A p = p(x, y) megoszló terhelésnek alávetett héjak U belső potenciális energiája a középfelületi erők U_m, valamint a hajlítási erők U_b potenciális energiájának összegeként így írható fel [13], [18]:

$$U_m = \frac{1}{2Eh}\int_0^{2a}\int_0^{2b} [F^{||2} - 2\mu F^{\cdot\cdot} F^{||} + F^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu) F^{\cdot|2}]\, dx\, dy\,, \quad (3.1)$$

$$U_b = \frac{K}{2}\int_0^{2a}\int_0^{2b} [w^{||2} + 2\mu w^{\cdot\cdot} w^{||} + w^{\cdot\cdot 2} + 2(1-\mu) w^{\cdot|2}]\, dx\, dy\,, \quad (3.2)$$

$$U = \int_0^{2a}\int_0^{2b} u_0\, dx\, dy = U_m + U_b\,. \quad (3.3)$$

Itt u_0 a fajlagos belső potenciális energia. A külső erők potenciális energiája:

$$V = -\int_0^{2a}\int_0^{2b} pw\,dx\,dy\,. \tag{3.4}$$

A rendszer teljes potenciális energiája (π a fajlagos teljes potenciális energia):

$$\Pi = \int_0^{2a}\int_0^{2b} \pi\,dx\,dy = U + V. \tag{3.5}$$

Stabilis egyensúlyi állapot esetén a potenciális energiának minimuma van, és ez a minimum olyan w extrémális függvényhez tartozik, amely a Π funkcionált minimummá (stacionárius értékké) teszi:

$$\delta\Pi = 0\,. \tag{3.6}$$

A fenti variációs feladathoz a

$$\frac{\partial\pi}{\partial w} - \left(\frac{\partial\pi}{\partial w^{|}}\right)^{|} - \left(\frac{\partial\pi}{\partial w^{\cdot}}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\partial\pi}{\partial w^{||}}\right)^{||} + \left(\frac{\partial\pi}{\partial w^{\cdot|}}\right)^{\cdot|} + \left(\frac{\partial\pi}{\partial w^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0 \tag{3.7}$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet tartozik. A kijelölt műveleteket elvégezve ($F = F[w]$), a feladat közismert egyensúlyi differenciálegyenletéhez [12], [18] jutunk:

$$K\Delta\,\Delta w - L_p(w, z) - L_p(F, w) - p = 0. \tag{3.8}$$

Hozzuk a középfelületi erők potenciális energiáját az

$$U_m = \int_0^{2a}\int_0^{2b} \Big\{ F^{||}\left(v^{\cdot} - w z^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2} w^{\cdot 2}\right) - F^{\cdot|}(u^{\cdot} + v^{|} + w^{|} w^{\cdot}) +$$

$$+ F^{\cdot\cdot}\left(u^{|} - wz^{||} + \frac{1}{2} w^{|2}\right) - \frac{1}{2Eh}\left[F^{||2} - 2\mu F^{\cdot\cdot} F^{||} + F^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu) F^{\cdot|2}\right]\Big\}\, dxdy \tag{3.9}$$

alakra. Ennek felhasználásával — a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján — a

$$\delta U = 0 \tag{3.10}$$

F szerinti variációs feladatból, a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{||}}\right)^{||} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{\cdot|}}\right)^{\cdot|} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0 \tag{3.11}$$

alakú Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet által kijelölt műveleteket elvégezve, adódik a középfelületi deformációelemek kompatibilitását kifejező egyenlet [12], [18]:

$$\Delta\Delta\, F + D(1 - \mu^2)\left[L_p(w, z) + \frac{1}{2} L_p(w, w)\right] = 0. \tag{3.12}$$

3.2 *A lehajlási- és a feszültségfüggvény*

Ismeretes, hogy a Galerkin-módszer úgy is alkalmazható, hogy mind a w lehajlási alakot, mind az F feszültségfüggvényt egyidejűleg lineárisan független tagokból álló összegként ábrázoljuk [18].

A w függvény minden egyes tagjainak ki kell elégítenie a feladat következő peremfeltételeit:

$$w_{ij0}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0, \qquad w_{ij0}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0, \tag{3.13a—d}$$

$$w''_{ij0}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0, \qquad \ddot{w}_{ij0}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0. \tag{3.14a—d}$$

Az F feszültségfüggvény minden egyes tagjának eleget kell tennie az

$$F''_{ij0}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0, \qquad \ddot{F}_{ij0}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0 \tag{3.15a—d}$$

statikai peremfeltételeknek. Ez az *oldalnyomásmentesség* feltétele.

Ezek alapján a két függvényt a

$$w = \sum_{i}^{I_1} \sum_{j}^{J_1} w_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_{i}^{I_1} \sum_{j}^{J_1} w_{ij0}, \tag{3.16}$$

$$i = 1,\ 3,\ 5, \ldots, I_1$$

$$j = 1,\ 3,\ 5, \ldots, J_1$$

$$F = \sum_{i}^{I_2} \sum_{j}^{J_2} F_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_{i}^{I_2} \sum_{j}^{J_2} F_{ij0} \tag{3.17}$$

$$i = 1, 3, 5, \ldots, I_2$$

$$j = 1, 3, 5, \ldots, J_2$$

függvénysorokkal ábrázolhatjuk. A fenti egyenletekben

$$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2\,a} \times \sin \frac{j\pi}{2b} y. \tag{3.18}$$

3.3 *Megoldás Galerkin-módszerrel*

A Galerkin-módszer ezen változatának alábbi két definiáló egyenlete a virtuális elmozdulások, ill. a virtuális erők tételéből (a Hooke-törvény felhasználásával) variációs módszerekkel származtatható [18]:

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} X\, S_{i'j'}\, dx\, dy = 0, \tag{3.19}$$

$$i' = 1, 2, 3, \ldots, I_1$$

$$j' = 1, 2, 3, \ldots, J_1$$

$$\int_0^{2a}\int_0^{2b} Y\, S_{i'j'}\, dx\, dy = 0. \tag{3.20}$$

$$i' = 1, 2, 3, \ldots, I_2$$

$$j' = 1, 2, 3, \ldots, J_2$$

Az első egyenletben szereplő X hibafüggvény a (3.8) egyensúlyi egyenletnek a (3.16), (3.17) összefüggések behelyettesítésével kapható baloldala. A második egyenletben szereplő Y hibafüggvény a (3.12) kompatibilitási egyenletnek a (3.16), (3.17) függvények behelyettesítésével előálló baloldala. Ha az X és Y hibafüggvényeket a w és az F függvények S_{ij} tényezőinek trigonometrikus soraként képzeljük el, akkor belátható, hogy a (3.19) és (3.20) egyenletek az X és Y hibafüggvények zérusához való tartásának követelményét fejezik ki (X és Y ortogonális S_{ij}-re).

Jelen esetben mind a w, mind az F függvény tagjainak száma kettő lesz: egy $i_1 j_1$ és egy $i_2 j_2$ indexszel ellátott tag.

A (3.19) és (3.20) egyenletek által kijelölt műveleteket elvégezve az alábbi nemlineáris egyenletrendszer adódik:

$$a_{11}\frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_{12}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{13}\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\,\frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{14}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{F_{i_2 j_2}}{E} +$$

$$+ a_{15}\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\,\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{16}\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{17}\frac{p}{E} = 0,$$

$$a_{21}\frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{22}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{23}\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\,\frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{24}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{F_{i_2 j_2}}{E} +$$

$$+ a_{25}\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\,\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{26}\frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{25}\frac{p}{E} = 0, \tag{3.21a—d}$$

$$a_{31}\frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{32}\frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_{33}\left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\right)^2 + a_{34}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{35}\left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\right)^2 = 0,$$

$$a_{41}\frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{42}\frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{43}\left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\right)^2 + a_{44}\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\,\frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{45}\left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h}\right)^2 = 0\,.$$

Az egyenletrendszer együtthatói:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\pi^4}{192(1-\mu^2)}\,\frac{Ebh}{\beta^3}\,\frac{1}{a_{i_1 j_1}}, \quad a_{12} = -\frac{2}{3}\pi^2\frac{Eh}{ab}\,i_1 j_1,\\
&\qquad a_{13} = a_{24},\\
a_{14} &= 2\pi^2\,\frac{Eh}{ab}\,c_{i_2 j_2 i_1 j_1} = a_{15},\ a_{16} = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{Ef_b}{ab}\,b_{i_1 j_1},\\
&\qquad a_{17} = -\frac{16}{\pi^2}\,Eab\,\frac{1}{i_1 j_1},\\
a_{21} &= \frac{\pi^4}{192(1-\mu^2)}\,\frac{Ebh}{\beta^3}\,\frac{1}{a_{i_2 j_2}},\ a_{22} = a_{14},\\
&\qquad a_{23} = -\frac{2}{3}\pi^2\,\frac{Eh}{ab}\,i_2 j_2,\\
a_{24} &= 2\pi^2\frac{Eh}{ab}\,c_{i_1 j_1 i_2 j_2} = a_{25},\ a_{26} = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{Ef_b}{ab}\,b_{i_2 j_2},\\
&\qquad a_{27} = -\frac{16}{\pi^2}\,Eab\,\frac{1}{i_2 j_2},\\
a_{31} &= \frac{\pi^4}{16}\,\frac{Eb}{a^3}\,\frac{1}{a_{i_1 j_1}},\ a_{32} = -\frac{\pi^2}{2}\,\frac{Eh^2 f_b}{ab}\,b_{i_1 j_1},\\
&\qquad a_{33} = \frac{\pi^2}{3}\,\frac{Eh^3}{ab}\,i_1 j_1,\\
a_{34} &= -2\pi^2\frac{Eh^3}{ab}\,c_{i_2 j_2 i_1 j_1},\ a_{35} = \frac{a_{44}}{2},\\
a_{41} &= \frac{\pi^4}{16}\,\frac{Eb}{a^3}\,\frac{1}{a_{i_2 j_2}},\ a_{42} = -\frac{\pi^2}{2}\,\frac{Eh^2 f_b}{ab}\,b_{i_2 j_2},\\
&\qquad a_{43} = \frac{a_{34}}{2},\\
a_{44} &= -2\pi^2\frac{Eh^3}{ab}\,c_{i_1 j_1 i_2 j_2},\ a_{45} = \frac{\pi^2}{3}\,\frac{Eh^3}{ab}\,i_2 j_2 .
\end{aligned}\right| \qquad (3.22\text{a—z})$$

A fenti együtthatókban a következő segédmennyiségek szerepelnek:

$$\begin{aligned}
a_{i_1 j_1} &= \frac{1}{(i_1^2+\gamma^2 j_1^2)^2},\quad b_{i_1 j_1} = \alpha j_1^2 - i_1^2,\\
c_{i_1 j_1 i_2 j_2} &= \frac{i_2^2 j_2^2\,(i_1^2 j_1^2 - 2\,(i_1^2 j_2^2 + i_2^2 j_1^2))}{i_1 j_1\,(4\,i_2^2 - i_1^2)(4\,j_2^2 - j_1^2)} .
\end{aligned} \qquad (3.23\text{a–c})$$

Az $a_{i_2j_2}$, $b_{i_2j_2}$, $c_{i_2j_2i_1j_1}$ mennyiségek úgy számíthatók, hogy az i_1 szám helyébe i_2-t és a j_1 szám helyébe j_2-t írunk és megfordítva.

A (3.21 a—d) egyenletrendszer összevonható egy vegyes harmadfokú egyenletté. Ha a (3.21 c—d) egyenletekből kifejezzük az

$$\frac{F_{i_1j_1}}{E}\text{,} \quad \text{és} \quad \frac{F_{i_2j_2}}{E}$$

értékeket, majd ezeket behelyettesítjük a (3.21 a—b) egyenletekbe, akkor a (3.21 a) egyenlet az alábbi vegyes harmadfokú algebrai egyenletté válik:

$$A_0\frac{w_{i_1j_1}}{h}+B_0\frac{w_{i_1j_1}}{h}\frac{w_{i_2j_2}}{h}+C_0\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^2+D_0\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^2\frac{w_{i_2j_2}}{h}+$$

$$+E_0\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^3+F_0\frac{w_{i_2j_2}}{h}+G_0\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^2+ \qquad (3.24)$$

$$+H_0\frac{w_{i_1j_1}}{h}\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^2+I_0\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^3=-\frac{p}{E}\,.$$

Az ugyanilyen felépítésű — a (3.21 b) egyenletből származó — másik egyenlet együtthatóit — A_{00}, — B_{00}, . . ., — I_{00}-lal jelöljük.
Ha a (3.24) egyenletből kivonjuk a — A_{00}, — B_{00}, . . ., — I_{00} együtthatójú egyenletet, akkor megkapjuk a feladat „karakterisztikus" egyenletét:

$$A\frac{w_{i_1j_1}}{h}+B\frac{w_{i_1j_1}}{h}\frac{w_{i_2j_2}}{h}+C\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^2+D\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^2\frac{w_{i_2j_2}}{h}+E\left(\frac{w_{i_1j_1}}{h}\right)^3+$$

$$+F\frac{w_{i_2j_2}}{h}+G\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^2+H\frac{w_{i_1j_1}}{h}\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^2+I\left(\frac{w_{i_2j_2}}{h}\right)^3=0. \qquad (3.25)$$

A (3.25) egyenletben szereplő együtthatók a következő alakúak:

$$A=A_0+A_{00},\ B=B_0+B_{00},\ldots,I=I_0+I_{00}, \qquad (3.26)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= -i_1 j_1 \left[\frac{\pi^6}{3072\,(1-\mu^2)} \frac{1}{a_{i_1 j_1}} \frac{1}{\beta^4} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\gamma\varrho}{\beta} \right)^2 b^2_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \right], \\
A_{00} &= 0, \\
B_0 &= -\pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho\, i_1 j_1 \,[2\, a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2}]\, c_{i_2 j_2 i_1 j_1}, \\
B_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho i_2 j_2 \,[2\, a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} + a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}]\, c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, \\
C_0 &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho\, i_1^2 j_1^2 a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}, \\
C_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho\, i_2 j_2 \left[a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} + \frac{1}{2} a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} \right] c_{i_2 j_2 i_1 j_1}, \\
D_0 &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_1 j_1 \,[2\, i_1 j_1 a_{i_1 j_1} - 6\, c_{i_1 j_1 i_2 j_2} a_{i_2 j_2}]\, c_{i_2 j_2 i_1 j_1}, \\
D_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_2 j_2 \left[-2 \left(-2\, c^2_{i_2 j_2 i_1 j_1} + \frac{1}{3} i_1 j_1 c_{i_1 j_1 i_2 j_2} \right) a_{i_1 j_1} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(-\frac{2}{3} i_2 j_2 c_{i_2 j_2 i_1 j_1} + 4\, c^2_{i_1 j_1 i_2 j_2} \right) a_{i_2 j_2} \right], \\
E_0 &= -2\,\pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_1 j_1 \left[a_{i_2 j_2} c^2_{i_2 j_2 i_1 j_1} + \frac{1}{9} i_1^2 j_1^2 a_{t_1 j_1} \right], \\
E_{00} &= -2\,\pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_2 j_2 \left[\frac{1}{3} i_1 j_1 a_{i_1 jl} - a_{i_2 j_2} c_{i_1 j_1 i_2 j_2} \right] c_{i_2 j_2 i_1 j_1},
\end{aligned}\right\} \text{(3.27 a–j)}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -A_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
G_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -C_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
G_{00}(i_2, j_2, i_1, i_1) &= -C_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
H_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -D_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
H_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -D_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
I_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -E_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
I_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -E_0(i_1, j_1, i_2, j_2).
\end{aligned}\right\} \text{(3.28 a–h)}$$

A (3.28 a—h) egyenletekben a zárójeles szimbólumok arra utalnak, hogy az F_{00}, G_0, . . ., I_{00} mennyiségeket a $-A_0$, $-C_{00}$, . . ., $-E_0$ függvényekből az $i_1 \to i_2$, $j_1 \to j_2$, $i_2 \to i_1$, $j_2 \to j_1$ változócserével lehet megkapni.
Ha bevezetjük a

$$\frac{w(a, b)}{h} = \frac{w}{h} = \frac{w_{i_1 j_1}}{h} S^0_{i_1 j_1} + \frac{w_{i_2 j_2}}{h} S^0_{i_2 j_2} \tag{3.29}$$

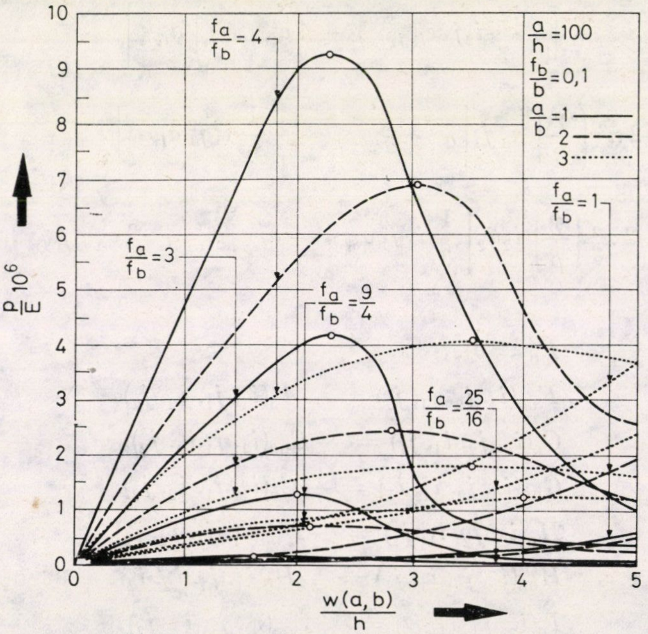
változót, a (3.25) „*karakterisztikus*" *egyenlet*

$$a_0 + a_1 \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_2 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\right)^2 + a_3 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h}\right)^3 = 0 \tag{3.30}$$

alakban írható fel, ahol

$$S^0_{i_1 j_1} = \sin\frac{i_1 \pi}{2} \sin\frac{j_1 \pi}{2}, \quad S^0_{i_2 j_2} = \sin\frac{i_2 \pi}{2} \sin\frac{j_2 \pi}{2}, \tag{3.31a—b}$$

$$a_0 = \frac{F}{S^0_{i_2 j_2}} \frac{w}{h} + G \left(\frac{w}{h}\right)^2 + \frac{I}{S^0_{i_2 j_2}} \left(\frac{w}{h}\right)^3,$$

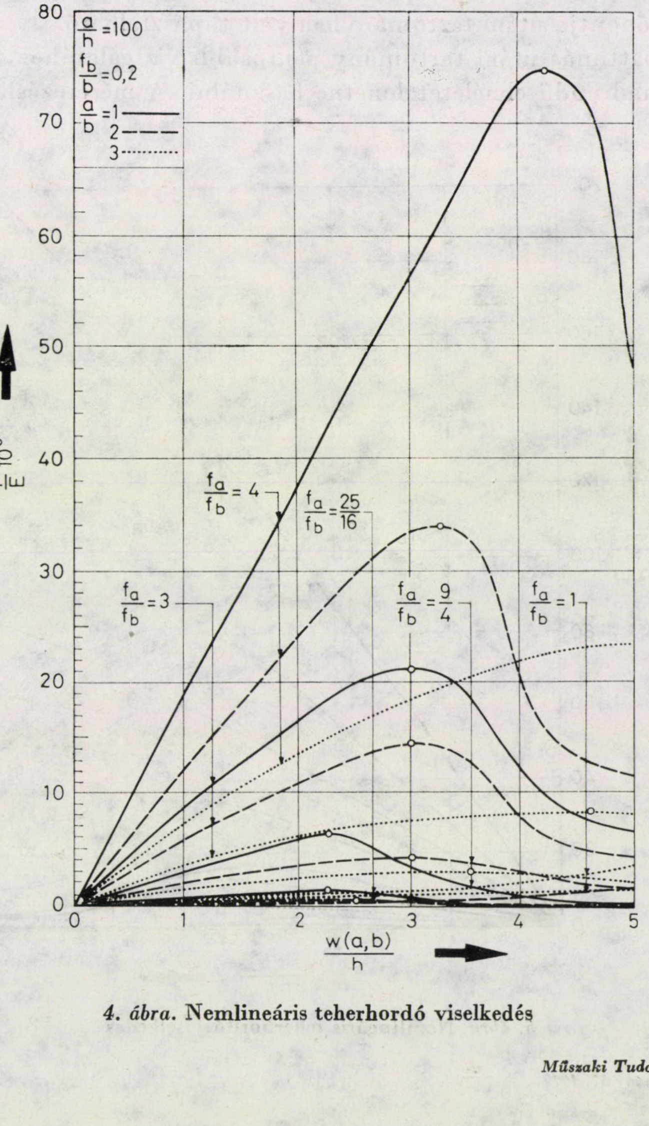


3. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

$$a_1 = A - \frac{F}{S^0_{i_2 j_2}} S^0_{i_1 j_1} + \left(\frac{B}{S^0_{i_2 j_2}} - 2\,G\,S^0_{i_1 j_1}\right)\frac{w}{h} + \left(H - \frac{3\,I}{S^0_{i_2 j_2}}\,S^0_{i_1 j_1}\right)\left(\frac{w}{h}\right)^2, \quad (3.32\text{a—d})$$

$$a_2 = -\frac{B}{S^0_{i_2 j_2}} S^0_{i_1 j_1} + C + G + \left(\frac{D}{S^0_{i_2 j_2}} - 2H\,S^0_{i_1 j_1} + 3\,\frac{I}{S_{i_2 j_2}}\right)\frac{w}{h},$$

$$a_3 = -\frac{D}{S^0_{i_2 j_2}} S^0_{i_1 j_1} + E + H - \frac{I}{S^0_{i_2 j_2}} S^0_{i_1 j_1}.$$



4. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

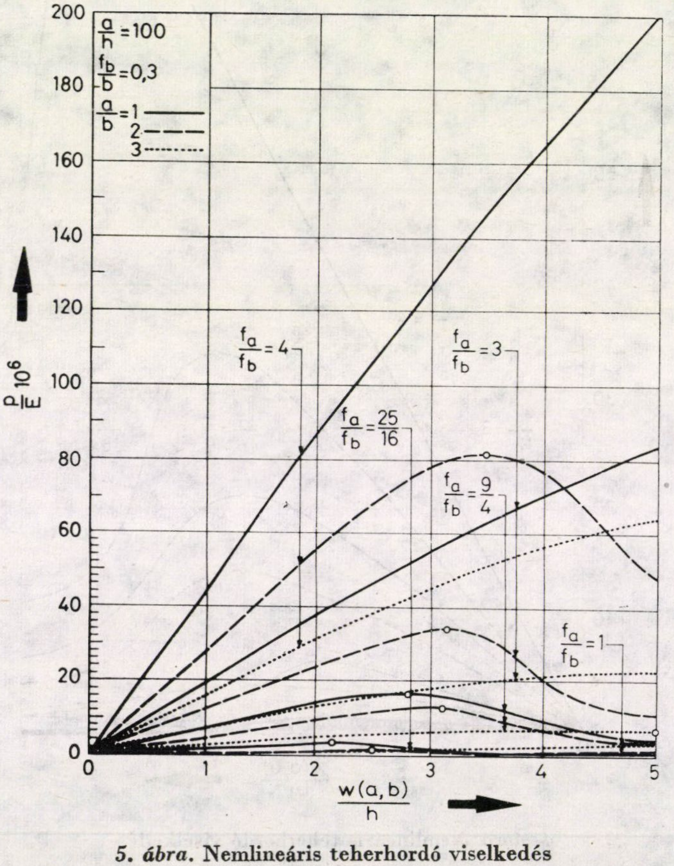
3.4 *Numerikus eredmények*

A meghatározott teherbírási diagramok a 3. — 13. ábrákon láthatók. Az I. táblázatban a teherlehajlás görbék jellegzetes ordinátáit foglaltuk össze.

A lehajlási függvény egyik komponensét az $i_1 = j_1 = 1$, a másik komponensét az $i_2 = 3, j_2 = 1$ vagy az $i_2 = 3, j_2 = 3$ számokkal adtuk meg. A terhelés mindkét irányban szimmetrikus, ezért antimetrikus lehajlási alakokat ehhez a vizsgálathoz nem kell figyelembe venni (csak az esetleges elágazáshoz: 4. pont).

Az i_2 és j_2 értékek két lehetősége közül azzal számoltunk, amelyik kisebb teherbírást adott. Ezen utóbbi komponensek hatása között jelentősebb különbség a görbék tetőpontja utáni tartományban volt tapasztalható.

Az átpattanás utáni tartomány pontosabb vizsgálatához több tagot és esetleg harmadrendű elméletet lehetne használni. A méretezéshez elsősorban



5. *ábra.* Nemlineáris teherhordó viselkedés

I. táblázat/1

			$\frac{p}{E}10^6$		f		( )$E\cdot 10^{-6}=\bar{p}_{cr}$	
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=$ 1	2	3	4	5
			1	0,018	0,067	0,170	0,348	0,622
			1,21	0,020 (0,022)	0,021	0,036	0,091	0,204
		1	25/16	0,145 (0,175)	0,172	0,102	0,022	0,024
			9/4	0,813	(1,258)	0,504	0,165	0,029
			3	2,116	3,922 (4,172)	1,618	0,566	0,400
			4	4,797	9,019 (9,240)	6,680	2,822	1,051
			1	0,095	0,271	0,598	1,138	1,944
			1,21	0,081	0,180	0,381	0,774	1,447
0,1	100	2	25/16	0,133	0,174	0,201	0,306	0,550
			3	1,355	2,175 (2,430)	2,404	1,959	1,197
			9/4	0,516	0,714 (0,725)	0,665	0,477	0,258
			4	3,123	5,516	(6,872)	4,523	2,598
			1	0,343	0,790	1,441	2,388	3,714
			1,21	0,333	0,719	1,270	2,094	3,307
		3	25/16	0,346	0,650	1,021	1,565	2,394
			9/4	0,539	0,844	1,033	(1,239)	1,228
			3	0,965	1,506	1,720 (1,750)	1,720	1,622
			4	1,940	3,197	3,847 (4,080)	3,983	3,722

I. táblázat/2

				$\frac{p}{E}10^6$		($)E\cdot10^{-6}=\overline{p_{cr}}$		
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=$ 1	2	3	4	5
0,2	100	1	1	0,018	0,067	0,170	0,348	0,622
			1,21	0,076 (0,080)	0,076	0,038	0,019	0,011
			25/16	0,653	1,012 (1,120)	0,431	0,140	0,026
			9/4	3,320	6,192 (6,280)	3,411	1,456	0,443
			3	8,576	16,350	(21,184)	12,048	6,528
			4	19,47	37,70	55,62	73,98 (75,20)	47,55
		2	1	0,095	0,271	0,598	1,138	1,944
			1,21	0,099	0,149	0,235	0,442	0,852
			25/16	0,418	0,560 (0,580)	0,502	0,348	0,205
			9/4	2,150	3,653	(4,317)	3,283	1,914
			3	5,584	10,288	(14,176)	7,504	4,298
			4	12,56	23,79	33,38 (34,56)	19,91	11,73
		3	1	0,343	0,790	1,441	2,388	3,714
			1,21	0,330	0,656	1,084	1,720	2,673
			25/16	0,480	0,767	0,971	1,192	1,536
			9/4	1,433	2,280	2,681 (2,880)	2,750	2,583
			3	3,334	5,776	7,328	8,032 (8,202)	7,984
			4	7,434	13,54	18,32	21,67	23,29

I. táblázat/3

				$\frac{p}{E}10^6$			$(\quad)E\cdot 10^{-6}=\overline{p_{cr}}$	
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=1$	2	3	4	5
0,3	100	1	1	0,018	0,067	0,170	0,348	0,622
			1,21	0,186 (0,250)	0,234	0,141	0,039	0,023
			25/16	1,501	2,443 (2,510)	0,992	0,317	0,120
			9/4	7,530	14,31 (16,27)	16,11	9,054	4,553
			3	19,47	37,70	54,63	70,09	83,52
			4	44,14	86,40	126,7	165,1	201,2
		2	1	0,095	0,271	0,598	1,138	1,944
			1,21	0,153	0,191	0,200	0,265	0,455
			25/16	0,953	1,455 (1,560)	1,519	1,206	0,725
			9/4	4,909	8,975	12,05 (12,320)	6,642	3,797
			3	12,57	23,78	33,99 (35,20)	19,91	11,73
			4	28,23	54,25	78,12 (81,30)	75,87	48,92
		3	1	0,343	0,790	1,441	2,388	3,714
			1,21	0,348	0,635	0,967	1,445	2,163
			25/16	0,751	1,160	1,330	1,373	(1,401)
			9/4	3,046	5,138	6,440	7,079	(7,168)
			3	7,43	13,54	18,33	21,67	23,29
			4	16,58	31,34	44,36	55,63	64,54

I. táblázat/4

				$\frac{P}{E}10^6$			$(\quad)E\cdot 10^{-6}=\bar{p}_{cr}$	
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=1$	2	3	4	5
0,1	150	1	1	0,004	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,007	(0,008)	0,004	0,005	0,017
			25/16	0,070 (0,105)	0,100	0,051	0,017	0,010
			9/4	0,367	0,664 (0,685)	0,263	0,088	0,045
			3	0,948	1,782 (1,930)	1,320	0,656	0,208
			4	2,150	4,119	5,851 (5,905)	3,984	2,388
		2	1	0,019	0,053	0,118	0,225	0,384
			1,21	0,017	0,031	0,057	0,111	0,204
			25/16	0,048	(0,063)	0,052	0,043	0,030
			9/4	0,244	0,377	0,427 (0,435)	0,415	0,356
			3	0,617	1,089	(1,357)	0,893	0,513
			4	1,398	2,603	3,692 (3,700)	1,986	1,082
		3	1	0,068	0,156	0,285	0,472	0,734
			1,21	0,064	0,132	0,225	0,362	0,560
			25/16	0,077	0,131	0,182	0,252	0,360
			9/4	0,177	0,274	0,315 (0,325)	0,320	0,314
			3	0,383	0,631	0,760 (0,802)	0,787	0,735
			4	0,832	1,461	1,891	2,123	(2,162)

I. táblázat/5

				$\frac{p}{E} 10^{6}$		(	$)E \cdot 10^{-6} = \bar{p}_{cr}$	
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5
0,2	150	1	1	0,004	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,037 (0,049)	0,046	0,028	0,008	0,005
			25/16	0,297	0,480 (0,490)	0,196	0,063	0,024
			9/4	1,487	2,826 (3,206)	3,182	1,797	0,899
			3	3,846	7,447	10,79	13,84	16,50
			4	8,719	17,06	25,03	32,60	39,74
		2	1	0,019	0,054	0,118	0,225	0,384
			1,21	0,030	0,038	0,040	0,052	0,090
			25/16	0,188	0,288 (0,308)	0,300	0,238	0,143
			9/4	0,970	1,773	2,375 (2,383)	1,322	0,750
			3	2,482	4,698	6,713 (6,953)	3,933	2,317
			4	5,576	10,72	15,23 (16,06)	14,99	9,66
		3	1	0,068	0,156	0,285	0,472	0,734
			1,21	0,069	1,125	0,191	0,285	0,427
			25/16	0,148	0,229	0,263	0,271	(0,277)
			9/4	0,602	1,015	1,272	1,398	(1,416)
			3	1,468	2,675	3,619	4,281	4,601
			4	3,275	6,191	8,762	10,99	12,75

I. táblázat/6

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{p}{E}10^6$ $\frac{w}{h}=1$	2	3	4	5 $(\quad)E\cdot 10^{-6}=\bar{p}_{cr}$
0,3	150	1	1	0,004	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,089 (0,140)	0,132	0,061	0,021	0,007
			25/16	0,672	(1,255)	0,704	0,304	0,035
			9/4	3,380	6,538	9,467	12,14	14,46
			3	8,712	17,01	24,84	32,13	38,80
			4	19,73	38,90	57,51	75,54	92,98
		2	1	0,019	0,053	0,118	0,225	0,384
			1,21	0,059	(0,075)	0,065	0,048	0,041
			25/16	0,440	0,738	0,911	(0,977)	0,951
			9/4	2,182	4,119	5,884 (6,050)	3,283	1,912
			3	5,576	10,72	15,43 (16,34)	14,99	9,66
			4	12,57	24,45	35,63	46,08	49,93
		3	1	0,068	0,156	0,285	0,472	0,734
			1,21	0,082	0,136	0,182	0,242	0,335
			25/16	0,282	0,452	0,532	(0,540)	0,500
			9/4	1,292	2,337	3,132	3,664	3,893
			3	3,275	6,191	8,762	10,99	12,75
			4	7,707	14,72	21,07	26,78	31,85

I. táblázat/7

$\frac{p}{E}\,10^{6}$ ($)E\cdot 10^{-6}=\bar{p}_{cr}$

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=1$	2	3	4	5
0,1	200	1	1	0,001	0,004	0,011	0,022	0,039
			1,21	0,0048 (0,0050)	0,0048	0,0024	0,0012	0,0007
			25/16	0,0408	0,0633 (0,070)	0,0269	0,0088	0,0016
			9/4	0,208	0,387 (0,393)	0,213	0,091	0,028
			3	0,536	1,022	(1,324)	0,753	0,408
			4	1,217	2,356	3,476	4,624 (4,700)	2,972
		2	1	0,006	0,017	0,037	0,071	0,122
			1,21	0,006	0,009	0,015	0,028	0,053
			25/16	0,026	0,035 (0,036)	0,031	0,022	0,013
			9/4	0,134	0,228	(0,270)	0,205	0,120
			3	0,349	0,643	(0,886)	0,469	0,268
			4	0,785	1,487	2,124 (2,100)	1,246	0,733
		3	1	0,021	0,049	0,090	0,149	0,232
			1,21	0,020	0,041	0,067	0,108	0,167
			25/16	0,030	0,048	0,061	0,075	0,096
			9/4	0,090	0,143	0,168 (0,180)	0,172	0,161
			3	0,209	0,361	0,458	0,502 (0,513)	0,499
			4	0,465	0,846	1,145	1,354	1,456

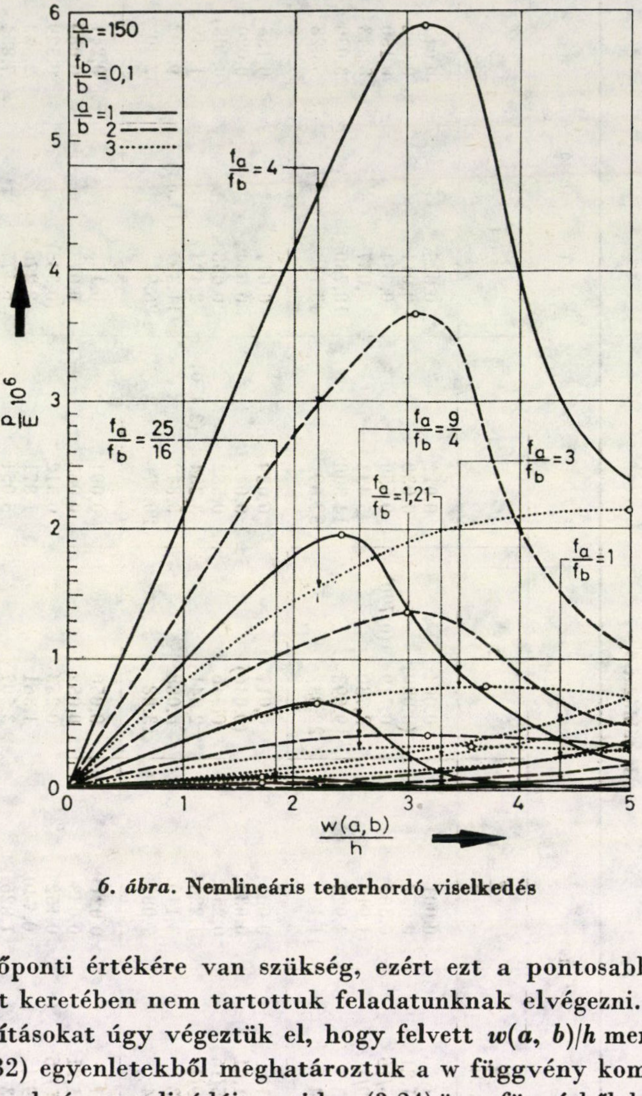
I. táblázat/8

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_s}{f_b}$	$\frac{P}{E}10^6$ $\frac{w}{h}=1$	2	3	4	( )$E\cdot 10^{-6}=\overline{p}_{cr}$ 5
0,2	200	1	1	0,001	0,004	0,012	0,025	0,047
			1,21	0,022	0,033	(0,035)	0,030	0,021
			25/16	0,168	0,312 (0,330)	0,148	0,057	0,034
			9/4	0,842	1,620	2,329 (2,400)	1,997	1,269
			3	2,175	4,247	6,210	8,061	9,783
			4	5,460	10,74	15,84	20,75	25,49
		2	1	0,006	0,017	0,039	0,077	0,135
			1,21	0,015	(0,019)	0,017	0,014	0,015
			25/16	0,109	0,178	0,214	(0,221)	0,205
			9/4	0,546	1,024	(1,461)	0,766	0,440
			3	1,394	2,669	3,830 (4,002)	3,107	1,960
			4	3,140	6,088	8,842	11,39 (11,90)	9,59
		3	1	0,021	0,050	0,091	0,153	0,241
			1,21	0,024	0,041	0,058	0,080	0,115
			25/16	0,073	0,115	0,133 (0,140)	0,134	0,124
			9/4	0,327	0,577	0,757	0,874	0,935
			3	1,709	2,876 (3,480)	3,259	2,289	1,799
			4	1,826	3,507	5,051	6,477	7,834

I. táblázat/9

$\frac{p}{E}10^6$ ( )$E\cdot 10^{-6}=\bar{p}_{cr}$

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h}=1$	2	3	4	5
0,3	200	1	1	0,001	0,004	0,012	0,025	0,047
			1,21	0,052	(0,080)	0,032	0,011	0,002
			25/16	0,380	0,719 (0,790)	0,659	0,354	0,150
			9/4	1,910	3,730	5,433	7,037	8,343
			3	4,925	9,693	14,300	18,750	23,030
			4	11,13	22,03	32,69	43,11	53,28
		2	1	0,006	0,017	0,039	0,077	0,135
			1,21	0,033	(0,046)	0,045	0,034	0,020
			25/16	0,254	0,446	0,582	0,668	(0,708)
			9/4	1,226	2,341	3,354 (3,450)	2,494	1,549
			3	3,140	6,088	8,842	11,39 (11,63)	9,592
			4	7,087	13,88	20,37	26,55	32,40
		3	1	0,021	0,050	0,091	0,153	0,241
			1,21	0,033	0,052	0,063	0,073	0,089
			25/16	0,152	0,253	0,312	(0,335)	0,329
			9/4	0,740	1,361	1,871	2,276	2,583
			3	1,826	3,507	5,051	6,477	7,834
			4	4,368	8,444	12,23	15,74	18,98



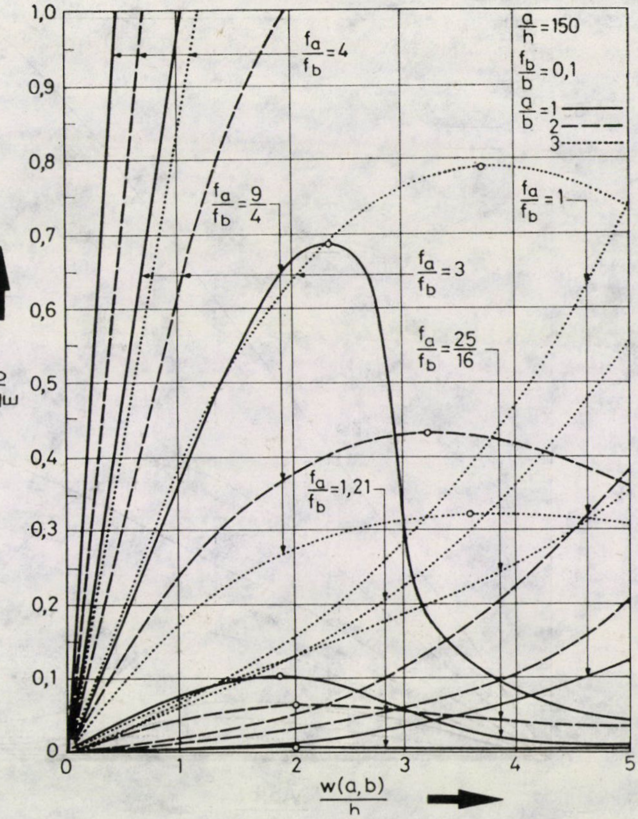
6. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

a görbék tetőponti értékére van szükség, ezért ezt a pontosabb vizsgálatot jelen dolgozat keretében nem tartottuk feladatunknak elvégezni.

A számításokat úgy végeztük el, hogy felvett $w(a, b)/h$ mennyiségekhez a (3.29)—(3.32) egyenletekből meghatároztuk a w függvény komponenseinek $w_{i_1j_1}/h$, $w_{i_2j_2}/h$ relatív amplitúdóit, majd a (3.24) összefüggésből kiszámítottuk a p/E teherbírási paramétert.

A diagramok azt mutatják, hogy a terhüket az elsőrendű elmélet szerint majdnem teljesen középfelületi erőkkel hordó HP héjak ([5] f_a/f_b = [1,5—2]—4) nemlineáris teherhordó viselkedése a 2c. ábrán látható jelleggörbével jellemezhető.

Például a *normális* ($f_a/f_b = 4$) vagy a *háromnegyed normális* típusú ($f_a/f_b = 9/4$) héj lehajlása növekedésével a teherbírás egy ideig monoton növekszik (stabil egyensúlyi állapot), majd a $\overline{p}_{cr}$ teherintenzitás elérése után (a labilis egyensúlyi állapot kezdete) bekövetkezik a kisebb potenciálú hely-



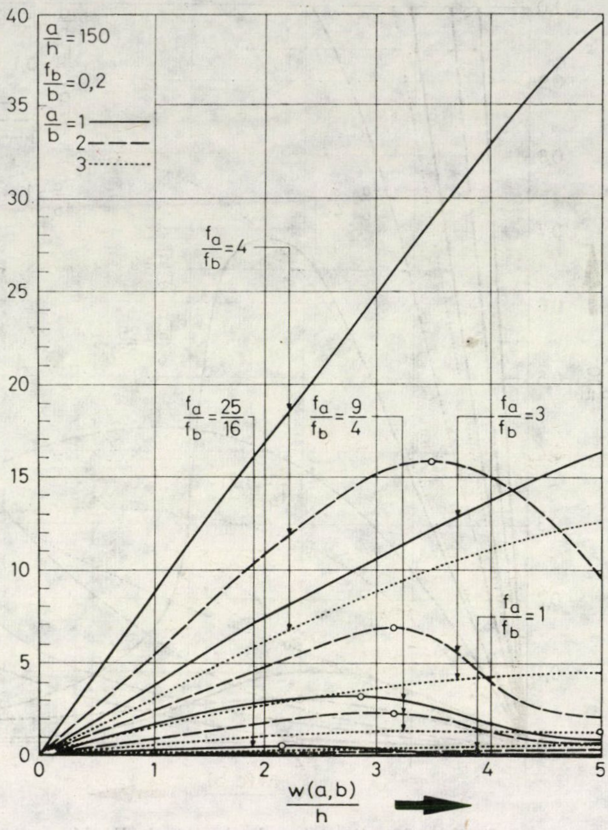
7. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

zetbe történő *átpattanás*. Az átpattanás utáni teherbíráscsökkenést emelkedő teherbírás (stabilis egyensúlyi helyzet) követi.

A szerkezet mérnöki szempontból természetesen az átpattanási teher elérésekor tönkrementnek tekinthető, így az ismét emelkedő tartományt nem is tüntettük fel.

A transzlációs HP héjak egyik alkotórendszere felülről homorú parabolaseregből áll, ezért gondolhatnánk, hogy ezek a héjak monoton emelkedő nemlineáris teherbírási jelleget mutatnak. Ez azonban — a „lemezszerűen" viselkedő szeminormál héj esetét kivéve — csak akkor van így, ha a héjat az aszimptotikus vonalak (a karakterisztikák felületi megfelelői) mentén támasztjuk meg [9]. Ennek az az oka, hogy a felületi alkotók mentén megtámasztott *torznégyszöghéj* felülről homorú húzott szálak közül legalább a sarokpontokat összekötő húzott szál mintegy felfüggeszti a kihorpadó nyomott szálakat [8].

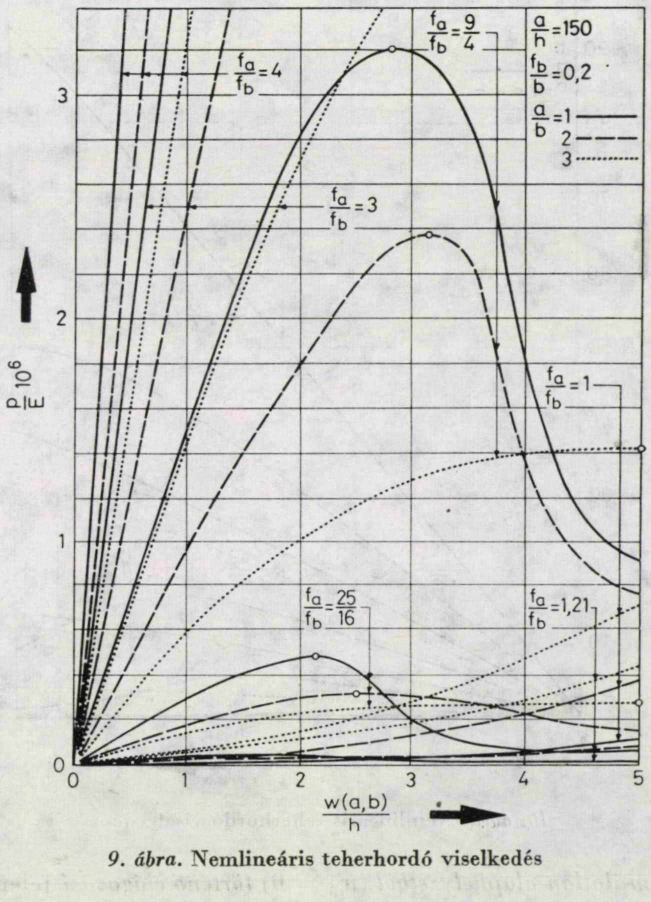
A nyereg alakú oldalnyomásmentes HP héj minden felülről homorú szála oldalirányban szabadon elmozduló peremívekhez csatlakozik (a táma-



8. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

szoknál levő szálak hatása jelentéktelen), így az említett felfüggesztő hatás nem jelentkezik. Az átpattanás után emelkedő teherbírás csak igen nagymértékű — a 3.—13. ábrákon fel nem tüntetett — alakváltozás után, az x irányú ívek felülről homorú helyzetében lehetséges.

Az eddig tárgyalt „héjszerű" viselkedéstől teljesen eltérő jelleget mutat a *szeminormál* héj ($f_a/f_b = 1$). Ez a héj az elsőrendű elmélet szerint [5] döntően hajlítónyomatékokkal viseli a terheit. Ez a „lemezszerű" monoton növekedő teherhordó jelleg mutatkozik meg a 3.—13. ábrákon is. Igaz ugyan, hogy a szeminormál héj teherbírása a lehajlás növekedésével egyre nagyobb lesz, de az a teher amelyet ilymódon viselni képes, igen kicsi. Az elsőrendű elmélettel történt vizsgálatok [5] eredményeivel összhangban, most is megállapíthatjuk, hogy a szeminormál héjat — és a tőle kevéssé eltérő nyílmagasságarányú héjakat — csak a lemezeknél szokásos a/h arányok mellett lehet alkalmazni. Az *átpattanó* és a *felülről homorú*, monoton *növekedő* teherbírási jellegű esetek



9. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

között átmenet van: ekkor a teherlehajlás diagramoknak nincs vízszintes érintőjük, csak ***inflexiós pontjuk*** van.

A „lemezszerű" és a „héjszerű" viselkedés különbözőségét jól szemlélteti az a/b oldalirány eltérő hatása is. A „lemezszerűen" viselkedő HP héjak teherbírása a b méret csökkenésével egyre nagyobb, míg a „héjszerűen" viselkedő héjaké egyre kisebb lesz.

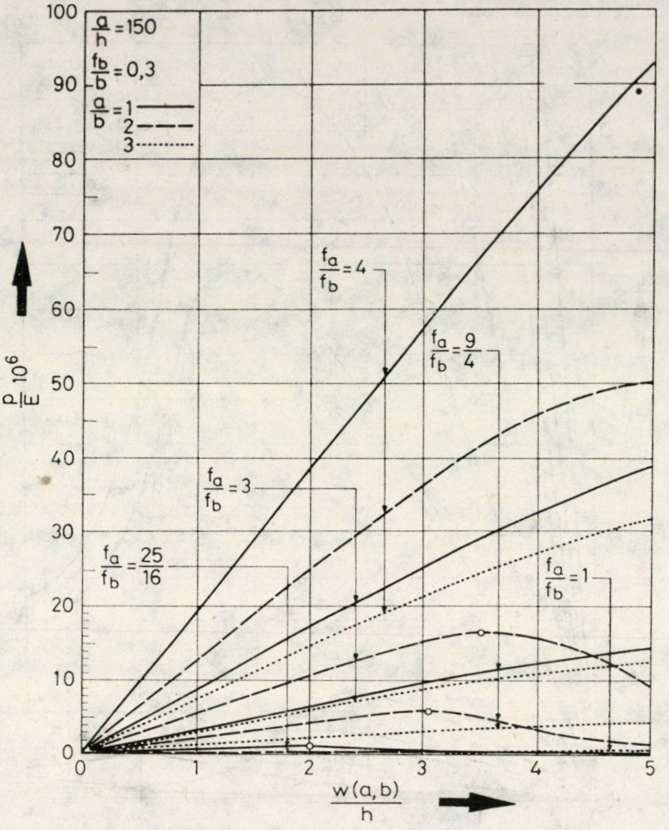
A görbék jellege és a teherbírás mértéke jól mutatja a peremívek oldalirányú hajlítási és a csavarási merevségének hiányát.

A megadott táblázatok és diagramok gyakorlati használatával kapcsolatban rámutatunk arra, hogy — rögzített α és γ esetében — ha

$$\beta_1 \varrho_1 = \beta_2 \varrho_2 , \tag{3.33}$$

akkor

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^4 . \tag{3.34}$$



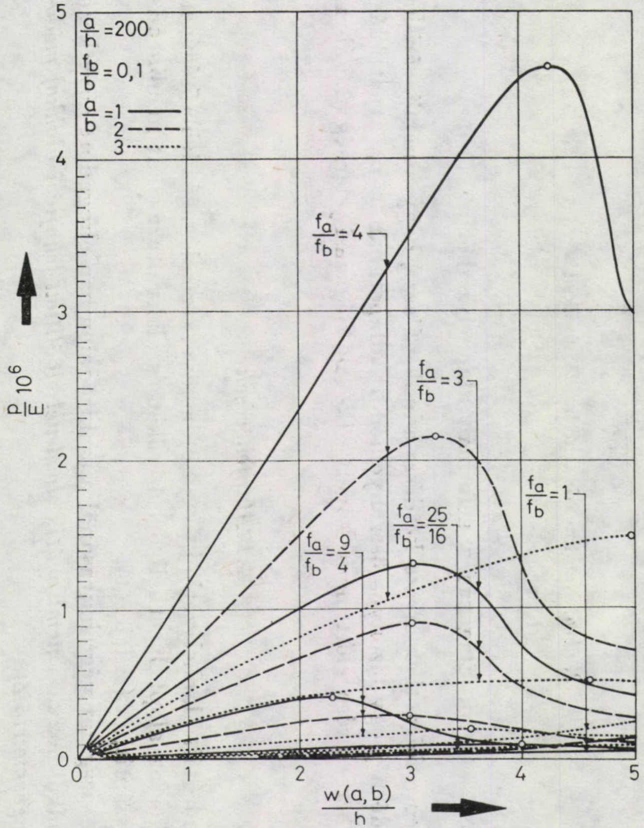
10. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

A ***deformálatlan alaphelyzetből*** ($w_0 = 0$) ***történő elágazási*** jelenségre vonatkozó számítási eredményeinket ([6]: p_{cr}^{lin}) összehasonlítva a most kapott $\overline{p}_{cr}$ ***átpattanási kritikus teher*** értékekkel az alábbi megállapításokat tehetjük:

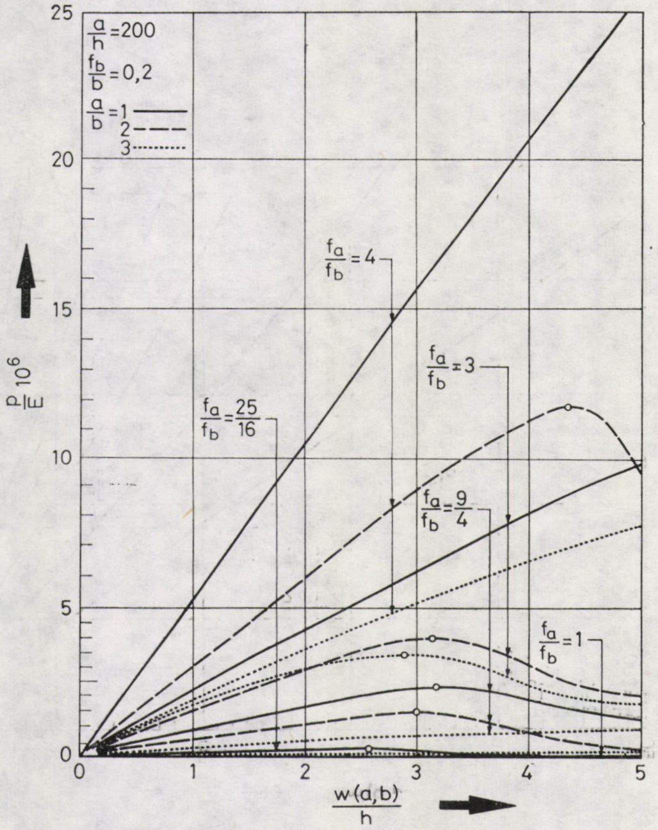
1. Azokat a héjakat, melyek terheiket az elsőrendű elmélet szerint is [5] döntő mértékben hajlítónyomatékokkal hordják ($f_a/f_b = 1 \div (1{,}5$—$2)$), nem vizsgálhatjuk lineáris elmélettel. A szeminormál héj ($f_a/f_b = 1$) nyílmagasságarányától kevéssé eltérő nyílmagasságarányú héjak nem mutatnak elágazási jelenséget. Az ezekhez a paraméterekhez tartozó héjak teherbírási diagramjai ***monoton emelkedőek;*** $f_a/f_b = 1$-nél a görbéknek inflexiós pontjuk sincsen.

2. Kis f_b/f_b, f_a/f_b, valamint nagy a/b arányok esetében az ***átpattanási*** kritikus teher ($\overline{p}_{cr}$) kisebb, mint a lineáris kritikus teher (p_{cr}^{lin}; $w_0 = 0$).

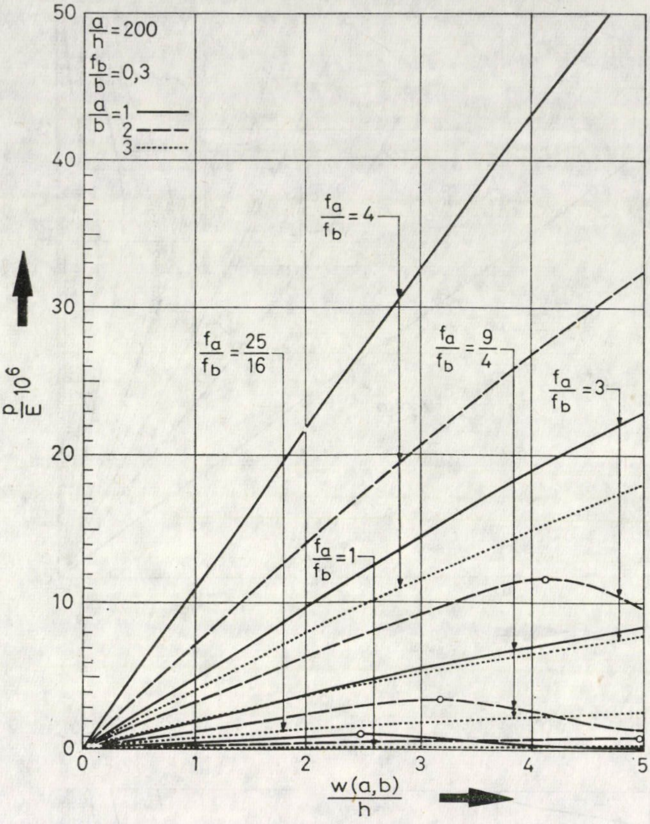
3. A vizsgált paraméter tartományok legnagyobb részében — elsősorban az $f_a/f_b = (1{,}5 \div 2) \div 4$, $f_b/f_b = 0{,}2 \div 0{,}3$, $fa/fb = 1 \div 2$ paraméterekkel jellemezhető tartományokban — a $\overline{p}_{cr}$ terhek nagyobbak, illetve lényegesen nagyobbak, mint a p_{cr}^{lin} terhek (17. ábra). Ezekre a HP héjakra az ***elágazási*** kritikus terhek a mértékadóak.



11. ábra. **Nemlineáris teherhordó viselkedés**



12. ábra. **Nemlineáris teherhordó viselkedés**



13. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

4. Elágazás a deformált alaphelyzetből

Ebben a fejezetben arra a kérdésre adunk választ, hogy a nemlineárisan deformálódó héj egy bizonyos összenyomódott állapotában a $\overline{p}_{cr}$ átpattanási kritikus teher elérése előtt nem következik-e be elágazási jelenség (2.c ábra: p_{cr}^{lin}, *d*).

4.1 Alapfeltevések

A deformált alaphelyzetből ($w_0 \neq 0$) bekövetkező elágazás lehetőségének vizsgálatakor az alaphelyzetbeli belső erőket és alakváltozásokat nemlineáris elmélettel számítjuk (3. fejezet).

Ezen vizsgálat végrehajtásánál a szakirodalomban elfogadott következő közelítést alkalmazva a ***nemlineáris elmélettel előállított lehajlási alakkal módosítjuk a héj geometriáját.***

Ezen megváltozott alakú héj [6] alapján meghatározható lineáris kritikus terhét ($w_0 = 0$) tekintjük a héj közelítő — a deformált alaphelyzetből bekövetkező elágazási jelenségére vonatkozó — lineáris kritikus terhének. Ez a megoldási menet összhangban van [1], [2], [14] eljárásával.

Bushnell [1], Dulácska [2] és Wedellsborg [14] a p_{cr} (w_k) terhek (2. ábra: 1.2) meghatározásának igen nagy számítási munkáját olymódon csökkentették le, hogy a w_k kezdeti hullámossággal módosították a vizsgált héjak geometriáját, és ezeken a megváltoztatott alakú héjakon sajátérték feladat megoldásával állapították meg a felső kritikus terheket. A számítások azt mutatták, hogy a kritikus teher csökkenést a p_{cr}^{lin} teherhez ($w_0 = 0$) képest alapvetően a kezdeti hullámosság okozza. A pontos értékekkel való összehasonlítás alapján kiderült, hogy a geometriai nemlinearitás a tehercsökkenésnek csak kisebb mértékét okozza.

Az általunk tárgyalt jelenségnél geometriai nemlinearitás csak az alaphelyzetet jellemzi, ezért ha ezt közelítően figyelembe vesszük, akkor a fenti gondolatmenet szerint megfelelő közelítő értékeket kapunk.

4.2 Alapegyenletek

A w_0 mértékben deformálódott héj potenciális energiájának második variációja a középfelületi erők U_{mo}, a hajlítási erők U_{bo}, valamint a külső terhelés V_0 potenciális energiája második variációjának összegeként írható fel:

$$\delta^2 U_{m0} = \frac{1}{Eh} \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left[\bar{F}^{\prime\prime 2} - 2\mu \bar{F}^{\cdot\cdot} \bar{F}^{\prime\prime} + \bar{F}^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu) \bar{F}^{\cdot\prime 2} + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + Eh \left(F_0^{\prime\prime} \bar{w}^{\cdot 2} - 2 F_0^{\cdot\prime} \bar{w}^{\cdot} \bar{w}^{\prime} + F_0^{\cdot\cdot} \bar{w}^{\prime 2} \right) \right] dx\, dy \,,$$

$$\delta^2 U_{b0} = K \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left[\bar{w}^{\prime\prime 2} + 2\mu \bar{w}^{\cdot\cdot} \bar{w}^{\prime\prime} + \bar{w}^{\cdot\cdot 2} + 2(1-\mu) \bar{w}^{\cdot\prime 2} \right] dx\, dy \,, \tag{4.2}$$

$$\delta^2 V_0 = 0 \,, \tag{4.3}$$

$$\delta^2 U_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} u_0 \, dx\, dy = \delta^2 U_{m0} + \delta^2 U_{b0} \,, \tag{4.4}$$

$$\delta^2 \Pi_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \pi_0 \, dx\, dy + \delta^2 U_0 = \delta^2 V_0 \,. \tag{4.5}$$

Itt u_0, ill. π_0 a belső, ill. a teljes potenciális energia második variációjának fajlagos értéke.

A fenti egyenletekben $\bar{F} = \bar{F}(\bar{w})$. A fajlagos nyúlások, ill. szögtorzulások kifejezéseiben szerepelnek a $w_0^{\prime} \bar{w}^{\prime}$ $w_0^{\cdot} \bar{w}^{\cdot}$, $w_0^{\prime} \bar{w}^{\cdot} + w_0^{\cdot} \bar{w}^{\prime}$ tagok is.

Az indifferens egyensúlyi helyzetben a Π_0 potenciális energiának kell legyen legalább egy olyan különleges második variációja, melynek minden első variációja zérus. Így a $p_{cr,d}^{lin}$ teher meghatározásához a

$$\delta(\delta^2 \Pi_0) = 0 \tag{4.6}$$

variációs feladatot kell megoldani. A $\delta^2\Pi_0$ funkcionált stacionárius értékké tevő w extrémális függvényt az alábbi Euler—Lagrange-típusú differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\prime}}\right)^{\prime} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot}}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\prime\prime}}\right)^{\prime\prime} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot\prime}}\right)^{\cdot\prime} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \overline{w}^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0\,. \tag{4.7}$$

Elvégezve a (4.7) egyenlet által kijelölt műveleteket a lapos héjak deformált alaphelyzetből ($w_0 \neq 0$) történő elágazási jelenségének egyensúlyi egyenlete adódik [3], [15]:

$$K\Delta\Delta\overline{w} - L_p(\overline{F}, w_0 + z) - L_p(F_0, \overline{w}) = 0\,. \tag{4.8}$$

Írjuk fel a középfelületi erők potenciális energiájának második variációját

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{m0} = \int_0^{2a}\int_0^{2b} \Big\{ & 2\,[\overline{F}^{\prime\prime}(v^{\cdot} - wz^{\cdot\cdot} + \overline{w}_0^{\cdot}\overline{w}^{\cdot}) - \overline{F}^{\cdot\prime}(\overline{u}^{\cdot} + \overline{v}^{\prime} + \\ & + w_0^{\prime}\overline{w}^{\cdot} + w_0^{\cdot}\overline{w}^{\prime}) + \overline{F}^{\cdot\cdot}(\overline{u}^{\prime} - \overline{w}z^{\prime\prime} + w_0^{\prime}\overline{w}^{\prime})] - \\ & - \frac{1}{Eh}[\overline{F}^{\prime\prime 2} - 2\mu\overline{F}^{\cdot\cdot}\overline{F}^{\prime\prime} + \overline{F}^{\cdot\cdot 2} + 2(1+\mu)\overline{F}^{\cdot\prime 2}] + \\ & + [F_0^{\prime\prime}\overline{w}^{\cdot 2} - 2F_0^{\cdot}\,\overline{w}^{\cdot}\overline{w}^{\prime} + F_0^{\cdot\cdot}\overline{w}^{\prime 2}]\Big\}\,dx\,dy \end{aligned} \tag{4.9}$$

alakban. Ennek segítségével a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján — a $\delta^2 U_0$ funkcionál variációképzését $\overline{F}$ szerint végrehajtva és a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \overline{F}^{\prime\prime}}\right)^{\prime\prime} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \overline{F}^{\cdot\prime}}\right)^{\cdot\prime} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \overline{F}^{\cdot\cdot}}\right)^{\cdot\cdot} = 0 \tag{4.10}$$

alakú Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet által kijelölt műveleteket elvégezve, az alábbi egyenlet adódik:

$$\Delta\Delta\overline{F} + D(1-\mu^2)\,[L_p(\overline{w}, z) + L_p(\overline{w}, w_0)] = 0\,. \tag{4.11}$$

A (4.11) egyenlet a lapos héjak deformált alaphelyzetből történő elágazási jelenségének ($w_0 \neq 0$) kompatibilitási egyenlete [3], [15].

4.3. *A lehajlási- és a feszültségfüggvények*

A héj alaphelyzetbeli w_0 lehajlása és az elágazásnál kialakuló $\bar{w} \equiv \delta w_0$ horpadási függvénynek eleget kell tennie a feladat alábbi geometriai és statikai peremfeltételeinek:

$$w = w_0 + \bar{w}\,, \tag{4.12}$$

$$w\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0\,, \quad w\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0\,, \quad w''\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0\,, \quad w^{\cdot\cdot}\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0\,. \tag{4.13a—d}$$

Az oldalnyomásmentesség feltétele így írható fel:

$$F = F_0 + \bar{F}\,, \tag{4.14}$$

$$F''\Big|_{\substack{y=0\\y=2b}} = 0\,, \quad F^{\cdot\cdot}\Big|_{\substack{x=0\\x=2a}} = 0\,. \tag{4.15a—d}$$

A következő lineárisan független tagokból álló függvénysorok kielégítik a feladat összes geometriai és statikai peremfeltételeit:

$$w_0 = \sum\sum w_{rs} \sin\frac{r\pi}{2a} x \sin\frac{s\pi}{2b} y\,,$$

$$F_0 = \sum\sum F_{rs} \sin\frac{r\pi}{2a} x \sin\frac{s\pi}{2b} y\,, \tag{4.16a—b}$$

$$r = 1, 3, 5, \ldots, R$$

$$s = 1, 3, 5, \ldots, S$$

$$\bar{w} = \sum\sum \bar{w}_{ij} \sin\frac{i\pi}{2a} x \sin\frac{j\pi}{2b} y\,,$$

$$\bar{F} = \sum\sum \bar{F}_{ij} \sin\frac{i\pi}{2a} x \sin\frac{j\pi}{2b} y\,. \tag{4.17a—b}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, I$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, J$$

A fenti függvényeket tehát a feladat Galerkin-módszerrel történő megoldásakor az alaphelyzet és a szomszédhelyzet alakváltozási- és feszültségfüggvényeinek tekinthetjük.

Az ismertetett pontos megoldás helyett — a 4.1. fejezetben leírt gondolatmenet alapján — a 3.—13. ábrák nemlineáris teherbírási diagramjai és a [6]-ban előállított lineáris kritikus terhek ($w_0 = 0$) segítségével határozzuk meg a közelítő $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ terheket.

4.4 *Közelítő eljárás*

Ha a [6]-ban előállított lineáris kritikus terhek értékének elérésekor a 3.—13. ábrák szerint a HP héj középpontja ($x = a$, $y = b$) $w(a, b)$ mértékben lehajlott, akkor a 17 a.—b. ábrákon definiált $\tilde{w}_{oá}$ átlagelhajlással ***módosított geometriájú héj*** paraméterei az alábbiak lesznek:

$$\alpha^* = \frac{f_a^*}{f_b^*} = \frac{f_a - \tilde{w}_{oá}}{f_b + \tilde{w}_{oá}} = \frac{\alpha - \dfrac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \dfrac{\gamma}{\beta\varrho}}{1 + \dfrac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \dfrac{\gamma}{\beta\varrho}},$$

$$\beta^* = \beta = \frac{a}{h}, \qquad (4.18\ \text{a—d})$$

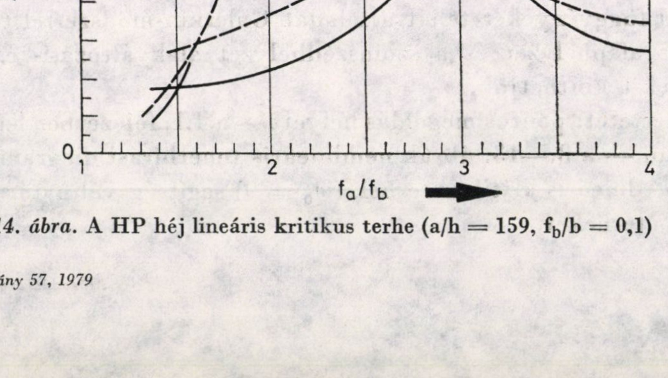
$$\gamma^* = \gamma = \frac{a}{b},$$

$$\varrho^* = \frac{f_b^*}{b} = \frac{f_b + \tilde{w}_{oá}}{b} = \varrho + \frac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \frac{\gamma}{\beta}.$$

A 17. ábrán mutatjuk be a közelítő eljárásunk segítségével kapott $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ teher diagramokat. A (4.18 a—d) paramétereknek megfelelő lineáris kritikus terheket a 18.—20. ábrák csipkegörbéi segítségével határoztuk meg.

Ezen csipkegörbék alakja mutatja, hogy a $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ terhek lehetnek kisebbek is, nagyobbak is mint a p_{cr}^{lin} terhek.

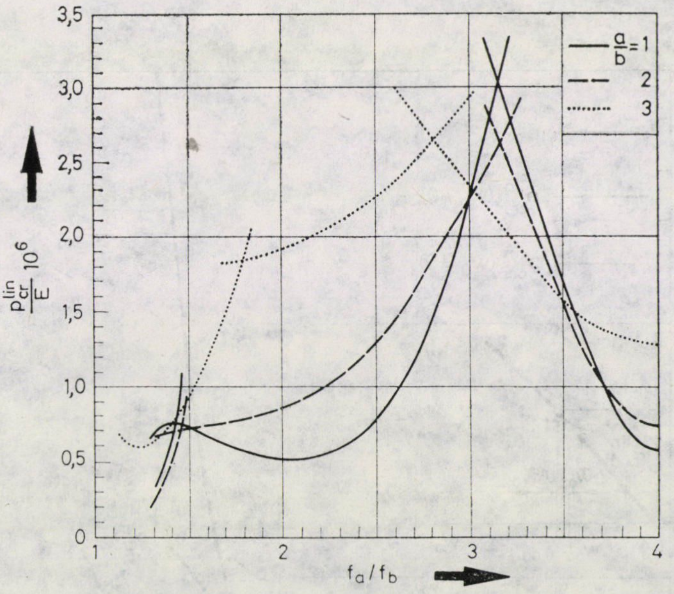
Az $\alpha \approx 2 \div 3$ nyílmagasságarány — tartományban az α mennyiségek α^*-ra való csökkenése a lineáris kritikus terhek csökkenéséhez vezet. Ezzel



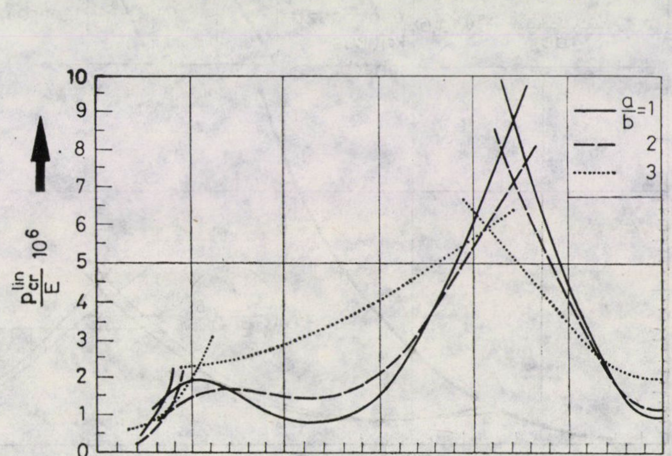
14. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 159$, $f_b/b = 0{,}1$)

szemben kb. az $\alpha \approx 3 \div 4$ tartományban az α paraméterek lecsökkenése (α^*) teherbírás — növekedést okoz.

Ennek következtében a tényleges $p_{cr,d}^{lin}$ mennyiségek a mindig növelő hatású $\Delta\varrho = \varrho - \varrho^*$ és az esetenként csökkentő, esetenként növelő hatású $\Delta\alpha = \alpha - \alpha^*$ paraméter-változások együttes hatásának eredményeként állapítandók meg.



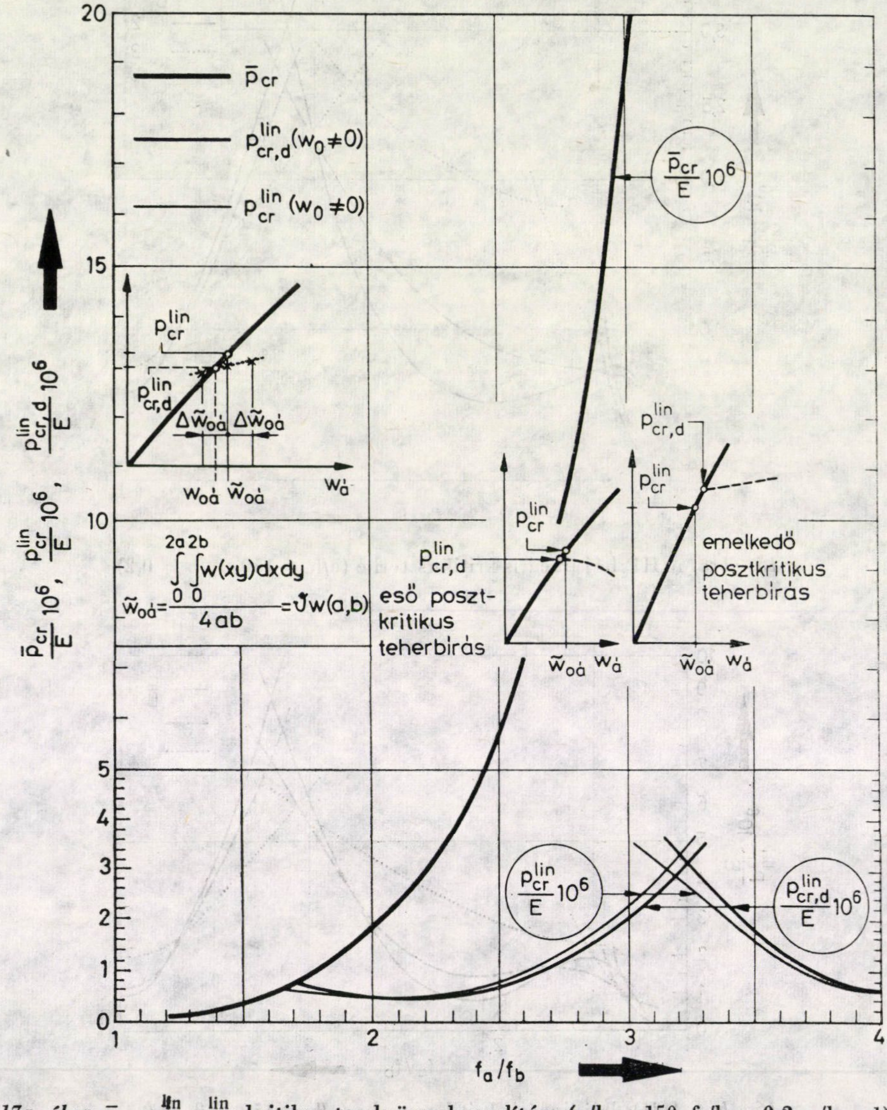
15. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe (a/h = 150, f_b/b = 0,2)



16. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe (a/h = 150, f_d/b = 0,3)

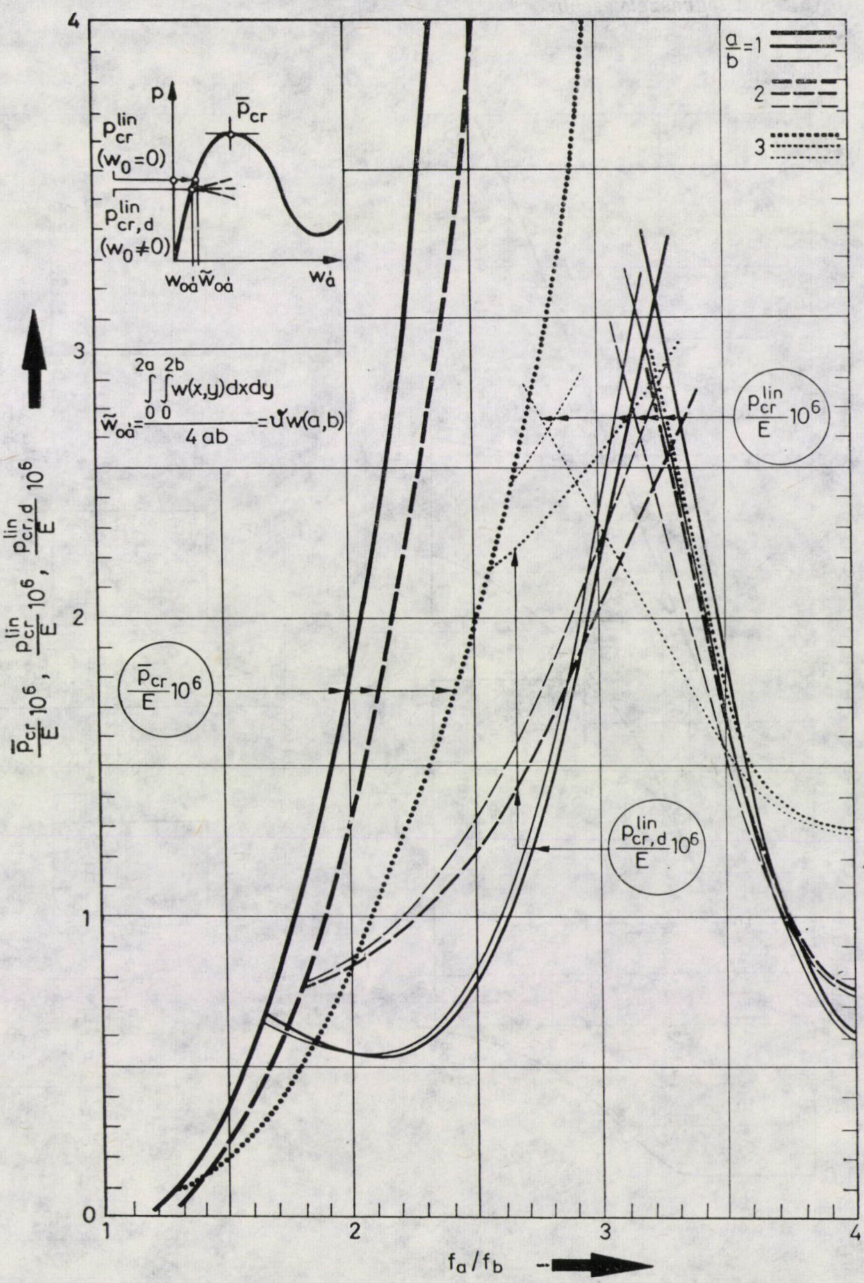
A $p^{\mathrm{lin}}_{\mathrm{cr,d}}$ értékeket grafikusan határoztuk meg: a $\tilde{w}_{0á}$ helyek kis környezetében levő $\tilde{w}_{0á} \pm \Delta\tilde{w}_{0á}$ helyekhez (17a. ábra) meghatározott lineáris kritikus terhek görbéjét metszésbe hoztuk a megfelelő nemlineáris teherbírási görbével.

A 17b. ábra azt mutatja, hogy a terhelés előidézte deformációk (w_0) hatása — a vizsgált arányok esetén — az $f_a/f_b \sim 2.5 \div 3.5$ tartományban a legnagyobb (a csipkegörbéket az átpattanási kritikus terhek ($\bar{p}_{cr}$) vonaláig rajzoltuk meg). A $p^{\mathrm{lin}}_{cr,d}$ terhek százalékos eltérése a p^{lin}_{cr} terhektől: a/b =



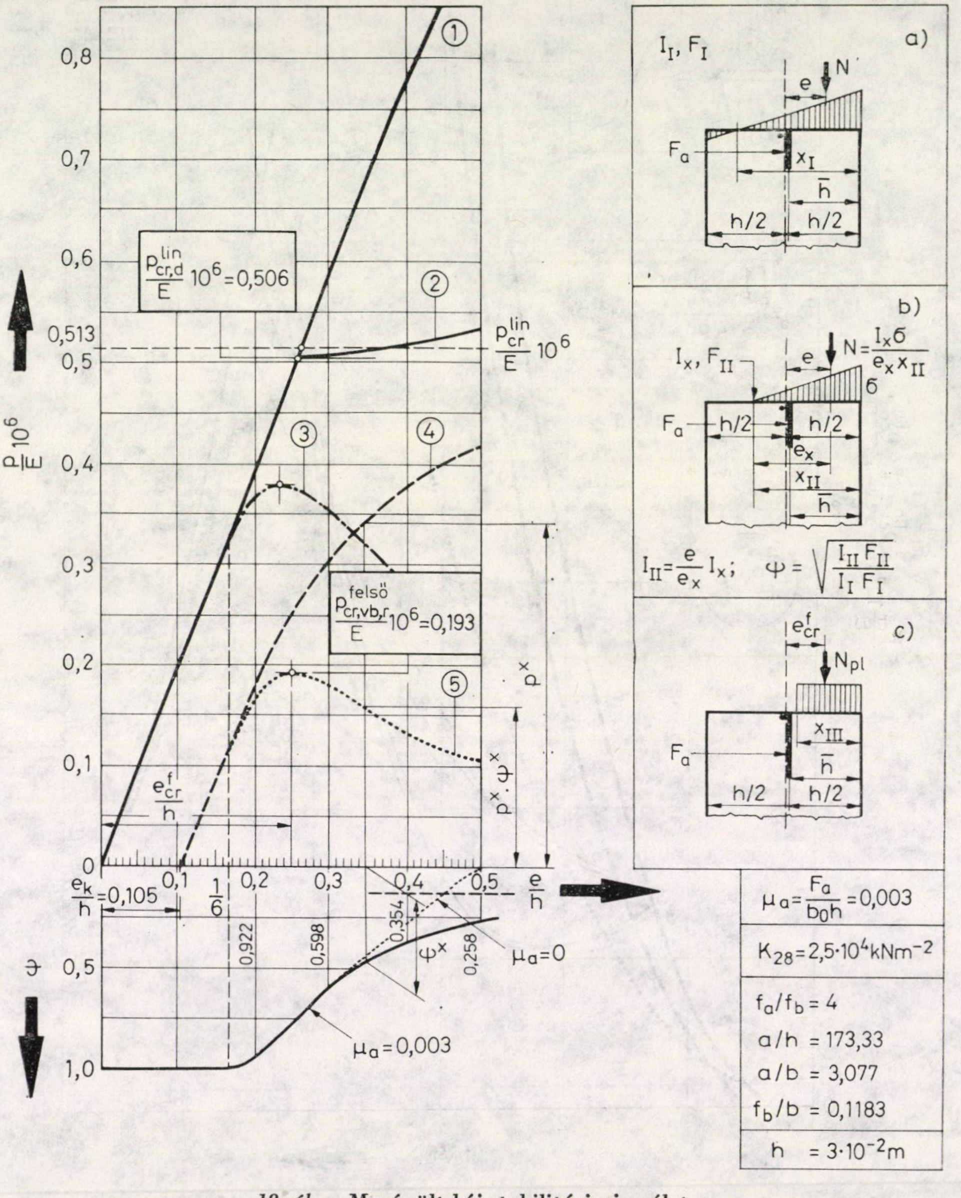
17a. ábra. $\bar{p}_{cr}$, p^{lin}_{cr}, $p^{\mathrm{lin}}_{cr,d}$ kritikus terek összehasonlítása (a/h = 150, f_b/b = 0,2, a/b = 1)

$= 1$ esetén $\Delta \sim +10\% \div -8\%$, $a/b = 2$-nél $\Delta \sim +13\% \div -9\%$, $a/b = 3$-nál $\Delta \sim +39 \div -11\%$. A változások ellenére a *maximális* lineáris kritikus terhek továbbra is az $f_a/f_b = 3$ arány közelében helyezkednek el.



17b. ábra. $\bar{p}_{cr}$, p_{cr}^{lin}, $p_{cr,d}^{lin}$ kritikus terek összehasonlítása ($a/h = 150$, $f_b/b = 0{,}2$)

A gyakorlatban sokszor alkalmazott normálhéj ($f_a/f_b = 4$) és háromnegyed normálhéj ($f_a/f_b = 9/4$) teherbírását csak kevéssé befolyásolják az alaphelyzetbeli deformációk (w_0). Ez a hatás az $f_a/f_b \sim 3$ paraméter közelében lévő héjakra a *legveszélyesebb.*



18. ábra. Megépült héj stabilitási vizsgálata

Számításaink alapján azt is megállapíthatjuk, hogy a kezdeti hullámosság is az említett $f_a/f_b \sim 2{,}5 \div 3{,}5$ tartományban csökkenti legnagyobb mértékben a teherbírást.

Ez a módszer egyúttal megadja az *elágazás utáni* kis alakváltozásokhoz tartozó teherbírási diagramok jellegét is. *A kritikuson túli teherbírás* esetenként *emelkedő* (kb. $f_a/f_b = 3 \div 4$), esetenként *csökkenő* (kb. $f_a/f_b = 2 \div 3$) jellegű. A 17b. ábra azt is megmutatja, hogy az átpattanási kritikus terhek ($\bar{p}_{cr}$) kb. az $f_a/f_b = 2{,}5 \div 4$ tartományban nagyobbak, ill. sokkal nagyobbak mint az elágazási kritikus terhek.

Ebben a fejezetben az átpattanási kritikus teher elérése *előtti* elágazás ($w_0 \neq 0$) lehetőségét vizsgáltuk meg.

Azon héjakat, melyek átpattanás következtében mennek tönkre, az *átpattanás utáni* viselkedésüket tekintve két csoportba oszthatjuk:

1. A lehajlási alak végig szimmetrikus;
2. Az átpattanás utáni labilis ágon (antimetrikus) elágazás következik be. Ezt az esetet nem vizsgáltuk, mert a szerkezetet a $\bar{p}_{cr}$ teher elérésekor mérnöki szempontból tönkrementnek tekintjük.

5. Gyakorlati alkalmazás

Alkalmazzuk az előzőekben ismertetett módszereket

K. HRUBAN a Die Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau (*Acta Techn. Hung.* 7/1953), 425—464. o.) c. cikkében említett megépült nyereg alakú, oldalnyomásmentes HP héjra. A héj geometriai, vasalási és szilárdsági adatait a 18. ábrán tüntettük fel (K_{28} a kockaszilárdság). A héj mértékadó terhe (3 cm vastag héjlemez, rétegek, hóteher):

$$P_M = 2{,}25\ \mathrm{kNm}^{-2}$$

Mindenekelőtt a 3.3-ban leírt módon előállítottuk a héj *nemlineiárs* $p-w$ $[a, b]$ diagramját. Ezt a görbét ezután transzformáltuk úgy, hogy $w[a, b]$ helyett a $\tilde{w}_{0d} = \vartheta w[a,b]$ átlagos lehajlás függvényében raktuk fel a p ordinátákat. A középfelülettől mért „e/h" relatív külpontosság függvényében kapott görbe a 18. ábrán látható [① jelű görbe]. Minthogy a vizsgált külpontossági tartományban a p ordináták sokkal kisebbek mint a $\bar{p}_{cr}$ átpattanási kritikus terhek, a diagram e kezdeti szakasza közel áll az egyeneshez.

Ezután a [6]-ban leírtak szerint meghatároztuk a $p_{cr}^{\mathrm{lin}} = 0{,}513 \times E \times 10^{-6}$ teher paraméter értéket [$w_0 = 0$, elágazási kritikus teher]. Ezt követően a 4.4 szerint vettük figyelembe a középfelület lehajlását ($w_0 \neq 0$): $p_{cr,d}^{\mathrm{lin}} = 0{,}509 \times E \times 10^{-6}$. A csökkenés mértéke csekély. Az elágazás utáni teherbírás enyhén emelkedő. A héj túlnyomórészt nyúlásmentesen horpad, ezért hasonlít a ② jelű ág a síklemezek megfelelő posztkritikus jelleggörbéjéhez.

A *homogén*, izotróp, *ideálisan rugalmas anyagú* héj lineáris kritikus terhére vonatkozó biztonság:

$$k_b = \frac{p_{cr,d}^{\mathrm{lin}}}{p_M} = \frac{0{,}506 \times E \times 10^{-6}}{2{,}25} = 0{,}225 E \times 10^{-6}.$$

A $K_{28} = 2{,}5\times 10^4$ kNm^{-2} kockaszilárdságnak

$$E_{b0} = 5{,}5 \times 10^7 . \frac{K_{28}}{K_{28} + 20000} = 3{,}05\times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$$

kezdeti rugalmassági modulus felel meg.
A teljes *lassú alakváltozás* lejátszódása után az alakváltozási modulus:

$$E_{bt} = 1{,}33\times 10^7 \text{ kNm}^{-2}.$$

Az E = E_{bt} helyettesítéssel a biztonság

$$k_b = 3.$$

A valóságos helyzet ennél lényegesen kedvezőtlenebb, hiszen figyelembe kell vennünk a
a) vasbeton keresztmetszet berepedését (ψ),
b) a véletlen jellegű kezdeti külpontosságot (e_k),
c) a beton anyagának plasztikus tulajdonságait (ζ_p).
A fenti szempontoknak megfelelő teherbírás-csökkenés mértékét DULÁCSKA [8] eljárásával állapítjuk meg.

ad a.) *Repedezettség*

Meg kell határoznunk a külpontosan nyomott, lineárisan rugalmas anyagú vas) beton keresztmetszet I. és II. feszültségi állapotban érvényes hajlítási ($EI_{\rm I}$, $EI_{\rm II}$. és nyúlási ($EF_{\rm I}$, $EF_{\rm II}$) merevségeit az „*e/h*" relatív külpontosság függvényébeni Az ide vonatkozó részletek a 18.a-b ábrákon láthatók. A *repedezettség* miatt-csökkentő tényező [8]:

$$\psi = \sqrt{\frac{I_{\rm II}\, F_{\rm II}}{I_{\rm I}\, F_{\rm I}}}\,.$$

A ψ-ábrán pontozott vonallal ($\mu_a = 0$) a vasalatlan keresztmetszet horpadási merevségének a csökkenését tüntettük fel.
A ψ-diagram ismeretében a megfelelő $p/E\ 10^6$ teherparaméter értékek szorzásával kaptuk meg az ①—② jelű diagramból a ③ jelűt.

ad b) *Kezdeti külpontosság*

A véletlen jellegű kezdeti külpontosság mértékét [8] nyomán az átlagos görbület[1] sugárból (Rátl)

$$e_k = \frac{R_{\text{átl}}}{3500},$$

$$R_{\text{átl.}} = \sqrt{R_x\,|R_y|}\,,$$

$$R_x = 16{,}90 \text{ m},\ |R_y| = 7{,}14 \text{ m},\ R_{\text{átl.}} = 10{,}98 \text{ m},$$

$$e_k = 3{,}14\times 10^{-3} \text{ m}$$

módon kaphatjuk meg. Minthogy az e_k kezdeti külpontosságú héj p-e (ill. p-w) diagramját nem ismerjük, ezt úgy közelítjük meg, hogy a külpontosan nyomott rudak

$$p = p_{\rm cr}^{\rm lin} \cdot \left(1 - \frac{e_k}{e}\right)$$

görbéjét az ① — ② diagramokhoz illesztjük. Esetünkben ez jó közelítés, hiszen a ② jelű görbeág — a vizsgált kis tartományban — közel vízszintes.
Az így kapott ④ jelű görbe a tényleges pontos görbe alatt fut, hiszen a héj az elágazás után emelkedő teherbírású.
Természetesen a ④ jelű görbét is torzítanunk kell a ψ redukciós tényezőkkel (l.

$p^* \to \psi^* \cdot p^*$). Az ilymódon kapott ⑤ jelű diagram az *ideálisan rugalmas* anyagú *berepedt* vasbeton héj p—e/h teherbírási diagramja. Ennek tetőpontja a

$$p_{cr,vb,r}^{\text{felső}} = \mathbf{0{,}193 \times E \times 10^{-6}}$$

felső kritikus teher.

ad c) *Plasztikus anyag*

A plasztikus redukciót [8] a

$$\xi_p = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{p_{cr,vb,r}^{\text{felső}}}{p_{pl}}\right)^2}}$$

szorzótényezővel veszi figyelembe. Itt p_{pl} az a teher, mely *horpadás nélkül* plasztikus szilárdsági törést idéz elő a keresztmetszetben (az N_{pl} plasztikus határerő a 36c. ábrán) ha a külpontosság e_{cr}^{f} (ld. az ⑤ jelű görbét). Esetünkben $N_{pl} = 176\ kNm^{-2}$, $p_{pl} = 35\ kNm^{-2}$.
Állandó teher esetén $E = E_{bt} = 1{,}33 \times 10^7\ kNm^{-2}$, tehát

$$p_{cr,vb,r}^{\text{felső}'} = 0{,}193 \times 1{,}33 \times 10^7 x 10^{-6} = \mathbf{2{,}57\ kNm^{-2}}.$$

A hóteher esetleges jellegű, lassú alakváltozást csak kis mértékben okoz, így a totális teher ($p_M = 2{,}25\ kNm^{-2}$) esetében az

$$\bar{E}_b = 1{,}64 \times 10^7\ kNM^{-2}$$

alakváltozási modulussal számolunk. Ekkor

$$p_{cr,vb,r}^{\text{felső}'} = 0{,}193 \times 1{,}60 \times 10^7 \times 10^{-6} = \mathbf{3{,}17}\ kNm^{-2}.$$

A felső kritikus értékeket a plasztikus törőteherrel (p_{pl}) összehasonlítva látható, hogy a héj a plasztikus törőteher 7,3—8,8%-ánál horpad.
A redukciós tényező a tárgyalt két esetben csak jelentéktelen mértékben tér el egymástól:

$$\xi_p^{\prime} = 0{,}997, \text{ ill. } \xi_p^{\prime\prime} = 0{,}996.$$

Végeredményben állandó teher esetén a *berepedt*, külpontosan nyomott vasbeton héj *plasztikus* kritikus terhe:

$$p_{cr,pl}^{\prime} = p_{cr,vb,r}^{\text{felső}'} \cdot \xi_p^{\prime} = \mathbf{2{,}56}\ Nm^{-2}.$$

Totális teher esetén:

$$p_{cr,pl}^{\prime\prime} = p_{cr,vb,r}^{\text{felső}''} \cdot \xi_p^{\prime\prime} = \mathbf{3{,}15}\ Nm^{-2}.$$

A $p_M = 2{,}25\ kNm^{-2}$ teherből $p_á = 1{,}25\ kNm^{-2}$ állandó jellegű, $p_e = 1{,}0\ kNm^{-2}$ esetleges jellegű, nem tartós teher:

$$k_b^{\prime} = \frac{p_{cr,pl}^{\prime}}{p_á} = \mathbf{2{,}05}\ ,$$

$$k_b^{\prime\prime} = \frac{p_{cr,pl}^{\prime\prime}}{p_M} = \mathbf{1{,}40}.$$

Tehát a héj $p_{cr,d}^{lin}$ kritikus terhét a repedések (ψ) a véletlen jellegű kezdeti külpontosságok (e_k) és (kis mértékben) az anyag plasztikus tulajdonságai (ξ_p) igen jelentősen lecsökkentették. A szerkezet a terhek viselésére alkalmas.

Megjegyezzük, hogy az „e" külpontosság növekedésével az ⑤ jelű görbe emelkedővé válik, mert a ④ jelű görbe monoton növekvő, a ψ pedig határértékhez (tiszta hajlítás; szaggatott vonal) tart.

6. Összefoglalás

Jelen tanulmányban a nyereg alakú, oldalnyomásmentes HP héjak egyenletesen megoszló terhelés alatti nagy alakváltozásos egyensúlyi útjának jellegzetességeivel foglalkoztunk.

A geometriai nemlinearitást figyelembe vevő egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek alapján a Galerkin-módszerrel előállítottuk a héjak teherlehajlás diagramjait.

Megállapítottuk, hogy — a vizsgált héjak bizonyos arányainál — a teherintenzitás egy meghatározott értékénél *átpattanás* következik be.

Csak a szeminormál héj és az ettől kevéssé eltérő nyílmagasságarányú héjak teherbírási diagramjai monoton emelkedő jellegűek. Ezen héjak teherbírása igen kismértékű, ezért csak a lemezekre jellemző geometriai arányok esetén lehetséges az alkalmazásuk.

Az átpattanási kritikus terhek a vizsgált nyílmagasságarány-tartomány legnagyobb részében nagyobbak, ill. sokkal nagyobbak mint a deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) bekövetkező elágazási jelenség lineáris kritikus terhei.

Megvizsgáltuk a nemlineárisan *deformálódott alaphelyzetből* ($w_0 \neq 0$) bekövetkező elágazási jelenséget is. Az ily módon kapott eredmények azt mutatják, hogy az alaphelyzetbeli deformációk hatása az $f_a/f_b \sim 3$ paraméter közelében lévő héjakra a legveszélyesebb. A gyakorlatban sokszor alkalmazott normálhéj és háromnegyed normális típusú héj teherbírását csak kevéssé befolyásolja ez a hatás.

Eredményeinkből arra is következtetni lehetett, hogy a kezdeti hullámosságra az $f_a/f_b \sim 2{,}5 \div 3{,}5$ paraméterű héjak valószínűleg a legérzékenyebbek.

A vizsgált héjak HP egyensúlyi útjainak a következő típusai vannak:

1. A terhük döntő részét hajlítómerevségük révén hordó héjak esetében *instabilitási probléma nem jelentkezik.* A p—w diagramoknak nincs stacionárius pontjuk. A szeminormál héj teherbírási diagramjainak még inflexiós pontjuk sincs.

2. Bizonyos geometriai arányoknál a héjak *átpattanás* miatt vesztik el stabilitásukat. Ezen a típuson belül két eset lehetséges. A különbség a két eset között az átpattanás utáni viselkedésükben jelentkezik:

   2.1 Az egyik esetben a lehajlási alak végig szimmetrikus;

   2.2 A másik esetben az átpattanás utáni labilis ágon elágazás következik be. Ezt a lehetőséget nem vizsgáltuk, mert a szerkezetet a p_{cr} teher elérésekor tönkrementnek tekintjük.

3. A vizsgált szerkezetek legnagyobb részére (elsősorban az $f_a/f_b = (1{,}5 \div 2) \div 4$, $f_a/f_b = 0{,}2 \div 0{,}3$ $a/b = 1 \div 2$ geometriai arányú héjak)

az jellemző, hogy egy bizonyos $p_{cr,d}^{lin} < p_{cr}$ teher nagyságnál a 2.c ábrán folytonos vonallal behúzott egyensúlyi úton kívül létezik egy második egyensúlyi út is, mely *elágazási* jelenséggel kezdődik (2.c ábra: szaggatott vonal). Ezen deformált helyzetből bekövetkező *elágazás után* a teherbírás esetenként csökkenő, esetenként emelkedő.

IRODALOM

1. BUSHNELL, D.: Symmetric and Nonsymmetric Buckling of Finitely Deformed Eccentrically Striffened Shells of Revolution. *AIAA Journ.* **5** (1967) 1455—1462
2. DULÁCSKA, E.: A héjak hullámossága kritikus terhet csökkentő vizsgálata lineáris elmélettel. *Építés- és Építészettudomány* **8** (1976), 279—283
3. DULÁCSKA, E.: Vibration and Stability of Anisotropic Shallow Shells. *Acta Techn. Hung.* **65** (1969), 225—260
4. FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *International Association for Bridge and Structural Engineering* **17** (1957) 23—46
5. JANKÓ, L.: Egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, lapos, oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak membrán- és hajlítási elméletének összehasonlítása. *Műszaki Tudomány* 57 (1979), 1.—2., 57—89.
6. JANKÓ, L.: Oldalnyomásmentes, lapos, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak stabilitása. *Műszaki Tudomány* 57 (1979), 1.—2., 227—259.
7. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* **3** (1971), 19—38
8. KOLLÁR, L.—DULÁCSKA, E.: Schalenbeulung. Werner, Düsseldorf — Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
9. LEET, K. M.: Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE* **92** (1966) No. 1., 121—142
10. MARGUERRE, K.: Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrforschung, 433—443
11. PFLÜGER, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg—New York 1964
12. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Boston Society of Civil Engineers 1955, 100—133
13. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw—Hill Book Company, New York—Toronto—London 1961
14. WEDELLSBORG, B. W.: Critical Buckling Load on Large Spherical Shells. *Journ. Struct. Divis. Proc. ASCE*, **88** (1962), Stl, 111—121
15. WEINITSCHKE, H. J.: On Asymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells. *Journal of Mathematics and Physics* **44** (1965) 141—163
16. WEINITSCHKE, H. J.: On the Stability Problem for Shallow Spherical Shells. *Journal of Mathematics and Physics* **38** (1960) No. 4. January, 209—301
17. WEINITSCHKE, H. J.: On the Nonlinear Theory of Shallow Spherical Shells. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **6** (1958), No. 3. September, 209—232
18. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1962

A Nonlinear Analysis of the Equilibrium Path of Shallow Shaddle-shaped Hypar Shells, Supported by Shear Diaphragms, under Uniform Load, with Special Respect to Bifurcation and Snapping. This paper is the third and the final part of a series. In the *first* part the problems of the existence and uniqueness of the membrane solution of the hypar shells and the kinematic uncertainty of the surface is treated. In the *second* part, the phenomenon of branching out from the basic undeformed state is dealt with. In the present *third* part of the paper the author tries to give a response to the question whether the failure can take place without branching, caused by snap-through (i.e., of what character are the load-deflection diagrams of large deformation). It is also investigated, whether the load bearing capacity beyond the branching, starting from the deformed basic state, is increasing or decreasing.

Untersuchung der Gleichgewichtszustände sattelförmiger, flacher, normalkraftfrei gelaterter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung, mit besonderer Berücksichtigung des Durchschlagens und der Abzweigung. — Diese Abhandlung bildet den letzten Teil einer dreiteiligen Artikel-Serie. Im ersten Teil der Serie waren die theoretischen Fragen der Existenz und der Eindeutigkeit der Membranlösung, sowie der kinematischen Unbestimmtheit von HP-Schalen behandelt worden. Auf Grund dessen wurde die Erscheinung der *Verzweigung* aus dem *unverformten* Grundzustand im zweiten Teil erörtert. In der vorliegenden Arbeit werden die *charakteristische Tragverhaltenskurven* der HP-Schalen bestimmt und es wird untersucht, ob das Stabilitätsversagen infolge *Durchschlagen* auftreten kann. Wir werden auch auf die näherungsweise Untersuchung der Verzweigung aus dem *verformten* Grundzustand eingehen. Dies bietet die Möglichkeit den wachsenden oder abnehmenden Charakter des *überkritischen* Tragverhaltens zu bestimmen.